$\{E_\lambda\}$ представляет собой, очевидно, спектральное семейство, заданное на полуоси $\lambda \geqslant 0$. Для того чтобы доказать формулу (15) строго, следует выбрать на интервале $-1 \leqslant \mu < 1$ последовательность точек, сходящуюся к 1, и провести рассуждение, аналогичное тому, которое было проведено в п. 120 и 121. Так как $E_\lambda = F_\mu$ является пределом многочленов относительно B, то E_λ перестановочны с A, а также с любым оператором, перестановочным с A.

§ 3. РАСШИРЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

123. Преобразования Кэли. Индексы дефекта. Как мы видели, именно самосопряженные операторы допускают спектральное представление, поэтому бывает важно знать, можно ли заданный симметричный оператор расширить так, чтобы он стал самосопряженным. Можно поставить и более общую задачу: найти всевозможные симметричные расширения заданного симметричного оператора S.

Следуя И. Нейману [1], мы воспользуемся для этой цели преобразованиями Кэли. Так же, как в случае самосопряженного оператора, преобразование Кэли симметричного оператора S определяется формулой

$$V = (S - iI)(S + iI)^{-1};$$

в этом случае V представляет собой *изометричный* оператор, и S можно выразить через V формулой

$$S = i(I + V)(I - V)^{-1}.$$

Взяв в соотношениях (10), (12) и (13) S вместо A, мы убедимся, что, когда S — замкнутый оператор, замкнут и V, и обратно. Так как всякий симметричный оператор S имеет замкнутое расширение S^{**} (замыкание оператора S), то мы ограничимся рассмотрением лишь *замкнутых* симметричных операторов S.

Мы видели, что в том случае, когда S — *самосопряженный* оператор, V представляет собой оператор *унитарный*; покажем теперь, что верно и обратное. Допустим, что V — унитарный оператор, и возьмем какой-нибудь элемент g из $\mathfrak{D}_{S^*}$. Если $g^* = S^*g$, то

$$(Sf, g) = (f, g^*)$$

для всех f из $\mathfrak{D}_S$, и так как эти f имеют вид $f = (I - V)h$, где h пробегает $\mathfrak{D}_V = \mathfrak{H}$, то

$$(i(I + V)h, g) = ((I - V)h, g^*)$$

или

$$i(h, g) + i(Vh, g) = (h, g^*) - (Vh, g^*)$$

для всех элементов h пространства $\mathfrak{H}$. Воспользовавшись тем, что оператор V унитарный, и взяв (Vh, Vg) вместо (h, g) и (Vh, Vg^*)

вместо (h, g^*), получим

$$(Vh, -iVg-ig-Vg^*+g^*)=0.$$

Отсюда следует, так как значения Vh оператора V заполняют все пространство $\mathfrak{H}$, что

$$-iVg-ig-Vg^*+g^*=0$$

и, следовательно,

$$g=(I-V)\frac{g-ig^*}{2}, \quad g^*=i(I+V)\frac{g-ig^*}{2}.$$

Итак, g принадлежит также области определения оператора S и $Sg=g^*$. Доказано, что $S^*=S$, т. е. S является самосопряженным оператором.

В случае произвольного замкнутого симметричного оператора S область определения $\mathfrak{D}_V$ оператора V и область его значений $\mathfrak{B}_V=V\mathfrak{D}_V$ не совпадают, вообще говоря, со всем пространством $\mathfrak{H}$. Но так как оператор V изометричен и замкнут, то $\mathfrak{D}_V$ и $\mathfrak{B}_V$ представляют собой замкнутые множества, т. е. подпространства $\mathfrak{H}$, из которых то или другое может иногда совпасть с $\mathfrak{H}$. Соответствующие ортогональные дополнения $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_V$ и $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{B}_V$ называются *подпространствами дефекта*, а их размерности — *индексами дефекта* симметричного оператора S (а также изометричного оператора V). Напомним читателю, что $\mathfrak{D}_V$ есть область значений оператора $S+iI$, а $\mathfrak{B}_V$ — область значений оператора $S-iI$.

Из того, что мы доказали, вытекает, что замкнутый симметричный оператор *самосопряжен* тогда и только тогда, когда его индексы дефекта суть (0, 0).

Перейдем теперь к построению расширений. Ясно, что если замкнутый симметричный оператор S' служит расширением замкнутого симметричного оператора S, то преобразование Кэли V' оператора S' является расширением преобразования Кэли V оператора S. При этом $\mathfrak{D}_V$ будет подпространством подпространства $\mathfrak{D}_{V'}$, а его ортогональное дополнение $\mathfrak{D}_{V'}\ominus\mathfrak{D}_V$ отображается изометричным оператором V' в ортогональное дополнение подпространства $\mathfrak{B}_V$ в подпространстве $\mathfrak{B}_{V'}$. Отсюда следует, что при переходе от S к S' *индексы дефекта уменьшаются на одно и то же число* (конечное или бесконечное).

Покажем теперь, что всякое изометричное расширение U преобразования Кэли V оператора S определяет некоторое симметричное расширение S' оператора S, для которого преобразование Кэли V' равно U.

Сначала заметим, что оператор $(I-U)^{-1}$ существует, т. е. что из $(I-U)h=0$ следует $h=0$. В самом деле, если $(I-U)h=0$, то для любого элемента f вида $f=(I-U)g$ имеем

$$(h, f)=(h, g)-(h, Ug)=(Uh, Ug)-(h, Ug)=-((I-U)h, Ug)=0,$$

Таким образом, h ортогонален области значений оператора $I-U$ и тем более ортогонален области значений оператора $I-V$, т. е. области определения оператора S. Так как эта последняя плотна в $\mathfrak{H}$, то $h=0$.

