Глава IX

САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ОПЕРАТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, СПЕКТРЫ, ВОЗМУЩЕНИЯ

§ 1. ОПЕРАТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

126. Ограниченные функции. Если известно спектральное семейство $\{E_\lambda\}$ самосопряженного оператора A, ограниченного или неограниченного, то „функции" оператора A могут быть определены посредством формулы (см. п. 107)[1])

$$(u(A)f,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\,d(E_\lambda f,\ g). \qquad (1)$$

Предположим сначала, что функция $u(\lambda)$ действительна, ограничена и суммируема на всей оси λ в смысле Стильтьеса — Лебега относительно всех функций с ограниченным изменением вида $(E_\lambda f,\ g)$ или, что, в силу соотношения

$$(E_\lambda f,\ g)=\left\|E_\lambda\frac{f+g}{2}\right\|^2-\left\|E_\lambda\frac{f-g}{2}\right\|^2+i\left\|E_\lambda\frac{f+ig}{2}\right\|^2-i\left\|E_\lambda\frac{f-ig}{2}\right\|^2,$$

эквивалентно, суммируема относительно любой неубывающей действительной функции вида

$$(E_\lambda f,\ f)=\|E_\lambda f\|^2,$$

где f — произвольный элемент пространства $\mathfrak{H}$.

При фиксированном f правая часть формулы (1) представляет собой функцию, комплексно сопряженную с некоторым аддитивным и однородным функционалом $L_f(g)$; покажем, что этот функционал, кроме того, ограничен. В самом деле, если M — верхняя грань $|u(\lambda)|$, то, очевидно,

$$|L_f(g)|\leqslant M\times\textit{полное изменение}\ (E_\lambda f,\ g).$$

Но полное изменение функции $(E_\lambda f,\ g)$ не превосходит $\|f\|\|g\|$. Для того чтобы доказать это, возьмем произвольное разбиение оси λ конечным числом точек

$$-\infty=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n=\infty.$$

[1]) Это определение „функций" самосопряженного оператора принадлежит И. Нейману [5] и Стоуну [2] (гл. VI). Лорч ([1], [2]) в своем определении $u(A)$ не пользуется билинейной формой, входящей в правую часть формулы (1); он строит „меру", значения которой представляют собой проекционные операторы (или, что сводится к тому же, подпространства), и определяет $u(A)$ как интеграл типа Стильтьеса — Лебега по этой „мере". Изложение Лорча охватывает случай более общих пространств, а именно рефлексивных банаховых (см. п. 87).

Так как разности $E(\delta_k)=E_{\lambda_k}-E_{\lambda_{k-1}}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ являются проекционными операторами, попарно ортогональными и в сумме дающими I, то

$$\sum_1^n |(E_{\lambda_k}f, g)-(E_{\lambda_{k-1}}f, g)| = \sum_1^n (E(\delta_k)f, g) = \sum_1^n |(E(\delta_k)f, E(\delta_k)g)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_1^n \|E(\delta_k)f\| \|E(\delta_k)g\| \leqslant \left\{\sum_1^n \|E(\delta_k)f\|^2 \sum_1^n \|E(\delta_k)g\|^2\right\}^{1/2} = \|f\| \|g\|;$$

здесь мы воспользовались сначала неравенством Шварца, а затем неравенством Коши

$$\sum a_k b_k \leqslant \{\sum a_k^2 \cdot \sum b_k^2\}^{1/2}.$$

Итак,

$$|L_f(g)| \leqslant M \|f\| \|g\|,$$

т. е. $L_f(g)$ представляет собой линейный функционал с нормой

$$\|L_f\| \leqslant M \|f\|.$$

Следовательно (см. п 30), существует такой элемент f^*, однозначно определенный, что

$$L_f(g) = (g, f^*).$$

Мы показали, что правая часть формулы (1) равна (f^*, g). Положим теперь, *по определению*,

$$u(A)f = f^*.$$

Оператор $u(A)$, очевидно, линейный, и так как

$$\|f^*\|^2 = (f^*, f^*) = L_f(f^*) \leqslant M \|f\| \|f^*\|,$$

то $\|f^*\| \leqslant M \|f\|$, т. е. его норма $\|u(A)\| \leqslant M$.

Прямо из этого определения следует, что если $u(\lambda)$ тождественно равна постоянной c, то $u(A)=cI$, и что соответствие между функциями $u(\lambda)$ и операторами $u(A)$ *однородно* и *аддитивно*:

$$(cu)(A) = cu(A), \quad (u_1+u_2)(A) = u_1(A)+u_2(A).$$

Оно, кроме того, *мультипликативно*. В самом деле, если

$$u(\lambda) = u_1(\lambda)\, u_2(\lambda),$$

то, так как $(E_\mu f, E_\lambda g) = (E_\lambda f, g)$ при $\mu \geqslant \lambda$,

$$(u_1(A)\, u_2(A) f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\lambda)\, d(E_\lambda u_2(A) f, g) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\lambda)\, d(u_2(A) f, E_\lambda g) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\lambda)\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} u_2(\mu)\, d_\mu (E_\mu f, E_\lambda g) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\lambda)\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} u_2(\mu)\, d_\mu (E_\mu f, g) = \int_{\infty}^{\infty} u_1(\lambda)\, u_2(\lambda)\, d_\lambda (E_\lambda f, g) =$$
$$= (u(A) f, g),$$

следовательно,

$$u(A) = u_1(A)\, u_2(A).$$

Мы видим, что все функции оператора A, получаемые таким образом, *перестановочны* между собой.

Оператор $u(A)$ *симметричен*:

$$(u(A)f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\, d(E_\lambda f,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\overline{u(\lambda)}\, d(E_\lambda g,\ f)} =$$

$$= \overline{(\overline{u}(A)\, g,\ f)} = (f,\ \overline{u}(A)\, g).$$

Если $u(\lambda) \geqslant 0$, то

$$(u(A)f,\ f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\, d(E_\lambda f,\ f) \geqslant 0,$$

т. е. наше соответствие *положительного типа*.

Мультипликативное свойство влечет за собой соотношение

$$\| u(A) f \|^2 = ([u(A)]^2 f,\ f) = \int_{-\infty}^{\infty} [u(\lambda)]^2\, d(E_\lambda f,\ f). \tag{2}$$

Из (2), в свою очередь, следует, что установленное соответствие *непрерывно* в том смысле, что если функции $u_n(\lambda)$ ограничены в совокупности и сходятся к $u(\lambda)$, то последовательность $\{u_n(A)\}$ сходится к $u(A)$. Для доказательства достаточно заменить в (2) функцию u разностью $u_n - u$ и воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. При этом, очевидно, достаточно потребовать, чтобы последовательность $\{u_n(\lambda)\}$ сходилась почти всюду относительно всех функций $(E_\lambda f,\ f) = \| E_\lambda f \|^2$ или, говоря короче, сходилась *почти всюду относительно* $\{E_\lambda\}$. Из (2) следует также, что в том случае, когда $u_n(\lambda)$ сходятся равномерно в бесконечном интервале $-\infty < \lambda < \infty$, операторы $u_n(A)$ сходятся даже по норме.

