следует, что

$$\limsup_{i\to\infty} \| Tf - T_{n_i} f \| \leqslant 2C \| f - g_k \|,$$

каково бы ни было k. Так как последовательность $\{g_k\}$ всюду плотна в $\mathfrak{H}$, то этот верхний предел равен нулю, следовательно,

$$T_{n_i} f \to Tf.$$

Точно так же можно убедиться в том, что

$$T^*_{n_i} f \to T^* f.$$

Итак, последовательность $\{T_n\}$ обладает требуемыми свойствами.

Установив это, покажем, каким образом теорема предыдущего пункта обобщается на любое множество $\{X\}$ перестановочных самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Мы можем предположить, что все X ограничены. Пусть $\{X_n\}$ — счетное подмножество множества $\{X\}$, плотное в $\{X\}$ в том смысле, как это было сейчас определено. Согласно уже доказанной теореме, существует ограниченный самосопряженный оператор A, такой, что все X_n являются функциями от A и $A \smile\smile \{X_n\}$. Так как

$$X_n = x_n(A) \smile\smile A \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то

$$X \smile\smile A$$

для всех операторов X, принадлежащих заданному множеству. В силу теоремы п. 129, отсюда вытекает, что X также является функцией A. Итак, доказана

Теорема[1]). *Для любого множества $\{X\}$ самосопряженных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, перестановочных друг с другом, существует ограниченный самосопряженный оператор A, такой, что $A \smile\smile \{X\}$ и все операторы X, принадлежащие заданному множеству, являются функциями от A.*

§ 2. СПЕКТР САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА И ЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ

132. Спектр самосопряженного оператора. Разложение, соответствующее точечному спектру и непрерывному спектру. В п. 128 мы показали, что если самосопряженный оператор A представлен в виде

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda,$$

[1]) См. И. Нейман [2] (теорема 10) или С.-Надь [1] (стр. 65—69).

то

$$(A-zI)^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda-z}\,dE_\lambda$$

для любого действительного или комплексного значения z, при котором функция $\frac{1}{\lambda-z}$ конечна на оси λ почти всюду относительно $\{E_\lambda\}$. Очевидно, это условие выполняется для всех z, для которых $\operatorname{Im} z\neq 0$, а также для тех действительных значений $z=\lambda$, при которых E_λ как функция параметра λ непрерывна. Кроме того, было показано, что оператор $(A-zI)^{-1}$ *всюду определен и ограничен* тогда и только тогда, когда функция $\frac{1}{\lambda-z}$ существенно ограничена относительно $\{E_\lambda\}$ на оси λ. Последнее условие выполняется для всех z вне действительной оси и для всех действительных значений, лежащих внутри какого-нибудь интервала, на котором E_λ постоянна. Все такие точки образуют так называемое *резольвентное множество* оператора A; это множество, очевидно, *открытое*. Дополнительное множество в комплексной плоскости называется *спектром* оператора A. Таким образом, спектр представляет собой *замкнутое* множество, состоящее из тех точек действительной оси, которые являются точками роста E_λ как функции от λ.

Интервалов, в которых функция E_λ постоянна, может быть конечное или счетное множество, поэтому та часть оси λ, которая не принадлежит спектру, имеет меру нуль относительно $\{E_\lambda\}$. Следовательно, все интегралы относительно $\{E_\lambda\}$ сводятся к интегралам, взятым по спектру оператора A. Оператор $w(A)$, соответствующий функции $w(\lambda)$, ограничен тогда и только тогда, когда $w(\lambda)$ существенно ограничена на спектре; при этом норма оператора $w(\lambda)$ равна существенной верхней грани $|w(\lambda)|$ на спектре относительно $\{E_\lambda\}$ (см. формулу (10), п. 128).