Возьмем теперь оператор

$$S'=i(I+U)(I-U)^{-1},$$

являющийся, очевидно, расширением оператора S. Этот оператор симметричен. В самом деле, если f и g принадлежат $\mathfrak{D}_{S'}$, то они имеют вид

$$f=(I-U)\varphi, \quad g=(I-U)\psi$$

и

$$S'f=i(I+U)\varphi, \quad S'g=i(I+U)\psi,$$

откуда, прииимая во внимание, что $(\varphi, \psi)=(U\varphi, U\psi)$, находим

$$(S'f, g)=(i(I+U)\varphi, (I-U)\psi)=i[(U\varphi, \psi)-(\varphi, U\psi)]=$$
$$=((I-U)\varphi, i(I+U)\psi)=(f, S'g).$$

Наконец, из $f=(I-U)\varphi$ вытекает, что

$$S'f=i(I+U)\varphi, \quad (S'+iI)f=2i\varphi, \quad (S'-iI)f=2iU\varphi,$$

откуда мы заключаем, что область определения преобразования Кэли V' состоит из элементов вида $2i\varphi$, где φ пробегает $\mathfrak{D}_U$, и что

$$V'(2i\varphi)=2iU\varphi=U(2i\varphi).$$

Таким образом, $V'=U$, что и требовалось.

Следует заметить, что, рассуждая таким же образом, можно прийти к выводу, что если U — произвольный изометричный оператор с областью значений, плотной в $\mathfrak{H}$, то $S'=i(I+U)(I-U)^{-1}$ представляет собой симметричный оператор, преобразование Кэли которого равно U.

Итак, *задача отыскания всевозможных (замкнутых) симметричных расширений замкнутого симметричного оператора S сводится к задаче отыскания всевозможных изометричных расширений его преобразования Кэли V*, т. е. к задаче, гораздо более простой по сравнению с исходной.

В самом деле, для того чтобы расширить V, нужно только отобразить изометрически подпространство дефекта $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_V$ или какое-нибудь его подпространство на подпространство дефекта $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{B}_V$, что можно осуществить с помощью двух ортонормированных систем в $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{D}_V$ и в $\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{B}_V$. Таким образом можно исчерпать то из пространств дефекта, которое имеет меньшую размерность: соответствующий симметричный оператор S' будет тогда максимальным расширением оператора S. Если оба подпространства дефекта имеют одинаковую размериость, то оба они исчерпываются одновременно и мы получаем унитарное расширение оператора V, которому соответствует самосопряженное расширение оператора S.

Резюмируем основные результаты:

Теорема. *Для того чтобы замкнутый симметричный оператор S был максимальным, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из его индексов дефекта был равен нулю; для того чтобы он обладал самосопряженным расширением, необходимо и достаточно, чтобы его индексы дефекта были равны; наконец, для того чтобы он сам был самосопряжен, необходимо и достаточно, чтобы оба его индекса дефекта были равны нулю.*

Зададим в счетномерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ изометричный, но не унитарный оператор V_0: если $\{g_n\}$ — какая-нибудь полная ортонормированная последовательность в $\mathfrak{H}$, то положим

$$V_0 \sum_1^{\infty} c_k g_k = \sum_1^{\infty} c_k g_{k+1}.$$

Областью определения оператора V_0 служит все пространство, тогда как для области его значений $V_0 f$ существует одномерное ортогональное дополнение, образованное элементами вида cg_1. Легко показать, что совокупность значений $I - V_0$ всюду плотна в $\mathfrak{H}$. Следовательно, V_0 является преобразованием Кэли симметричного оператора

$$S_0 = i(I + V_0)(I - V_0)^{-1};$$

S_0 можно задать в виде

$$S_0 \sum_1^{\infty} c_k g_k = ic_1 g_1 + i(2c_1 + c_2) g_2 + i(2c_1 + c_2 + c_3) g_3 + \ldots$$

для всех элементов $f = \sum c_k g_k$, для которых $(I - V_0)^{-1} f$ существует, т. е. для тех, для которых сходится ряд

$$|c_1|^2 + |c_1 + c_2|^2 + |c_1 + c_2 + c_3|^2 + \ldots$$

(для таких f, в частности, $\sum_1^{\infty} c_k = 0$).

Оператор S_0 имеет, следовательно, индексы дефекта (0, 1). Он называется *элементарным симметричным оператором*.

Можно показать, что всякий симметричный оператор S в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ любого числа измерений, имеющий индексы дефекта $(0, m)$ (где m — произвольная конечная или бесконечная мощность), может быть „составлен“ из m элементарных симметричных операторов и, возможно, некоторого самосопряженного оператора. Смысл этого утверждения таков: в $\mathfrak{H}$ можно выделить m попарно ортогональных счетномерных подпространств $\mathfrak{M}_\alpha$, в каждом из которых S сводится к некоторому элементарному симметричному оператору; в подпространстве $\mathfrak{N}$, состоящем из элементов, ортогональных всем $\mathfrak{M}_\alpha$ ($\mathfrak{N}$ может случайно состоять только из 0), S сводится к некоторому самосопряженному оператору.