Важное свойство операторов $u(A)$ состоит в том, что *они перестановочны со всеми ограниченными операторами B, перестановочными с A*, в частности со всеми ограниченными симметричными операторами, перестановочными с A, т. е. $u(A) \smile\smile A$.

В самом деле, в этом случае B перестановочен с E_λ (см. п. 120) и

$$(u(A)Bf,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\, d(E_\lambda Bf,\ g) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\, d(E_\lambda f,\ B^* g) =$$

$$= (u(A) f,\ B^* g) = (Bu(A) f,\ g).$$

Вскоре мы увидим, что это свойство даже характеризует „функции" оператора A. Но прежде освободимся от условия, что функции $u(\lambda)$ ограничены.

127. Неограниченные функции. Определения. Мы распространим соответствие между функциями и операторами на функции, *измеримые, конечные и определенные почти всюду по отношению к спектральному семейству* $\{E_\lambda\}$, т. е. по отношению ко всем функциям $(E_\lambda f, f) = \|E_\lambda f\|^2$.

Пусть $u(\lambda)$ — произвольная функция такого вида; предположим, кроме того, что все ее значения действительны. Пусть, далее, $e_k(\lambda)$ — характеристические функции множеств, на которых

$$k-1 \leqslant u(\lambda) < k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Для функций $e_k(\lambda)$ и $u_k(\lambda) = u(\lambda) e_k(\lambda)$, ограниченных и измеримых, а следовательно, и суммируемых по отношению к $\{E_\lambda\}$, операторы $e_k(A)$ и $u_k(A)$ уже определены; при этом так как $e_k^2(\lambda) = e_k(\lambda)$, $e_k(\lambda) e_h(\lambda) = 0$ $(k \neq h)$ и

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e_k(\lambda) = 1,$$

то $[e_k(A)]^2 = e_k(A)$, $e_k(A) e_h(A) = O$ $(k \neq h)$ и

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e_k(A) = I,$$

т. е. $e_k(A)$ представляют собой проекционные операторы, попарно ортогональные и в сумме дающие I. Пусть $e_k(A)$ проектирует $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{L}_k$; так как $u_k(A)$ перестановочно с $e_k(A)$, то $u_k(A)$ действует в $\mathfrak{L}_k$ как ограниченный симметричный оператор.

Теперь мы *определим* $u(A)$ как такой самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, который в каждом $\mathfrak{L}_k$ сводится к $u_k(A)$ (см. лемму п. 120); этим требованием $u(A)$ определяется однозначно.

Согласно такому определению, *область* оператора $u(A)$ состоит из тех элементов $f = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} f_k$ (где f_k — составляющие элемента f в подпространстве $\mathfrak{L}_k$, $f_k = e_k(A) f$), для которых сходится ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \|u_k(A) f_k\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \|u_k(A) f\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_k^2(\lambda)\, d(E_\lambda f, f);$$

в силу равенства

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k^2(\lambda) = u^2(\lambda)$$

и теорем Лебега и Б. Леви, сходимость указанного ряда эквивалентна сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(\lambda)\, d(E_\lambda f, f);$$

значение этого интеграла тогда, когда он сходится, равно $\|u(A)f\|^2$. Для таких f, также согласно определению,

$$u(A)f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(A) f_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(A) f$$

и, следовательно,

$$(u(A)f, g) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_k(\lambda)\, d(E_\lambda f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda)\, d(E_\lambda f, g),$$

каков бы ни был элемент g из $\mathfrak{H}$, принадлежащий или не принадлежащий $\mathfrak{D}_{u(A)}$. Применение теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла здесь законно, так как функция $u(\lambda)$ суммируема относительно неопределенного полного изменения $\rho(\lambda)$ функции $(E_\lambda f, g)$. Действительно, мы уже показали в предыдущем пункте, что

$$\rho(\infty) - \rho(-\infty) \leqslant \|f\|\|g\|;$$

точно так же доказывается неравенство

$$\rho(b) - \rho(a) \leqslant \|E(\delta)f\|\|E(\delta)g\|,$$

где $E(\delta) = E_b - E_a$; следовательно, если $\gamma(\lambda)$ — ступенчатая функция, принимающая постоянные значения c_k на интервалах $\delta_k = (a_k < \lambda \leqslant b_k)$, то, в силу неравенства Коши,

$$\begin{aligned}\sum_k |c_k|[\rho(b_k) - \rho(a_k)] &\leqslant \sum_k |c_k| \|E(\delta_k)f\| \|E(\delta_k)g\| \leqslant \\ &\leqslant \left\{\sum_k c_k^2 \|E(\delta_k)f\|^2 \cdot \sum_k \|E(\delta_k)g\|^2\right\}^{1/2} = \\ &= \left\{\sum_k c_k^2 (\|E_{b_k}f\|^2 - \|E_{a_k}f\|^2)\right\}^{1/2} \|g\|,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\lambda)|\, d\rho(\lambda) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^2(\lambda)\, d\|E_\lambda f\|^2 \cdot \|g\|,$$

и это неравенство распространяется на произвольные функции с суммируемым квадратом по отношению к $\|E_\lambda f\|^2$; в частности, оно справедливо и для $u(\lambda)$.

Легко показать, что из $u_k(A) \smile\!\smile A$ вытекает соотношение

$$u(A) \smile\!\smile A.$$

До сих пор мы рассматривали только действительные функции. В случае функции $w(\lambda)$, принимающей *комплексные* значения

$$w(\lambda) = u(\lambda) + iv(\lambda),$$

где $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ — действительная и мнимая части функции $w(\lambda)$, мы полагаем, *по определению*,

$$w(A)=u(A)+iv(A).$$

Область оператора $w(A)$ является, таким образом, пересечением областей операторов $u(A)$ и $v(A)$. Она состоит из тех элементов f, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(\lambda)\,d(E_\lambda f,\ f)+\int_{-\infty}^{\infty} v^2(\lambda)\,d(E_\lambda f,\ f)<\infty. \tag{3}$$

Для таких f и для произвольных g из $\mathfrak{H}$

$$(w(A)f,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda)\,d(E_\lambda f,\ g). \tag{4}$$