Спектр оператора A содержит, в частности, те точки μ оси λ, в которых E_λ претерпевает скачки, т. е. содержит все *собственные значения* оператора A. Скачок

$$E(\mu)=E_{\mu+0}-E_{\mu-0}=E_\mu-E_{\mu-0}$$

равен проекционному оператору, соответствующему собственному подпространству $\mathfrak{M}_\mu$, элементами которого являются решения f уравнения

$$Af=\mu f,$$

т. е. элемент 0 и *собственные элементы*, отвечающие собственному значению μ. Собственные значения образуют *точечный спектр* оператора A. Собственные подпространства, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны. В том случае, когда пространство $\mathfrak{H}$ сепарабельно, оно может содержать лишь конечное или счетное множество отличных от нуля попарно ортогональных элементов, следовательно, точечный спектр оператора A может быть только конечным или счетным множеством.

Может случиться, что оператор A вовсе не имеет собственных значений; при этом говорят, что его спектр — *чисто непрерывный*. Противоположный случай имеет место тогда, когда собственные элементы оператора A образуют полное множество; в этом случае говорят, что A имеет *чисто точечный спектр* (в действительности спектр оператора A состоит в этом случае из точечного спектра и его предельных точек).

Мы покажем, что *общий случай может быть представлен как наложение этих двух предельных случаев*.

Рассмотрим сначала случай, когда функция E_λ претерпевает всего лишь конечное или счетное множество скачков в некоторых точках $\mu_1, \mu_2, \ldots$; в частности, так всегда бывает в сепарабельном $\mathfrak{H}$. Так как скачки $E(\mu_k)$ представляют собой попарно ортогональные проекционные операторы, то их сумма

$$E=\sum_k E(\mu_k)$$

также есть проекционный оператор; E, очевидно, перестановочен со всеми E_λ, а следовательно, и с

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE_\lambda.$$

Таким образом, подпространства

$$\mathfrak{H}_p=E\mathfrak{H} \quad \text{и} \quad \mathfrak{H}_c=(I-E)\mathfrak{H}$$

приводят оператор A (см. п. 116). Соответствующие этим подпространствам части A_p и A_c оператора также представляют собой самосопряженные операторы[1]). Ясно, что подпространство $\mathfrak{H}_p$ порождено совокупностью собственных подпространств $\mathfrak{M}_{\mu_k}$, поэтому $\mathfrak{H}_c$ не содержит ни одного собственного элемента оператора A. Следовательно, оператор A_p имеет чисто точечный спектр, а A_c — чисто непрерывный. Спектр оператора A_c называется также *непрерывным спектром* оператора A. Согласно этому опре-

[1]) В самом деле, если $(A_p g, h)=(g, h^*)$ для каких-нибудь двух элементов h, h^* из $\mathfrak{H}_p$ и для всех элементов g из области определения A_p, то

$$(Af, h)=(A_pEf, h)=(Ef, h^*)=(f, Eh^*)=(f, h^*)$$

для всех f, принадлежащих области определения оператора A. Так как A — самосопряженный оператор, то такие равенства возможны только тогда, когда h принадлежит области определения A и $h^*=Ah=A_ph$. Таким образом, A_p является самосопряженным оператором в $\mathfrak{H}_p$. Такое же рассуждение применимо и к A_c.

делению, непрерывный спектр оператора A может перекрываться как с точечным спектром, так и с множеством предельных точек этого последнего[1]).

Тогда, когда множество скачков $E(\mu)$ несчетно (это возможно в случае несепарабельного $\mathfrak{H}$), сумма

$$E = \sum_{\mu} E(\mu)$$

определяется следующим образом. Для любого фиксированного f существует лишь конечное или счетное множество собственных значений μ, при которых $E(\mu) f \neq 0$; это является следствием ортогональности собственных подпространств $\mathfrak{M}_{\mu}$ и неравенства Бесселя. Элемент Ef определяется как сумма всех $E(\mu) f$, отличных от нуля; в силу ортогональности, порядок слагаемых при этом безразличен. Легко видеть, что оператор E, определенный таким образом, является проекционным оператором, а соответствующее подпространство $\mathfrak{H}_p = E\mathfrak{H}$ порождено совокупностью всевозможных собственных подпространств $\mathfrak{M}_{\mu}$. Далее, E перестановочен с E_{λ}, так как при любых фиксированных λ и f

$$EE_{\lambda}f = \sum_{\mu} E(\mu)\, E_{\lambda}f = \sum_{\mu} E_{\lambda}E(\mu) f = E_{\lambda} \sum_{\mu} E(\mu) f = E_{\lambda}Ef,$$

где суммирование распространено на те значения μ, образующие конечное или счетное множество, для которых $E(\mu)\, E_{\lambda}f \neq 0$.