Изучение строения максимальных симметричных операторов с индексами дефекта $(m, 0)$ не дает ничего нового, так как, вообще, если S имеет индексы дефекта (m, n), то $-S$ имеет индексы дефекта (n, m); это следует из того, что преобразования Кэли операторов S и $-S$ являются взаимно обратными операторами.

Заметим, что *действительные симметричные операторы в пространстве L^2 всегда имеют равные индексы дефекта*, т. е. они либо являются самосопряженными операторами, либо имеют самосопряженные расширения. Оператор S называется *действительным*, если его область определения содержит вместе с любой функцией $f(x)$ ее сопряженную $\overline{f(x)}$ и $S\overline{f(x)} = \overline{Sf(x)}$.

Это предложение можно доказать следующим образом. Область $\mathfrak{D}_V$ и совокупность значений $\mathfrak{B}_V$ преобразования Кэли V оператора S состоят соответственно из функций вида

$$u(x) = Sf(x) + if(x), \quad v(x) = Sg(x) - ig(x),$$

где f и g пробегают область определения оператора S. Положив $g(x) = \overline{f(x)}$, мы получим $v(x) = \overline{u(x)}$, следовательно, $\mathfrak{B}_V$ состоит из функций, сопряженных функциям, принадлежащим $\mathfrak{D}_V$. Функции, сопряженные двум ортогональным функциям, сами ортогональны, поэтому $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{B}_V$ состоит из функций, сопряженных функциям из $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}_V$. Таким образом, размерности подпространств $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{B}_V$ и $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}_V$ совпадают, т. е. индексы дефекта оператора S равны.

„Действительные“ операторы могут быть определены даже в абстрактном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, если только в нем задана операция J, соответствующая переходу от заданной функции к сопряженной. J должно быть оператором, отображающим $\mathfrak{H}$ само в себя и обладающим следующими свойствами:

$$J(f+g) = Jf + Jg, \quad J(cf) = \bar{c}Jf, \quad J^2 = I,$$
$$(Jf, Jg) = \overline{(f, g)} = (g, f).$$

Оператор T мы назовем „действительным по отношению к J“, если его область $\mathfrak{D}_T$ одновременно с f всегда содержит Jf и если $TJf = JTf$, т. е. $J \smile T$. Предложение, только что доказанное для действительных симметричных операторов в L^2, справедливо и в этом абстрактном случае[1]).

124. Полуограниченные симметричные операторы. Метод Фридрихса. Среди дифференциальных операторов, с которыми приходится иметь дело в математической физике, часто встречаются такие, которые, вместе с соответствующими краевыми условиями, порождают полуограниченные симметричные операторы в некотором гильбертовом пространстве. Таков, например, оператор

$$Au(x) = -[p(x)u(x)]' + q(x)u(x),$$

где

$$p(x) \geqslant 0, \quad q(x) \geqslant q_0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

[1]) См. И. Нейман [1] (стр. 101); Стоун [2] (гл. IX, § 2).

если его рассматривать в пространстве $L^2(0, 1)$, отнеся к области определения функции $u(x)$, дважды непрерывно дифференцируемые и удовлетворяющие условиям

$$u(0)=0, \quad u'(1)+hu(1)=0,$$

где $h \geqslant 0$ — некоторая постоянная; функции $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ также предполагаются непрерывными. Прямым подсчетом мы убеждаемся в том, что

$$(Au, u)=hp(1)|u(1)|^2+\int_0^1 p(x)|u'(x)|^2dx+\int_0^1 q(x)|u(x)|^2dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 q_0|u(x)|^2dx=q_0(u, u).$$

В качестве второго важного примера рассмотрим оператор Шрёдингера (для атома водорода)

$$Au=-(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})-\frac{c}{r}u \qquad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

в пространстве функций $u(x, y, z)$ с суммируемым квадратом [в обычном пространстве (x, y, z)]. Этот оператор задается на достаточно гладких функциях, например на функциях, равных нулю при $r \leqslant r_0$ и при $r \geqslant R_0$ (где r_0 и R_0 — положительные числа, свои для каждой функции) и имеющих непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Легко видеть, что оператор A симметричен; после некоторых выкладок[1]) можно прийти к выражению

$$(Au, u)=\int\int\int\left(|u_x|^2+|u_y|^2+|u_z|^2-\frac{c}{r}|u|^2\right)dx\,dy\,dz \geqslant$$

$$\geqslant -2c^2(u, u),$$

где интеграл берется по всему пространству (x, y, z).

Число примеров, заимствованных, например, из квантовой механики, можно было бы умножить. Важно знать, могут ли такие операторы быть расширены до самосопряженных операторов, т. е. до таких, для которых имеет место спектральное разложение. Ответ на этот вопрос утвердительный:

Теорема. *Всякий полуограниченный симметричный оператор S может быть расширен до некоторого полуограниченного самосопряженного оператора A, притом так, что оператор A будет иметь ту же (верхнюю или нижнюю) грань, что и S.*

Эта теорема сформулирована И. Нейманом[2]), но сам он доказал более слабое предложение, а именно, что грани операторов A

---

[1]) См. Курант и Гильберт [1] (стр. 377) и Реллих [3] (IV, стр. 380).

[2]) И. Нейман [1] (стр. 103); см. также Винтнер [1] (§ 111).