Так как $u^2(\lambda)+v^2(\lambda)=|w(\lambda)|^2$, то область оператора $w(A)$ совпадает с областью самосопряженного оператора $|w|(A)$, соответствующего неотрицательной функции $|w(\lambda)|$; следовательио, область оператора $w(A)$ всюду плотна в $\mathfrak{H}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\|w(A)f\|^2&=\|u(A)f+iv(A)f\|^2=\\&=\|u(A)f\|^2+\|v(A)f\|^2+i\,[(v(A)f,\ u(A)f)-(u(A)f,\ v(A)f)]=\\&=\|u(A)f\|^2+\|v(A)f\|^2-2\,\mathrm{Im}\,(v(A)f,\ u(A)f)=\\&\qquad=\|u(A)f\|^2+\|v(A)f\|^2,\end{aligned}$$

так как скалярное произведение $(v(A)f,\ u(A)f)$, будучи равным

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\,d(E_\lambda f,\ u(A)f)=\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\,d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} u(\mu)\,d(E_\lambda f,\ E_\mu f)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} v(\lambda)\,u(\lambda)\,d(E_\lambda f,\ f),$$

принимает действительные значения. Итак,

$$\|w(A)f\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}[u^2(\lambda)+v^2(\lambda)]\,d(E_\lambda f,\ f)=\int_{-\infty}^{\infty}|w(\lambda)|^2\,d(E_\lambda f,\ f). \tag{5}$$

128. Неограниченные функции. Правила действий. Ясно, что $w(A)\smile\smile A$ и что соответствие между функциями и операторами, установленное для общего случая в предыдущем пункте, по-прежнему *однородно* и *положительным функциям* соответствуют *положительные операторы*. Кроме того, это соответствие *аддитивно* и *мультипликативно* в некотором обобщенном смысле, который сейчас будет пояснен.

Вместо аддитивности в обычном смысле теперь имеет место соотношение

$$(w_1+w_2)(A)\supseteq w_1(A)+w_2(A), \tag{6}$$

которое вытекает, с одной стороны, из формулы (4), а с другой стороны, из того факта, что сумма двух функций с суммируемыми относительно $(E_\lambda f, f)$ квадратами также является функцией, квадрат которой суммируем относительно $(E_\lambda f, f)$. Область определения правой части (6) равна пересечению области определения левой части с областью оператора $w_1(A)$ [или с областью оператора $w_2(A)$], и, следовательно, равенство в соотношении (6) имеет место тогда и только тогда, когда область оператора $(w_1+w_2)(A)$ содержится в области оператора $w_1(A)$ [или $w_2(A)$], что выполняется, в частности, в том случае, когда $w_1(\lambda)$ [или $w_2(\lambda)$] ограничена почти всюду относительно $\{E_\lambda\}$.

Вместо обычной *мультипликативности* выполняется соотношение

$$(w_1 w_2)(A) \supseteq w_1(A)\, w_2(A). \tag{7}$$

Для доказательства рассмотрим какой-нибудь элемент f, принадлежащий области определения оператора $w_2(A)$. В силу (5),

$$\|E_\lambda w_2(A) f\|^2 = \|w_2(A) E_\lambda f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |w_2(\mu)|^2 d_\mu \|E_\mu E_\lambda f\|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda} |w_2(\mu)|^2 d\|E_\mu f\|^2,$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)|^2 d\|E_\lambda w_2(A) f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |w_1(\lambda)\, w_2(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f\|^2.$$

Последнее равенство следует понимать в несколько более общем смысле: интегралы в его правой и левой частях могут обращаться в бесконечность только одновременно. Это означает, что элемент f из области определения оператора $w_2(A)$ либо принадлежит областям определения как $w_1(A)\,w_2(A)$, так и $(w_1 w_2)(A)$, либо не принадлежит ни той, ни другой. Иначе говоря, область определения произведения $w_1(A)\,w_2(A)$ равна пересечению областей операторов $w_2(A)$ и $(w_1 w_2)(A)$. Если f принадлежит этой области, то при произвольном g

$$(w_1(A)\, w_2(A) f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\lambda)\, w_2(\lambda)\, d(E_\lambda f, g);$$

это равенство получается уже известным приемом (см. п. 126) с помощью формулы (4). При этом

$$w_1(A)\, w_2(A) f = (w_1 w_2)(A) f,$$

и соотношение (7), таким образом, доказано.

Мы показали, что $w_1(A)\,w_2(A)$ *совпадает с оператором* $(w_1 w_2)(A)$, *если этот последний рассматривается только на пере-*

сечении его области определения с областью определения оператора $w_2(A)$. Следовательно, для того чтобы (7) обратилось в равенство, необходимо и достаточно, чтобы область оператора $w_2(A)$ содержала область определения оператора $(w_1 w_2)(A)$.

В частности, в соотношении (7) имеет место равенство, если $w_2(\lambda) = w_1^n(\lambda)$, где n — целое положительное число, так как если $|w_1^{n+1}(\lambda)|^2$ имеет сходящийся интеграл по $(E_\lambda f, f)$, то это же справедливо и для $|w_1^n(\lambda)|^2$. Применив это замечание последовательно к $n = 1, 2, \ldots$, мы получим равенства

$$(w^n)(A) = [w(A)]^n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

В частности,

$$A^n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \, dE_\lambda,$$

откуда следует, что *степени* A^2, A^3, ... *самосопряженного оператора* A *также представляют собой самосопряженные операторы.*

Равенство (8) распространяется и на целые отрицательные показатели. Достаточно рассмотреть случай $n = -1$. Допустим, что функция $w(\lambda)$ отлична от нуля почти всюду относительно $\{E_\lambda\}$. Тогда функция $w^{-1}(\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)}$ также будет принадлежать рассматриваемому классу; соотношение

$$w^{-1}(\lambda)\, w(\lambda) = w(\lambda)\, w^{-1}(\lambda) = 1$$

будет выполняться почти всюду относительно $\{E_\lambda\}$, а отсюда будет следовать, что операторы $w^{-1}(A)\, w(A)$ и $w(A)\, w^{-1}(A)$ совпадают с тождественным оператором I соответственно на области оператора $w(A)$ и на области оператора $w^{-1}(A)$. Это означает, что для $w(A)$ существует обратный оператор $[w(A)]^{-1}$, равный $w^{-1}(A)$.

Обратно, если существует $[w(A)]^{-1}$, то существует и $w^{-1}(A)$. В самом деле, в таком случае множество нулей функции $w(\lambda)$ имеет меру нуль по отношению к каждой функции $(E_\lambda f, f)$, так как если $e(\lambda)$ — характеристическая функция этого множества, то $w(\lambda)\, e(\lambda) = 0$; отсюда следует, что $w(A)\, e(A) = O$ и

$$e(A) = [w(A)]^{-1}\, w(A)\, e(A) = O;$$

таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^2(\lambda)\, d(E_\lambda f, f) = \|e(A) f\|^2 = 0.$$

Резюмируя, можно сказать, что

$$[w(A)]^{-1} = w^{-1}(A),$$

причем обе части этого равенства имеют смысл одновременно.