Заметим, что подобные же рассуждения применимы и к произвольному *нормальному* оператору[2])

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} zE(dx,\ dy) \qquad (z = x + iy).$$

Резольвентное множество оператора N определяется как объединение открытых прямоугольников δ, для которых $E(\delta) = O$. Спектр оператора N, по определению, есть дополнение резольвентного множества. В частности, спектр унитарного оператора расположен на единичной окружности $|z| = 1$ (см. п. 111).

[1]) Иначе определяют непрерывный спектр Стоун [2] (стр. 128—129 и 164) и С.-Надь [1] (стр. 54). Согласно их определению, непрерывный спектр есть множество точек λ, для которых $E_{\lambda+\varepsilon} - E_{\lambda-\varepsilon} \neq O$ при $\varepsilon > 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}(E_{\lambda+\varepsilon} - E_{\lambda-\varepsilon}) = O$. При таком определении непрерывный спектр не может пересекаться с точечным. В нашей книге мы придерживаемся первоначального определения, данного Гильбертом [1].

[2]) Эта формула была нами установлена (см. п. 111) только для *ограниченных* нормальных операторов, но она справедлива и тогда, когда N — *неограниченный* нормальный оператор (т. е. если его область плотна в $\mathfrak{H}$ и $NN^* = N^*N$, см. п. 128). Доказать это можно методом, описанным в п. 120; подробности читатель найдет в книге С.-Надя [1] (стр. 48—50). См. также Накано [1].

133. Предельный спектр. Вернемся к *самосопряженным* операторам. Точки непрерывного спектра, предельные точки точечного спектра и, наконец, собственные значения бесконечной кратности мы отнесем к так называемому *предельному спектру*. Условимся также считать, что ∞ и $-\infty$ принадлежат предельному спектру в тех случаях, когда спектр неограничен соответственно сверху или снизу.

Если конечное действительное число μ не принадлежит предельному спектру, то существует интервал $\delta=(a, b)$, окружающий точку μ, такой, что ни одна его точка, кроме, может быть, самой точки μ, не принадлежит спектру. Если при этом μ есть точка спектра, то она непременно является собственным значением конечной кратности. В этом случае

$$E(\delta)=E_b-E_a$$

представляет собой проекционный оператор *конечного ранга* (ранг проекционного оператора P определяется как размерность соответствующего подпространства $\mathfrak{L}=P\mathfrak{H}$). Обратно, предположим, что μ заключено внутри интервала $\delta=(a, b)$, обладающего тем свойством, что оператор $E(\delta)$ имеет конечный ранг. Так как при $a\leqslant\lambda\leqslant b$

$$E_\lambda-E_a\leqslant E_b-E_a=E(\delta),$$

то, когда λ пробегает интервал (a, b), ранг оператора E_λ может возрастать лишь в конечном числе точек конечными скачками, следовательно, μ не может принадлежать предельному спектру.

Таким образом, *конечное действительное число* μ *принадлежит предельному спектру тогда и только тогда, когда проекционный оператор* $E(\delta)=E_b-E_a$ *имеет бесконечный ранг, каков бы ни был интервал* δ, *содержащий* μ *в качестве внутренней точки.*

Неудобство этого критерия состоит в том, что он опирается на свойства спектрального семейства оператора A, которое, как правило, не бывает известно заранее. Покажем, как можно обойти это затруднение. Допустим, что все $E(\delta)$, соответствующие интервалам δ, охватывающим точку μ, имеют бесконечный ранг. Возьмем последовательность вложенных интервалов δ_n, стягивающихся к μ. Так как все подпространства $\mathfrak{L}_n=E(\delta_n)\mathfrak{H}$ бесконечномерны, то можно найти в $\mathfrak{H}$ такую ортонормированную счетную систему $\{f_n\}$, в которой каждый f_n принадлежит $\mathfrak{L}_n (n=1, 2, \ldots)$. Так как

$$\|(A-\mu I)f_n\|^2=\|(A-\mu I)E(\delta_n)f_n\|^2=$$
$$=\int_{\delta_n}(\lambda-\mu)^2 d\|E_\lambda f_n\|^2\leqslant|\delta_n|^2\|f_n\|^2=|\delta_n|^2\to 0$$