и S могут быть сколь угодно близки. Полностью эта теорема была впервые доказана Стоуном и Фридрихсом[1]. Стоун при этом пользовался приближениями заданного симметричного оператора S посредством ограниченных симметричных операторов S_n (даже конечного ранга), стремящихся к S в том смысле, что

$$\lim S_n \subseteq S \subseteq (\lim S_n)^{**}.$$

Метод Фридрихса, который мы воспроизводим здесь, может быть охарактеризован как метод „расширения посредством замыкания".

Теорему достаточно доказать для операторов с нижней гранью, равной 1.

Итак, пусть S — симметричный оператор, такой, что

$$(Sf, f) \geqslant (f, f)$$

для всех элементов f из $\mathfrak{D}_S$. Введем в $\mathfrak{D}_S$ новое скалярное произведение

$$[f, g] = (Sf, g) = (f, Sg)$$

и новую норму

$$[[f]] = (Sf, f)^{1/2};$$

при этом, очевидно,

$$[[f]] \geqslant \|f\|. \tag{16}$$

С такой метрикой множество $\mathfrak{D}_S$ становится гильбертовым пространством, хотя, вообще говоря, неполным. Его можно *пополнить*, добавив некоторые идеальные элементы, соответствующие тем фундаментальным (в смысле новой метрики) последовательностям $\{f_n\}$, которые не имеют предела в $\mathfrak{D}_S$; двум эквивалентным фундаментальным последовательностям $\{f_n\}$ и $\{f'_n\}$, т. е. таким, для которых

$$[[f_n - f'_n]] \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

должен соответствовать один и тот же идеальный элемент. Если $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — две фундаментальные последовательности, имеющие соответственно пределы f и g, принадлежащие $\mathfrak{D}_S$ или идеальные, то последовательность скалярных произведений $[f_n, g_n]$ сходится и ее предел зависит только от f и g, т. е. он не изменится, если вместо $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ взять им эквивалентные фундаментальные последовательности. В том случае, когда f и g принадлежат $\mathfrak{D}_S$,

$$\lim [f_n, g_n] = [f, g];$$

тогда, когда f, или g, или они оба — идеальные элементы, это соотношение может служить *определением* скалярного произведения $[f, g]$. Легко видеть, что пространство $\mathfrak{H}_0$, полученное посредством такого пополнения, будет полным, т. е. в нем любая фундаментальная последовательность окажется сходящейся.

[1]) Стоун [2] (стр. 387); Фридрихс [1] (I); см. также Фрейденталь [1] и Эберлейн [2].

Таков обычный способ пополнения неполного гильбертова пространства, но в данном случае введенные идеальные элементы могут быть отождествлены с некоторыми элементами исходного пространства $\mathfrak{H}$, притом так, что $\mathfrak{H}_0$ станет линейным подмножеством пространства $\mathfrak{H}$:

$$\mathfrak{D}_S \subseteq \mathfrak{H}_0 \subseteq \mathfrak{H}.$$

В самом деле, в силу неравенства (16), всякая последовательность элементов из $\mathfrak{D}_S$, фундаментальная в смысле новой метрики, будет фундаментальной также в исходной метрике, и две фундаментальные последовательности, эквивалентные в новой метрике, эквивалентны и в старой, так что они сходятся к некоторому определенному элементу пространства $\mathfrak{H}$. Таким образом, всякому элементу g^* из $\mathfrak{H}_0$ ставится в соответствие определенный элемент g пространства $\mathfrak{H}$; это соответствие, очевидно, линейно, причем для элементов g^*, принадлежащих $\mathfrak{D}_S$, $g^* = g$.

В том случае, когда и f, и g^* принадлежат $\mathfrak{D}_S$, равенство

$$[f, g^*] = (Sf, g),$$

где g означает элемент из $\mathfrak{H}$, поставленный в соответствие элементу g^*, выполняется в силу самого определения нового скалярного произведения. Но оно распространяется по непрерывности и на тот случай, когда f принадлежит $\mathfrak{D}_S$, а g^* — произвольный элемент пространства $\mathfrak{H}_0$. В силу этого равенства, двум различным элементам из $\mathfrak{H}_0$ не могут соответствовать одинаковые g из $\mathfrak{H}$ или, что эквивалентно, из $g = 0$ следует, что $g^* = 0$. В самом деле, если $g = 0$, то $[f, g^*] = 0$ для всех f из $\mathfrak{D}_S$; но $\mathfrak{D}_S$ плотно в $\mathfrak{H}_0$ (в новой метрике), поэтому $g^* = 0$. Таким образом, мы имеем право *отождествить* элементы $\mathfrak{H}_0$ с соответствующими элементами пространства $\mathfrak{H}$.

Неравенство (16) распространяется по непрерывности на все элементы f из $\mathfrak{H}_0$.

Теперь фиксируем произвольный элемент h пространства $\mathfrak{H}$ и рассмотрим функцию

$$L_h(f) = (f, h).$$

Тогда, если f принадлежит $\mathfrak{H}_0$, то

$$|L_h(f)| \leqslant \|f\| \|h\| \leqslant [[f]] \|h\|.$$

Следовательно, $L_h(f)$ представляет собой линейный функционал в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_0$ с нормой, не превосходящей $\|h\|$. Согласно п. 30, в $\mathfrak{H}_0$ существует элемент g, такой, что

$$L_h(f) = [f, g],$$

причем норма его равна норме функционала L_h, так что

$$\|g\| \leqslant [[g]] \leqslant \|h\|. \tag{17}$$

Так как элемент g однозначно определяется функционалом L_h, т. е. элементом h, то, положив

$$g = Bh,$$

мы зададим некоторый линейный оператор B, область которого охватывает все пространство $\mathfrak{H}$, а значения содержатся в $\mathfrak{H}_0$. По самому определению,

$$(f, h) = [f, Bh], \tag{18}$$

где f принадлежит $\mathfrak{H}_0$, а h принадлежит $\mathfrak{H}$; далее, в силу (17),

$$\|Bh\| \leqslant \|h\|.$$

Взяв в (18) $f = Bh'$, где h' — еще один произвольный элемент пространства $\mathfrak{H}$, мы получим

$$(Bh', h) = [Bh', Bh] = [\overline{Bh, Bh'}] = (\overline{Bh, h'}) = (h', Bh);$$