В частности,

$$(A-zI)^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda-z}\,dE_\lambda,$$

если только одна из частей этого равенства имеет смысл.

При каких условиях оператор $(A-zI)^{-1}$ или, в общем случае, оператор $w(A)$ *ограничен*? Достаточное условие вытекает из формулы (5): $w(A)$ ограничен, если функция $w(\lambda)$ ограничена почти всюду относительно $\{E_\lambda\}$. В самом деле, если $|w(\lambda)|\leqslant M$ почти всюду относительно $\{E_\lambda\}$, то

$$\|w(A)f\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|w(\lambda)|^2 d(E_\lambda f,\ f)\leqslant M^2\int_{-\infty}^{\infty}d(E_\lambda f,\ f)=M^2\|f\|^2,$$

откуда следует, что

$$\|w(A)\|\leqslant M. \tag{9}$$

Но это условие вместе с тем и необходимо. Действительно, если выполнено условие (9), то, в силу (8),

$$\|w^n(A)\|=\|[w(A)]^n\|\leqslant\|w(A)\|^n\leqslant M^n;$$

поэтому, если e — множество точек, в которых $|w(\lambda)|>M$, то

$$\int_e\left|\frac{w(\lambda)}{M}\right|^{2n}d(E_\lambda f,\ f)\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{w(\lambda)}{M}\right|^{2n}d(E_\lambda f,\ f)=$$

$$=\frac{1}{M^{2n}}\|w^n(A)f\|^2\leqslant\|f\|^2;$$

так как на множестве e функция $\left|\frac{w(\lambda)}{M}\right|^{2n}$ стремится к бесконечности, то из полученного неравенства вытекает, что e имеет меру нуль относительно любой функции $(E_\lambda f,\ f)$.

Из доказанного следует такое предложение:

Для того чтобы оператор $w(A)$ был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы функция $w(\lambda)$ была ограничена почти всюду относительно $\{E_\lambda\}$; при этом условии

$$\|w(A)\|=\operatorname{vrai\,max}|w(\lambda)|\quad (\textit{относительно } \{E_\lambda\}). \tag{10}$$

Перейдем к изучению *сопряженных* операторов. В том случае, когда функция $w(\lambda)$ ограничена, очевидно,

$$[w(A)]^*=[u(A)+iv(A)]^*=u(A)-iv(A)=\overline{w}(A),$$

где $\overline{w}(A)$ означает оператор, соответствующий комплексно сопряженной функции $\overline{w(\lambda)}$. В общем случае представим $w(\lambda)$ в виде

$$w(\lambda)=r(\lambda)\,u(\lambda),$$

где

$$r(\lambda)=|w(\lambda)|\geqslant 0\quad \text{и}\quad |u(\lambda)|=1.$$

Так как операторы $w(A)$ и $r(A)$ имеют одну и ту же область определения, то

$$w(A)=u(A)\,r(A);$$

оператор $u(A)$ ограничен, а $r(A)$ самосопряжен, поэтому

$$[w(A)]^*=[u(A)\,r(A)]^*=[r(A)]^*\,[u(A)]^*=r(A)\,\bar{u}(A)=\bar{w}(A).$$

Итак, $[w(A)]^*=\bar{w}(A)$ *или* $w(A)=[\bar{w}(A)]^*$, *откуда, в частности, следует, что все операторы вида* $w(A)$ *замкнуты*.

Далее,

$$[w(A)]^*\,w(A)=\bar{w}(A)\,w(A)\subseteq(\bar{w}w)(A)\supseteq w(A)\,\bar{w}(A)=w(A)\,[w(A)]^*,$$

причем все операторы, входящие в эти соотношения, самосопряженные, крайние — согласно п. 119, средний — потому, что функция $\bar{w}w=w\bar{w}=|w|^2$ действительна. Следовательно,

$$[w(A)]^*\,w(A)=(|w|^2)(A)=w(A)\,[w(A)]^*.$$

Ограниченные операторы T, такие, что

$$T^*T=TT^*, \tag{11}$$

были названы *нормальными* (см. п. 110). Мы сохраним это наименование и для неограниченных операторов, удовлетворяющих условию (11), но только добавим требование, чтобы T были, кроме того, *замкнутыми*. Все самосопряженные операторы, очевидно, нормальны.

Согласно последней из выведенных нами формул, *все операторы* $w(A)$ *нормальны*.

В частности, $w(A)$ — *самосопряженный* оператор, если значения функции $w(\lambda)$ действительны; оператор $w(A)$ — *унитарный*, если $|w(\lambda)|=1$ почти всюду относительно $\{E_\lambda\}$. В самом деле, последнее условие можно записать в виде $w(\lambda)\,\bar{w}(\lambda)=1$, откуда

$$[w(A)]^*\,w(A)=w(A)\,[w(A)]^*=I.$$

Обратимся теперь к рассмотрению *сложных* функций. Для этого нам прежде всего нужно найти спектральное семейство оператора

$$B=u(A),$$

соответствующего действительной функции $u(\lambda)$. Покажем, что это семейство образовано операторами $F_\mu=e_\mu(A)$, где $e_\mu(\lambda)$ означает характеристическую функцию того множества, на котором $u(\lambda)$ не превосходит числа μ. Свойства F_μ, характеризующие спектральное семейство, проверяются без труда; остается еще показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu^2\,d\,(e_\mu(A)f,\ f)=\int_{-\infty}^{\infty}u^2(\lambda)\,d\,(E_\lambda f,\ f) \tag{12}$$

для элементов f области определения оператора B и что для этих f

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mu \, d(e_\mu(A) f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\lambda) \, d(E_\lambda f, f). \tag{13}$$

В самом деле, эти соотношения означают, что область оператора B содержится в области оператора

$$B' = \int_{-\infty}^{\infty} \mu \, de_\mu(A)$$

и что $(B'f, f) = (Bf, f)$, когда f принадлежит области оператора B. Отсюда следует, что $(B'f_1, f_2) = (Bf_1, f_2)$ для любых двух элементов f_1 и f_2 из области оператора B, т. е. $B' \supseteq B$. Так как операторы B и B' — самосопряженные, а следовательно, максимальные симметричные, то $B' = B$. Но

$$(e_\mu(A) f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} e_\mu(\lambda) \, d(E_\lambda f, f),$$

поэтому требуемые равенства (12) и (13) вытекают из общей теоремы об интегралах Стильтьеса — Лебега, доказанной в конце п. 58.