в частности, при $h = h'$

$$(Bh, h) = [Bh, Bh] \geqslant (Bh, Bh) \geqslant 0, \tag{19}$$

таким образом, B является положительным симметричным оператором в пространстве $\mathfrak{H}$.

Покажем, что существует обратный оператор B^{-1}. Действительно, если $Bh = 0$, то, в силу (18), $(f, h) = 0$ для всех f из $\mathfrak{H}_0$, а так как $\mathfrak{H}_0$ плотно в $\mathfrak{H}$, то $h = 0$.

Оператор B ограничен и симметричен, следовательно, самосопряжен; поэтому и его обратный

$$A = B^{-1}$$

является *самосопряженным* оператором [см. п. 119, предложение a)]. Если $g = Bh$ принадлежит области определения A, то, согласно (19),

$$(g, Ag) \geqslant (g, g).$$

Кроме того, в силу (18),

$$(f, Ag) = [f, g] \tag{20}$$

для f и g, принадлежащих соответственно $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{D}_A$. Далее, область $\mathfrak{D}_A$, заключенная в $\mathfrak{H}_0$, плотна в $\mathfrak{H}_0$ даже в смысле новой метрики. В самом деле, если бы это было не так, то существовал бы элемент $f_0 \neq 0$, такой, что

$$(f_0, Ag) = [f_0, g] = 0$$

для всех g из $\mathfrak{D}_A$. Но множество значений оператора A заполняет все $\mathfrak{H}$, следовательно, $f_0 = 0$.

Остается только доказать, что самосопряженный оператор A является расширением заданного симметричного оператора S.

Пусть f и g — произвольные элементы из $\mathfrak{D}_S$. С одной стороны, в силу (18),

$$(f, Sg) = [f, BSg],$$

а с другой, согласно определению новой метрики,

$$(f, Sg) = [f, g].$$

Множество $\mathfrak{D}_S$ плотно в $\mathfrak{H}_0$ (в смысле новой метрики), поэтому тождество

$$[f, BSg] = [f, g]$$

может выполняться для всех f из $\mathfrak{D}_S$ только при

$$BSg = g.$$

Отсюда следует, что g также принадлежит области определения оператора A и

$$Ag = Sg.$$

Итак, $A \supseteq S$, и на этом доказательство теоремы заканчивается.

Оператор S может, конечно, иметь и другие самосопряженные расширения. Однако из них только оператор A, который мы сейчас построили, обладает тем свойством, что его область заключена в $\mathfrak{H}_0$. Более того, *если S' — произвольное симметричное расширение оператора S с областью, заключенной в $\mathfrak{H}_0$, то $A \supseteq S'$.*

В самом деле, пусть f' принадлежит $\mathfrak{D}_{S'}$, а f — произвольный элемент $\mathfrak{D}_S$; в силу (18),

$$[f, BS'f'] = (f, S'f') = (S'f, f') = (Sf, f'),$$

а так как равенство $(Sf, g) = [f, g]$, первоначально справедливое для f и g из $\mathfrak{D}_S$, распространяется по непрерывности на любые f из $\mathfrak{D}_S$ и g из $\mathfrak{H}_0$, то окончательно получаем

$$[f, BS'f'] = [f, f'].$$

Отсюда $BS'f' = f'$ и, следовательно, f' входит в область определения оператора A и

$$Af' = ABS'f' = S'f',$$

т. е. $A \supseteq S'$.

Рассмотрим теперь нашу задачу с несколько иной точки зрения. Вместо того чтобы исходить из некоторого заданного полуограниченного симметричного оператора S и соответствующей формы $[f, g]$, возьмем сразу произвольную форму $[f, g]$, обладающую необходимыми свойствами, т. е. *числовую функцию $[f, g]$ элементов f и g из некоторого линейного множества $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{H}$, такую, что*

$$\left.\begin{aligned} [f_1 + f_2, g] &= [f_1, g] + [f_2, g], \\ [cf, g] &= c[f, g], \\ [f, g] &= \overline{[g, f]}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$[[f]]^2 = [f, f] \geqslant (f, f) = \|f\|^2. \tag{22}$$

Короче, пусть *$[f, g]$ — симметричная билинейная форма, заданная на $\mathfrak{D}$ и ограниченная снизу числом* 1.

Пусть $\mathfrak{H}_0$ — гильбертово пространство, получаемое пополнением пространства $\mathfrak{D}$ с метрикой $[[f-g]]$. Так же, как и выше, поставим в соответствие элементу g^* пространства $\mathfrak{H}_0$ элемент g из $\mathfrak{H}$. Однако теперь у нас нет уверенности в том, что различным g^* будут соответствовать различные g. Так как рассматриваемое соответствие линейно, то достаточно было бы, чтобы из $g=0$ следовало $g^*=0$, т. е., в силу самого определения пространства $\mathfrak{H}_0$, чтобы для любой последовательности элементов f_n из $\mathfrak{D}$, фундаментальной в смысле новой метрики и удовлетворяющей условию $\|f_n\| \to 0$, одновременно выполнялось условие $[[f_n]] \to 0$. Подчиним форму $[f, g]$ этому дополнительному требованию, т. е. допустим, что

$$[[f_n]] \to 0, \text{ если } f_n \in \mathfrak{D},\ [[f_n - f_m]] \to 0 \text{ и } \|f_n\| \to 0. \tag{22a}$$

Тогда мы сможем отождествить элементы g^* и g и, применив проведенное выше рассуждение, получим следующий результат:

Т е о р е м а[1]). *Форма $[f, g]$ может быть продолжена по непрерывности на линейное множество $\mathfrak{H}_0$, состоящее из тех элементов g пространства $\mathfrak{H}$, для которых существует последовательность $\{f_n\}$, такая, что*

$$\|g-f_n\| \to 0 \ \textit{и}\ [[f_n - f_m]] \to 0 \ \textit{при}\ m,\ n \to \infty.$$

Существует самосопряженный оператор A, притом единственный, область определения $\mathfrak{D}_A$ которого содержится в $\mathfrak{H}_0$, обладающий тем свойством, что

$$[f, g] = (f, Ag),$$

каковы бы ни были элемент f из $\mathfrak{H}_0$ и элемент g из $\mathfrak{D}_A$. Этот оператор ограничен снизу числом 1.

В самом деле, если A построен так, как указано выше, т. е. $A = B^{-1}$, то выполняется тождество (20), и если S — произвольный симметричный оператор с областью определения, заключенной в $\mathfrak{H}_0$, удовлетворяющий тождеству

$$[f, g] = (f, Sg)$$

для f из $\mathfrak{H}_0$ и g из $\mathfrak{D}_S$, то, согласно (18),

$$[f, BSg] = (f, Sg) = [f, g].$$

Отсюда следует, что

$$BSg = g;$$

таким образом,

$$Ag = Sg,$$

т. е.

$$A \supseteq S.$$

[1]) Фридрихс [1] (I, стр. 478—479).

Случай произвольной полуограниченной симметричной билинейной формы, т. е. такой, для которой выполнены условия (21), а вместо (22) — одно из двух неравенств

$$[f, f] \geqslant c(f, f), \quad [f, f] \leqslant c(f, f),$$

сводится к предыдущему заменой $[f, g]$ билинейной формой

$$(1 \mp c)(f, g) \pm [f, g].$$

125. Метод Крейна. Описанный выше метод дал нам возможность построить некоторое вполне определенное полуограниченное самосопряженное расширение A заданного полуограниченного симметричного оператора S, но о других возможных расширениях мы ничего не знаем. Здесь мы изложим принадлежащий Крейну [1] „действительный" аналог метода И. Неймана (п. 121), который охватывает все возможные расширения.

Пусть S — симметричный оператор, причем

$$S \geqslant cI.$$

Будем искать все его самосопряженные расширения A, такие, что

$$A \geqslant \gamma I,$$

где γ — заданная постоянная $\leqslant c$. Заменив S оператором $S - \gamma I$, мы сведем эту задачу к следующей:

Задан положительный симметричный оператор S; найти все его положительные самосопряженные расширения A.

Образуем, так же как в п. 122, оператор

$$B = (S - I)(S + I)^{-1};$$

как и раньше, такой оператор симметричен и ограничен,

$$(Bf, g) = (f, Bg), \quad \|Bf\| \leqslant \|f\|$$

для всех элементов f и g, принадлежащих области определения оператора B. Эта область, которую мы обозначим $\mathfrak{L}$, в рассматриваемом случае не совпадает, вообще говоря, со всем $\mathfrak{H}$ и даже не плотна в $\mathfrak{H}$. Если оператор S *замкнут*, что можно предположить, не нарушая общности, то B также замкнут и, в силу ограниченности, непрерывен; следовательно, $\mathfrak{L}$ должно быть замкнутым линейным множеством, иначе говоря, подпространством пространства $\mathfrak{H}$ (случайно могущим совпасть с $\mathfrak{H}$).

Ясно, что если

$$S' \supseteq S,$$

где S' — положительный симметричный оператор, то

$$B' \supseteq B,$$

где $B' = (S' - I)(S' + I)^{-1}$.

Обратно, если $\bar{B}$ — симметричный линейный оператор, определенный в некотором подпространстве $\mathfrak{L}' \supseteq \mathfrak{L}$ и имеющий норму

$\leqslant 1$, причем $\bar{B} \supseteq B$, то ему соответствует положительный симметричный оператор $S' \supseteq S$, а именно

$$S' = (I + \bar{B})(I - \bar{B})^{-1},$$

для которого

$$B' = \bar{B}.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно обнаружить, что существует $(I - \bar{B})^{-1}$, т. е. что из $(I - \bar{B}) f = 0$ следует $f = 0$. Но если $(I - \bar{B}) f = 0$, то

$$(f, (I - B) g) = (f, (I - \bar{B}) g) = ((I - \bar{B}) f, g) = 0$$

для всех элементов g области определения $\mathfrak{L}$ оператора B, т. е. f ортогоиален множеству значений оператора

$$I - B = I - (S - I)(S + I)^{-1} = [(S + I) - (S - I)](S + I)^{-1} = \\ = 2(S + I)^{-1}$$

и, следовательно, ортогонален области определения оператора $S + I$. Эта последняя плотна в $\mathfrak{H}$, поэтому $f = 0$.