Возьмем теперь какую-нибудь функцию $v(\lambda)$, для которой

$$v(B) = v(u(A))$$

имеет смысл. Согласно теореме, на которую мы только что ссылались, сложная функция $w(\lambda) = v(u(\lambda))$ измерима относительно $\{E_\lambda\}$; при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |v(\mu)|^2 \, d(F_\mu f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} |w(\lambda)|^2 \, d(E_\lambda f, f)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(\mu) \, d(F_\mu f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\lambda) \, d(E_\lambda f, f).$$

Таким образом, доказано следующее предложение:

Пусть $u(\lambda)$ — действительная функция, измеримая и почти всюду конечная относительно спектрального семейства $\{E_\lambda\}$ самосопряженного оператора A; пусть, далее, $v(\mu)$ — действительная или комплексная функция, измеримая и почти всюду конечная относительно спектрального семейства $\{F_\mu\}$ самосопряженного оператора $B = u(A)$. Тогда сложная функция $w(\lambda) = v(u(\lambda))$ также измерима и почти всюду конечна относительно $\{E_\lambda\}$ и

$$w(A) = v(B) = v(u(A)). \tag{14}$$

129. Характеристическое свойство функций самосопряженного оператора. Мы видели, что функция $w(A)$ самосопряженного оператора представляет собой замкнутый линейный оператор с областью определения, плотной в $\mathfrak{H}$, и обладающий тем свойством, что

$$w(A)\smile\smile A.$$

Эти свойства, по крайней мере в случае сепарабельного $\mathfrak{H}$, характеризуют функции оператора A. Справедлива следующая

Теорема[1]). *Всякий замкнутый линейный оператор T с областью определения, плотной в сепарабельном пространстве $\mathfrak{H}$, и обладающий тем свойством, что*

$$T\smile\smile A,$$

представляет собой (действительную или комплексную) функцию оператора A.

Отсюда следует, что если стремиться сохранить эти достаточно естественные свойства, то понятие функции оператора оказывается предельно общим.

Оператор A можно считать *ограниченным*; действительно, в противном случае мы взяли бы вместо A ограниченный оператор, например $A' = \operatorname{arctg} A$; при этом, в силу (14), если $T = w(A')$, то $T = v(A)$, где $v(\lambda) = w(\operatorname{arctg}\lambda)$.

Нам понадобится следующая

Лемма. *Для всякого элемента f_0 из области определения оператора T можно указать такую функцию $F(\lambda)$, конечную и B-измеримую, что $F(A)f_0 = Tf_0$.*

Рассмотрим подпространство $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(f_0)$, порожденное элементами

$$f_0,\ Af_0,\ A^2f_0,\ \ldots,\ A^nf_0,\ \ldots .$$

Оператор A, очевидно, отображает $\mathfrak{L}$ само в себя. Если L — проекционный оператор, соответствующий подпространству $\mathfrak{L}$, то $LAL = AL$ и, следовательно, $LA = (AL)^* = (LAL)^* = LAL$, т. е. $L\smile A$. Отсюда, согласно нашему предположению, вытекает, что $L\smile T$; в частности, $Tf_0 = TLf_0 = LTf_0$, а это означает, что Tf_0 принадлежит подпространству $\mathfrak{L}$. Следовательно, существует последовательность многочленов $\{P_m(\lambda)\}$, такая, что

$$P_m(A)f_0 \to Tf_0.$$

---

[1]) Это предложение, хотя не высказанное явно, содержится в теореме 6 статьи [4] И. Неймана и в теореме 5 его же статьи [6]. Оно было явно сформулировано и доказано Риссом [17]. Оба эти доказательства относятся к случаю ограниченных A и T. Мнмура [1] обобщил метод Рисса на случай неограниченных A и T. Доказательство Рисса и Мимура упростил С.-Надь [1] (стр. 63—65); это упрощенное доказательство здесь и приведено. См. также Накаио [2], [3].

Так как

$$\|[P_n(A)-P_m(A)]f_0\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|P_n(\lambda)-P_m(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f_0\|^2\longrightarrow 0$$

при m, $n\longrightarrow\infty$, то последовательность $\{P_n(\lambda)\}$ удовлетворяет критерию Коши в пространстве L^2 функций с квадратом, суммируемым относительно $\|E_\lambda f_0\|^2$. В силу теоремы Рисса—Фишера, существует элемент $F(\lambda)$ пространства L^2, такой, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|P_m(\lambda)-F(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f_0\|^2\longrightarrow 0. \tag{15}$$

Так как значения $F(\lambda)$ определены лишь с точностью до множества меры нуль (по отношению к неубывающей функции $\|E_\lambda f_0\|^2$), то $F(\lambda)$ можно задать так, чтобы она была B-измерима [см. п. 43, где было показано, что всякая измеримая функция совпадает почти всюду с некоторой B-измеримой функцией; это верно при произвольной мере Стильтьеса—Лебега]. Тогда функция $F(\lambda)$ будет измерима относительно произвольной неубывающей функции, следовательно, оператор $F(A)$ существует. Так как $F(\lambda)$ принадлежит L^2, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2 d\|F_\lambda f_0\|^2<\infty,$$

то f_0 принадлежит области оператора $F(A)$. Интеграл (15) равен

$$\|[P_m(A)-F(A)]f_0\|^2,$$

поэтому

$$P_m(A)f_0\longrightarrow F(A)f_0 \quad \text{при} \quad m\longrightarrow\infty,$$

следовательно,

$$F(A)f_0=Tf_0,$$

что и требовалось доказать.

С помощью этой леммы теорема может быть доказана следующим образом.

Пространство $\mathfrak{H}$ сепарабельно; поэтому в $\mathfrak{D}_T$ существует последовательность элементов g_1, g_2, ..., всюду плотная в $\mathfrak{D}_T$ и, следовательно, всюду плотная в $\mathfrak{H}$. Положим

$$f_1=g_1,\ f_2=g_2-L_1g_2,\ \ldots,\ f_n=g_n-\sum_{k=1}^{n-1}L_kg_n,\ \ldots, \tag{16}$$

где L_k — проекционный оператор, соответствующий подпространству $\mathfrak{L}_k=\mathfrak{L}(f_k)$. Так как $L_k\smile T$ (см. доказательство леммы), то L_kg_n принадлежит $\mathfrak{D}_T$. Покажем, что проекционные операторы L_k попарно ортогональны:

$$L_iL_k=O \quad \text{при} \quad i\neq k.$$

Допустим, что это верно для номеров i, $k<n$. Тогда для $i<n$ будем иметь равенства

$$L_i f_n = L_i g_n - \sum_{k=1}^{n-1} L_i L_k g_n = L_i g_n - L_i g_n = 0,$$

из которых следует, что

$$L_i A^j f_n = A^j L_i f_n = 0.$$

Таким образом, элементы $A^j f_n$ $(j=0, 1, \ldots)$, а следовательно, и все подпространство $\mathfrak{L}_n$ отображаются в нуль оператором L_i, так что $L_i L_n = L_n L_i = O$. Ортогональность операторов L_k установлена.

Сумма P всех операторов L_k равна I, т. е. подпространства $\mathfrak{L}_k$ в совокупности порождают все $\mathfrak{H}$. В самом деле, так как последовательиость $\{g_n\}$ всюду плотна в $\mathfrak{H}$, то для доказательства последнего утверждения достаточно обнаружить, что $Pg_n = g_n$ при любом n. Но, в силу (16),

$$Pg_n = Pf_n + \sum_{k=1}^{n-1} PL_k g_n = f_n + \sum_{k=1}^{n-1} L_k g_n = g_n,$$

так как

$$PL_k = L_k, \quad Pf_n = PL_n f_n = L_n f_n = f_n.$$

Выберем последовательность положительных чисел $\{c_n\}$ так, чтобы сходились ряды

$$\sum c_n f_n \quad \text{и} \quad \sum c_n T f_n;$$

можно положить, например,

$$c_n = [2(1 + \|f_n\| + \|Tf_n\|)]^{-n}.$$

При этом, в силу замкнутости оператора T, элемент $f_0 = \sum c_n f_n$ должен принадлежать области определения оператора T.

Согласно доказанной выше лемме, существует B-измеримая функция $F(\lambda)$, такая, что $F(A) f_0 = T f_0$. Так как

$$F(A) \smile\!\smile A \quad \text{и} \quad T \smile\!\smile A,$$

то $F(A)$ и T определены на всех элементах вида Bf_0, где B — произвольный ограниченный симметричный оператор, перестановочный с A, и

$$F(A) Bf_0 = TBf_0.$$

Положим, в частности,

$$B = \frac{1}{c_m} P_n A^k L_m,$$

где $P_n = e_n(A)$, а $e_n(\lambda)$ означает характеристическую функцию того множества, на котором $|F(\lambda)| \leqslant n$. Так как

$$L_m f_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n L_m f_n = c_m f_m,$$

то

$$F(A)\,P_n A^k f_m = T P_n A^k f_m.$$

Равенство

$$F(A)\,P_n h = T P_n h$$

будет выполняться и для произвольных линейных комбинаций h элементов $A^k f_m$. Но при фиксированном m эти последние плотны в $\mathfrak{L}_m$; варьируя m, мы получаем множество, всюду плотное во всем пространстве $\mathfrak{H}$. Каков бы ни был элемент h_0 из $\mathfrak{H}$, найдется последовательность таких линейных комбинаций $\{h_i\}$, сходящаяся к h_0. Оператор $F(A)\,P_n$ ограничен, следовательно, непрерывен, поэтому

$$T P_n h_i = F(A)\,P_n h_i \to F(A)\,P_n h_0;$$

так как, кроме того, $P_n h_i \to P_n h_0$, а оператор T замкнут, то $P_n h_0$ принадлежит области определения T и

$$T P_n h_0 = \lim_{i\to\infty} T P_n h_i = F(A)\,P_n h_0.$$

Итак,

$$T P_n = F(A)\,P_n.$$

Положим $g_n = P_n g$, где g — произвольный элемент из области определения оператора $F(A)$; очевидно, $g_n \to g$. Так как

$$T g_n = T P_n g = F(A)\,P_n g = P_n F(A)\,g \to F(A)\,g$$

и оператор T замкнут, то g принадлежит области определения T и $Tg = F(A)\,g$. Это означает, что $T \supseteq F(A)$.

Так как не только $P_n \smile F(A)$, но и $P_n \smile T$ (в силу того, что $P_n \smile A$), а оператор $F(A)$, будучи функцией от A, замкнут, то в проведенном здесь рассуждении можно поменять ролями T и $F(A)$ и мы получим $F(A) \supseteq T$.

Таким образом, $T = F(A)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что в случае несепарабельного $\mathfrak{H}$ эта теорема, вообще говоря, неверна[1]).

130. Конечные и счетные множества перестановочных самосопряженных операторов. В п. 111 мы видели, что если X и Y — перестановочные ограниченные симметричные операторы, то существует семейство проекционных операторов $\{E(\delta)\}$, где δ — переменный (открытый, полуоткрытый или замкнутый) прямоугольник в плоскости (x, y) со сторонами, параллельными координатным осям, такое, что, каков бы ни был многочлен $p(x, y)$ от x и y, соответствующий многочлен от операторов выражается фор-

[1]) Это замечание принадлежит Накано [3]; см. также Веккен [2] и С.-Надь [1] (стр. 65).

мулой

$$p(X, Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\, E(dx\, dy).$$

При этом интеграл можно брать только по прямоугольнику

$$\Delta=[m_X\leqslant x\leqslant M_X;\ m_Y\leqslant y\leqslant M_Y],$$

так как $E(\Delta)=I$ и $E(\delta)=O$ для любого прямоугольника δ, лежащего вне Δ. Эта формула позволяет распространить соответствие между функциями и операторами на более широкий класс функций, хотя бы на функции $u(x, y)$, непрерывные в Δ; при этом интеграл по-прежнему будет означать предел по норме соответствующих сумм типа Римана—Стильтьеса.

Отправляясь от формулы для скалярных произведений

$$(u(X, Y)f, g)=\iint_{\Delta} u(x, y)(E(dx\, dy)f, g),$$

мы можем распространить это соответствие так же, как в случае одного переменного (пп. 126—128), на конечные функции $u(x, y)$, измеримые и определенные почти всюду относительно любой аддитивной, с ограниченным изменением, функции прямоугольника $(E(\delta)f, g)$ или, что сводится к тому же, относительно любой аддитивной неотрицательной функции прямоугольника $(E(\delta)f, f)$. Установленное таким образом соответствие обладает теми же свойствами, что и в случае одного переменного. В частности,

$$u(X, Y) \smile\smile \{X, Y\},$$

и, так же как в п. 129, можно показать, что это свойство характеризует функции от X и Y, по крайней мере в случае сепарабельного гильбертова пространства.

Построение функций от двух операторов X и Y позволяет определить функции *нормального* оператора $N=X+iY$ (см. п. 111). В частности,

$$(N-\zeta I)^{-1}=\iint_{\Delta}\frac{1}{z-\zeta}E(dx\, dy)\quad (z=x+iy), \tag{17}$$

коль скоро правая или левая часть этого равенства определена.