Известно, что в том случае, когда оператор S' *самосопряжен*, B' определен *всюду* (см. п. 122). Обратно, если оператор B' определен всюду, то он самосопряжен, и тогда оператор

$$S' = (I + B')(I - B')^{-1} = -I + 2(I - B')^{-1}$$

также является самосопряженным [см. предложения а) и б) п. 119].

Поставленная нами задача сводится, таким образом, к следующей:

Найти всевозможные расширения оператора

$$B = (S - I)(S + I)^{-1},$$

всюду определенные, симметричные и имеющие нормы $\leqslant 1$.

Существование таких расширений может быть доказано не только для рассматриваемого оператора B, но и *для произвольного оператора B, определенного в некотором истинном подпространстве $\mathfrak{L}$ пространства $\mathfrak{H}$, если в $\mathfrak{L}$ оператор B симметричен и имеет норму* $\leqslant 1$.

Вот как это доказывается. Пусть f — произвольный элемент, принадлежащий $\mathfrak{L}$; проекции элемента Bf на подпространство $\mathfrak{L}$ и на ортогональное дополнение $\mathfrak{M}$ обозначим соответственно $B_0 f$ и $B_1 f$. Тем самым мы определим в $\mathfrak{L}$ операторы B_0 и B_1, такие, что

$$B = B_0 + B_1.$$

Теперь продолжим на все пространство $\mathfrak{H}$ сначала оператор B_0, а затем B_1.

Рассмотрим оператор B_0. Если f и g принадлежат $\mathfrak{L}$, то, очевидно,

$$(f, B_0 g) = (Bf, g). \tag{23}$$

В том случае, когда g не принадлежит $\mathfrak{L}$, это уравнение служит для *определения* элемента B_0g подпространства $\mathfrak{L}$. Действительно, его правая часть при фиксированном g и при переменном f, пробегающем $\mathfrak{L}$, представляет собой линейный функционал $F_g(f)$, удовлетворяющий условию

$$|F_g(f)| \leqslant \|Bf\| \|g\| \leqslant \|f\| \|g\|,$$

откуда вытекает, что

$$\|F_g\| \leqslant \|g\|.$$

Следовательно, существует вполне определенный элемент, который мы обозначим B_0g, удовлетворяющий уравнению (23) при всех f из $\mathfrak{L}$; при этом

$$\|B_0g\| = \|F_g\| \leqslant \|g\|. \tag{24}$$

Оператор B_0, продолженный таким образом на все пространство $\mathfrak{H}$, очевидно, остается линейным.

Теперь продолжим оператор B_1 так, чтобы все его значения принадлежали $\mathfrak{M}$ и чтобы выполнялось неравенство

$$\|B_0g\|^2 + \|B_1g\|^2 \leqslant \|g\|^2 \tag{25}$$

(для элементов g, принадлежащих подпространству $\mathfrak{L}$, это неравенство следует прямо из определения операторов B_0 и B_1).

Рассмотрим симметричную билинейную форму

$$[f, g] = (f, g) - (B_0f, B_0g).$$

В силу (24),

$$[f, f] = \|f\|^2 - \|B_0f\|^2 \geqslant 0.$$

Положив

$$[[f]] = [f, f]^{1/2} \geqslant 0,$$

мы сможем придать неравенству (25) вид

$$\|B_1g\| \leqslant [[g]]. \tag{26}$$

Функции $[f, g]$ и $[[f]]$ обладают всеми свойствами скалярного произведения и нормы, за исключением того, что $[[f]]$ может равняться нулю при некоторых $f \neq 0$. Несмотря на это, справедливы неравенства Шварца и Минковского

$$|[f, g]| \leqslant [[f]]\,[[g]], \quad [[f+g]] \leqslant [[f]] + [[g]]$$

(вывод этих неравенств см. в п. 83). Отсюда, в частности, следует, что элементы f, для которых $[[f]] = 0$, образуют линейное множество $\mathfrak{D}$, к тому же замкнутое, так как оператор B_0 непрерывен. Введем в $\mathfrak{H}$ новое понятие равенства, положив

$$f_1 \equiv f_2, \quad \text{если } [[f_1 - f_2]] = 0;$$

иначе говоря, мы заменим $\mathfrak{H}$ факторпространством $\mathfrak{H}/\mathfrak{D}$. Мы получим, таким образом, новое линейное пространство, вообще говоря неполное, со скалярным произведением $[f, g]$ и нормой $[[f]]$. Пополнив его, если нужно, некоторыми идеальными элементами (см. п. 124), мы получим окончательно новое гильбертово пространство, которое обозначим $\overline{\mathfrak{H}}$.

Заметим, что если элементы g_1 и g_2 из $\mathfrak{L}$ таковы, что

$$g_1 \equiv g_2,$$

то, в силу неравенства (26) (если в нем положить $g = g_1 - g_2$),

$$B_1 g_1 = B_1 g_2.$$

Это позволяет нам рассматривать B_1 как оператор, отображающий некоторое линейное подмножество $\overline{\mathfrak{L}}$ пространства $\overline{\mathfrak{H}}$ в подпространство $\mathfrak{M}$ пространства $\mathfrak{H}$; при этом $\overline{\mathfrak{L}}$ означает множество элементов, возникших из элементов множества $\mathfrak{L}$. В силу (26), оператор B_1 может быть продолжен по непрерывности на подпространство $[\overline{\mathfrak{L}}]$ пространства $\overline{\mathfrak{H}}$, замыкание множества $\overline{\mathfrak{L}}$ в смысле метрики $\overline{\mathfrak{H}}$. При этом значения B_1 будут по-прежнему принадлежать $\mathfrak{M}$ и сохранится неравенство (26).