Точно такое же построение можно осуществить в случае двух произвольных самосопряженных операторов X и Y, перестановочных в том смысле, что их спектральные семейства образованы перестановочными операторами (тогда, когда X или Y ограничен, это свойство влечет за собой обычную перестановочность).

Все сказанное до сих пор распространяется на случай произвольного конечного числа и даже бесконечного множества перестановочных самосопряженных операторов.

В случае нескольких переменных справедлива, в частности, теорема о сложных функциях (см. п. 128). Ограничимся двумя переменными. Если самосопряженные операторы X и Y являются функциями одного и того же самосопряженного оператора A, т. е. $X = x(A)$, $Y = y(A)$, и если $u(x, y)$ такова, что $u(X, Y)$ существует, то $u(X, Y) = v(A)$, где $v(A)$ — оператор, соответствующий сложной функции $v(\lambda) = u(x(\lambda), y(\lambda))$.

В связи с этим возникает задача: *заданы перестановочные самосопряженные операторы X и Y; построить, если это возможно, самосопряженный оператор A, функциями которого являются и X и Y.*

Мы покажем, что это всегда возможно. Идея дальнейшего построения основана на принципе соответствия, с помощью которого в п. 39 мы свели интегрирование функций нескольких переменных к интегрированию функций одного переменного.

Не нарушая общности, мы можем предположить, что самосопряженные операторы X и Y ограничены, а соответствующая область Δ заключена в полуоткрытом единичном квадрате

$$Q^2 = [0 < x \leqslant 1, \quad 0 < y \leqslant 1].$$

Рассмотрим последовательность разбиений $C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots$ квадрата Q^2 на клетки, где $C^{(m)}$ образовано полуоткрытыми квадратными клетками $\delta^{(m)}$ такого же типа, как сам Q^2, со сторонами длины 2^{-m}. Этой последовательности поставим в соответствие последовательность разбиений $D^{(1)}, D^{(2)}, \ldots$ интервала

$$Q = [0 < \lambda \leqslant 1],$$

где $D^{(m)}$ представляет собой разбиение Q на полуоткрытые интервалы $i^{(m)}$ того же типа, что и Q, длины 2^{-2m}. Соответствие должно быть таким, как в п. 39[1]). Предположим, что $\delta^{(m)}$ и $i^{(m)}$ занумерованы так, что соответствующие друг другу клетки и интервалы имеют одинаковые номера:

$$\delta_1^{(m)}, \ \delta_2^{(m)}, \ \ldots; \quad i_1^{(m)}, \ i_2^{(m)}, \ \ldots .$$

Для фиксированных m и λ $(0 < \lambda \leqslant 1)$ обозначим $E_\lambda^{(m)}$ сумму проекционных операторов $E(\delta_n^{(m)})$, распространенную на те клетки, для которых соответствующие $i_n^{(m)}$ хотя бы частично попадают левее точки λ. $E_n^{(m)}$ также является проекционным оператором, и, очевидно,

$$E_\lambda^{(m)} \geqslant E_\lambda^{(m+1)}, \quad E_\lambda^{(m)} \leqslant E_\mu^{(m)} \text{ при } \lambda < \mu;$$

кроме того,

$$E_1^{(m)} = I.$$

---

[1]) То обстоятельство, что здесь мы, в отличие от построения, выполненного в п. 39, разбиваем интервал на 2^{-2m} частей, а стороны квадрата — на 2^{-m} частей, существенного значения не имеет.

Следовательно,

$$E_\lambda = \lim_{m\to\infty} E_\lambda^{(m)}$$

также представляет собой проекционный оператор; при этом $E_\lambda \leqslant E_\mu$, когда $\lambda < \mu$, и $E_1 = I$. Положив, кроме того, $E_0 = E_{+0}$, $E_\lambda = O$ при $\lambda < 0$ и $E_\lambda = I$ при $\lambda \geqslant 1$, мы получим спектральное семейство на отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Оно порождает самосопряженный оператор[1])

$$A = \int_{-0}^{1} \lambda \, dE_\lambda.$$

Пусть $x_n^{(m)}$, $y_n^{(m)}$ обозначают координаты правой верхней вершины квадрата $\delta_n^{(m)}$, а $\varphi_n^{(m)}(\lambda)$ — характеристическую функцию интервала $i_n^{(m)}$, соответствующего $\delta_n^{(m)}$. Функции

$$x_m(\lambda) = \sum x_n^{(m)} \varphi_n^{(m)}(\lambda) \geqslant 0,$$

где сумма распространена на все клетки разбиения $D^{(m)}$, стремятся, возрастая, к некоторой функции $x(\lambda) \geqslant 0$, суммируемой относительно $\{E_\lambda\}$. Поэтому оператор $x(A)$ существует и

$$x(A) = \int_{-0}^{1} x(\lambda)\, dE_\lambda = \lim_{m\to\infty} \int_{-0}^{1} x_m(\lambda)\, dE_\lambda = \lim_{m\to\infty} \sum_n x_n^{(m)} \int_{-0}^{1} \varphi^{(m)}(\lambda)\, dE_\lambda =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_n x_n^{(m)} E(\delta_n^{(m)}) = \iint_{Q^2} xE(dx\,dy) = X.$$

Функция $y(\lambda)$, такая, что

$$y(A) = Y,$$

строится аналогично.

Таким образом, операторы X и Y являются функциями оператора A.

Тот же метод применим в случае *трех и большего числа* и даже *счетного* множества перестановочных самосопряженных операторов. При этом следует взять разбиения куба соответствующего числа измерений и поставить им в соответствие должным образом выбранные разбиения интервала $0 < \lambda \leqslant 1$. В случае счетного множества операторов разбиения $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, ... куба Q^∞ строятся так, чтобы каждое $C^{(m)}$ порождалось разбиениями конечного числа ребер Q^∞ и чтобы разбиения каждого фиксированного ребра неограниченно измельчались при $m \to \infty$. Напри-

[1]) Собственно говоря, мы не проверили, что E_λ как функция от λ непрерывна справа. Но это не имеет значения, так как, взяв, если нужно, $E_{\lambda+0}$ вместо E_λ, мы придем к тому же оператору A.

мер, можно задать $C^{(m)}$, разбив первые m ребер куба Q^{∞} на 2^m равных частей[1]).

Мы приходим, таким образом, к следующему выводу:

Теорема[2]). *Пусть* $\{X_m\}$ — *конечная или счетная система перестановочных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$. *Тогда в* $\mathfrak{H}$ *существует самосопряженный оператор* A, *такой, что все* X_m *являются функциями от* A:

$$X_m = x_m(A) \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots);$$

при этом

$$A \smile\smile \{X_m\}.$$

Справедливость последнего утверждения вытекает непосредственно из указанного построения: спектральные проекции E_λ оператора A были получены как пределы сумм проекционных операторов вида $E(\delta)$, которые, в свою очередь, выражались через спектральные проекции операторов X_m посредством вычитаний и умножений, произведенных в конечном числе.