Пусть P — линейный оператор в $\overline{\mathfrak{H}}$, проектирующий $\overline{\mathfrak{H}}$ на $[\overline{\mathfrak{L}}]$; продолжим оператор B_1 на все пространство $\overline{\mathfrak{H}}$, положив

$$B_1 u = B_1 P u;$$

при этом B_1 окажется линейным оператором, отображающим все $\overline{\mathfrak{H}}$ в подпространство $\mathfrak{M}$ пространства $\mathfrak{H}$; кроме того, будет выполняться неравенство

$$\| B_1 u \| = \| B_1 P u \| \leqslant [[Pu]] \leqslant [[u]]. \tag{27}$$

Оператор B_1, определенный в $\overline{\mathfrak{H}}$, порождает некоторый линейный оператор в исходном пространстве $\mathfrak{H}$; в самом деле, достаточно положить

$$B_1 f = B_1 u,$$

где u — произвольный „представитель“ элемента f пространства $\overline{\mathfrak{H}}$. При этом, в силу (27),

$$\| B_1 f \| \leqslant [[f]]^2 = \| f \|^2 - \| B_0 f \|^2,$$

т. е. сохраняется неравенство (25).

Так как всегда $B_0 f$ принадлежит $\mathfrak{L}$, а $B_1 f$ принадлежит $\mathfrak{M}$, то $(B_0 f, B_1 f) = 0$ и, следовательно,

$$\| B_0 f + B_1 f \|^2 = \| B_0 f \|^2 + \| B_1 f \|^2 \leqslant \| f \|^2.$$

Итак, сумма

$$C = B_0 + B_1,$$

где B_0 и B_1 продолжены указанным образом, представляет собой линейный оператор, всюду определенный и служащий расшире-

нием оператора B, причем
$$\|C\| \leqslant 1.$$
Впрочем, оператор C, вообще говоря, не симметричен. Сопряженный оператор C^* также является расширением B, так как для всех f из $\mathfrak{L}$ и всех g из $\mathfrak{H}$
$$(C^*f, g) = (f, Cg) = (f, B_0g + B_1g) = (f, B_0g) = (Bf, g),$$
откуда следует, что
$$C^*f = Bf.$$
Симметричный оператор
$$\tilde{B} = \frac{1}{2}(C + C^*)$$
тоже является расширением B, и так как $\|C^*\| = \|C\| \leqslant 1$, то
$$\|\tilde{B}\| \leqslant 1.$$

Итак, существование расширения, имеющего требуемый вид, установлено. Вместе с тем заново доказано существование положительного самосопряженного расширения $\tilde{A}$ для любого положительного симметричного оператора S.

Однако расширение $\tilde{B}$, всюду определенное, симметричное и обладающее нормой $\leqslant 1$, вообще говоря, не единственно. Крейн показал, что среди таких расширений $\tilde{B}$ существуют экстремальные $\tilde{B}_{\min}$ и $\tilde{B}_{\max}$ (причем $\tilde{B}_{\min} \leqslant \tilde{B}_{\max}$), обладающие тем свойством, что
$$\tilde{B}_{\min} \leqslant \tilde{B} \leqslant \tilde{B}_{\max},$$
каково бы ни было расширение $\tilde{B}$ указанного вида. Доказательство этого предложения, а также более глубокое исследование различных других расширений читатель найдет в статье Крейна [1].

Крейн заметил, что этим же методом можно доказать следующую теорему Кэлкина[1]):

Теорема. *Всякий симметричный оператор S, обладающий тем свойством, что*
$$\|Sf\| \geqslant \|f\|$$
для всех элементов f из области определения S, может быть продолжен до самосопряженного оператора, удовлетворяющего тому же условию.

Мы имеем право предположить, что оператор S замкнут. Его обратный $B = S^{-1}$ определен тогда на некотором подпространстве $\mathfrak{L}$

---

[1]) Кэлкин [1]. См. также заметку Красносельского [1], в которой дается определение индексов дефекта для произвольного замкнутого линейного оператора.

пространства $\mathfrak{H}$ и

$$(Bf,\ g)=(f,\ Bg),\qquad \|Bf\|\leqslant\|f\|.$$

Как мы только что видели, B имеет расширеиие $\tilde{B}$, являющееся всюду определеиным симметричным оператором с нормой $\leqslant 1$; при этом $A=\tilde{B}^{-1}$, если только он существует, будет искомым расширением. Существоваиие же его обеспечеио тем, что если $\tilde{B}f=0$, то f ортогонален всем элементам вида $\tilde{B}g$ и, в частиости, всем Bg, т. е. f ортогонален области определения оператора S, а так как эта последняя плотиа в $\mathfrak{H}$, то $f=0$.

Эта теорема непосредственно распростраияется иа симметричные операторы S, для которых иекоторый *конечный интервал* $(a,\ b)$ *является лакуной их спектра*, т. е. на те S, которые удовлетворяют условию

$$\left\|\left(S-\frac{a+b}{2}\,I\right)f\right\|\geqslant\frac{b-a}{2}\|f\|.$$