131. Произвольные множества перестановочных самосопряженных операторов. Метод, описанный в предыдущем пункте, не применим к несчетной системе операторов, так как клетки разбиений куба в пространстве несчетной размерности нельзя должным образом отобразить на частичные интервалы разбиений линейного интервала. Тем не менее доказанная теорема справедлива и в общем случае, по крайней мере для операторов в *сепарабельном* гильбертовом пространстве. В этом случае множество всевозможных ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$ сепарабельно в некотором смысле, который сейчас будет точно определен. После этого достаточно применить доказанную теорему к счетному плотному подмножеству заданного множества операторов, чтобы получить нужное представление всего множества операторов.

Справедлива следующая

Теорема[3]). *Из любого бесконечного множества* $\Sigma = \{T\}$ *ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$ *можно выделить счетное подмножество* $\sigma = \{T_n\}$, *такое, что любой оператор* T *в* $\mathfrak{H}$, *принадлежащий множеству* Σ, *представляет собой предел (в сильном смысле) некоторой подпо-*

---

[1]) Именно таким разбиением пользовался Йессен [1] в теории функций бесконечно многих переменных. См. также С.-Надь [3] (стр. 221), [1] (стр. 62) и Накано [3].

[2]) См. И. Нейман [2] (теорема 10), Хаар [1] (стр. 781—790) или С.-Надь [1] (стр. 66—68).

[3]) См. И. Нейман [2] (стр. 386—388); приведенное здесь упрощенное доказательство принадлежит С.-Надю [1] (стр. 12—13).

следовательности $\{T_{n_i}\}$ *из* σ *и в то же время* T^* *является пределом последовательности* $\{T^*_{n_i}\}$.

Теорему достаточно доказать для того случая, когда множество Σ операторов T равномерно ограничено:

$$\|T\| \leqslant C;$$

в самом деле, общий случай можно свести к этому частному, если разбить множество Σ на подмножества $\Sigma_N (N = 1, 2, \ldots)$, характеризуемые неравенствами $N-1 \leqslant \|T\| < N$.

Рассмотрим всевозможные последовательности элементов $\{f_k\}$ $(k=1, 2, \ldots)$, для которых сходятся ряды $\sum \|f_k\|^2$. Положив, по определению,

$$c\{f_k\} = \{cf_k\}, \quad \{f_k\} + \{g_k\} = \{f_k + g_k\},$$
$$(\{f_k\}, \{g_k\}) = \sum (f_k, g_k),$$

мы превратим совокупность таких последовательностей в новое гильбертово пространство, которое обозначим $\mathfrak{H}^\omega$. Исходное пространство $\mathfrak{H}$ сепарабельно, поэтому в нем содержится последовательность элементов $g_1, g_2, \ldots$, отличных от нулевого, всюду плотная в $\mathfrak{H}$. Легко видеть, что последовательности вида

$$\{g_{n_1}, g_{n_2}, \ldots, g_{n_r}, 0, 0, 0, \ldots\}$$

образуют счетное множество, всюду плотное в $\mathfrak{H}^\omega$. Таким образом, $\mathfrak{H}^\omega$ также сепарабельно.

Произвольному оператору T, принадлежащему множеству Σ, поставим в соответствие элемент

$$\varphi_T = \{c_1 T g_1, c_1 T^* g_1, c_2 T g_2, c_2 T^* g_2, \ldots, c_k T g_k, c_k T^* g_k, \ldots\}$$

пространства $\mathfrak{H}^\omega$, где $c_k = (2^k \|g_k\|)^{-1}$. Множество таких элементов φ_T, будучи подмножеством сепарабельного пространства $\mathfrak{H}^\omega$, само сепарабельно[1]), т. е. в нем существует счетное плотное подмножество $\{\varphi_{T_n}\}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Всякий элемент φ_T представляет собой предел некоторой подпоследовательности $\{\varphi_{T_{n_i}}\}$. В компонентах это записывается следующим образом:

$$T_{n_i} g_k \to T g_k \quad \text{и} \quad T^*_{n_i} g_k \to T^* g_k$$

при $i \to \infty$ и при любом k.

Пусть f — произвольный элемент пространства $\mathfrak{H}$. Из соотношений

$$\|Tf - T_{n_i} f\| \leqslant \|Tf - Tg_k\| + \|Tg_k - T_{n_i} g_k\| + \|T_{n_i} g_k - T_{n_i} f\| \leqslant$$
$$\leqslant C\|f - g_k\| + \|Tg_k - T_{n_i} g_k\| + C\|g_k - f\|$$

[1]) См. примечание на стр. 80.

следует, что

$$\limsup_{i\to\infty}\|Tf-T_{n_i}f\|\leqslant 2C\,\|f-g_k\|,$$

каково бы ни было k. Так как последовательность $\{g_k\}$ всюду плотна в $\mathfrak{H}$, то этот верхний предел равен нулю, следовательно,

$$T_{n_i}f\longrightarrow Tf.$$

Точно так же можно убедиться в том, что

$$T^*_{n_i}f\longrightarrow T^*f.$$

Итак, последовательность $\{T_n\}$ обладает требуемыми свойствами.

Установив это, покажем, каким образом теорема предыдущего пункта обобщается на любое множество $\{X\}$ перестановочных самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Мы можем предположить, что все X ограничены. Пусть $\{X_n\}$ — счетное подмножество множества $\{X\}$, плотное в $\{X\}$ в том смысле, как это было сейчас определено. Согласно уже доказанной теореме, существует ограниченный самосопряженный оператор A, такой, что все X_n являются функциями от A и $A\smile\smile\{X_n\}$. Так как

$$X_n=x_n(A)\smile\smile A\quad(n=1,\ 2,\ \ldots),$$

то

$$X\smile\smile A$$

для всех операторов X, принадлежащих заданному множеству. В силу теоремы п. 129, отсюда вытекает, что X также является функцией A. Итак, доказана

Теорема[1]. *Для любого множества $\{X\}$ самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, перестановочных друг с другом, существует ограниченный самосопряженный оператор A, такой, что $A\smile\smile\{X\}$ и все операторы X, принадлежащие заданному множеству, являются функциями от A.*

§ 2. СПЕКТР САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА И ЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ

132. Спектр самосопряженного оператора. Разложение, соответствующее точечному спектру и непрерывному спектру. В п. 128 мы показали, что если самосопряженный оператор A представлен в виде

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE_\lambda,$$

[1]) См. И. Нейман [2] (теорема 10) или С.-Надь [1] (стр. 65—69).