и любая ортонормированная последовательность сходится слабо к 0 (вследствие неравенства Бесселя), то последовательность $\{f_n\}$ будет удовлетворять следующим условиям:

$$\|f_n\|=1, \quad f_n \rightharpoonup 0 \quad \text{и} \quad (A-\mu I)f_n \to 0.$$

Покажем, что, обратно, если существует последовательность $\{f_n\}$, удовлетворяющая этим трем условиям, то μ является точкой предельного спектра. В самом деле, если $\delta=(a, b)$ — произвольный интервал, содержащий μ в качестве внутренней точки, то для всех элементов f, принадлежащих области определения оператора A,

$$\|(A-\mu I)f\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\mu)^2 d\|E_\lambda f\|^2 \geqslant (b-\mu)^2\int_b^{\infty} d\|E_\lambda f\|^2+$$

$$+(a-\mu)^2\int_{-\infty}^{a} d\|E_\lambda f\|^2=(b-\mu)^2\|(I-E_b)f\|^2+(a-\mu)^2\|E_a f\|^2;$$

отсюда вытекает, что $(I-E_b)f_n \to 0$ и $E_a f_n \to 0$, а потому и $(I-E(\delta))f_n \to 0$, следовательно,

$$\lim_n \|E(\delta)f_n\|=\lim_n\|f_n\|=1$$

при $n\to\infty$. Подпространство $\mathfrak{L}(\delta)=E(\delta)\mathfrak{H}$ не может быть конечномерным, так как иначе в нем слабая сходимость совпадала бы с сильной сходимостью, а это противоречит тому, что $f_n \rightharpoonup 0$ и в то же время $\lim\limits_n\|f_n\|=1$.

Таким образом, мы установили следующий критерий, принадлежащий Г. Вейлю [4]:

Конечное действительное μ принадлежит предельному спектру самосопряженного оператора A тогда и только тогда, когда существует последовательность элементов f_n из области определения оператора A, такая, что

$$\|f_n\|=1, \quad f_n \rightharpoonup 0, \quad (A-\mu I)f_n \to 0.$$

Вполне непрерывные самосопряженные операторы могут быть охарактеризованы тем, что единственной предельной точкой их спектров может служить 0 (это было отмечено в конце п. 93). Для таких операторов справедливо простое представление

$$Af=\sum_k \mu_k (f, \varphi_k)\varphi_k,$$

где μ_k пробегает отличные от нуля собственные значения оператора A (каждое столько раз, какова его кратность), а $\{\varphi_k\}$ представляет собой ортонормированную систему собственных элементов.

Если не только $\mu_k \to 0$, но, кроме того,

$$\sum_k \mu_k^2<\infty,$$

то говорят, что A есть оператор *типа Гильберта—Шмидта*. Это наименование оправдывается тем, что если гильбертово пространство, в котором действует оператор A, есть функциональное пространство $L^2(a, b)$, то

$$Af(x) = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy, \tag{18}$$

где

$$K(x, y) = \sum_k \mu_k \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)}$$

(причем ряд справа сходится в среднем) и

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx\, dy = \sum_k \mu_k^2 < \infty,$$

т. е. оператор A порожден ядром такого типа, который изучался Гильбертом и Шмидтом (см. п. 97).

Мы займемся спектрами операторов в L^2, допускающих представление (18), но с симметричными ядрами более общего вида, подчиненными, например, условию, чтобы интеграл

$$\int_a^b |K(x, y)|^2 dy$$

существовал для почти всех x (так называемые ядра типа Карлемана)[1]). Класс таких операторов гораздо шире класса операторов типа Гильберта—Шмидта, он охватывает даже некоторые неограниченные операторы, но заведомо не исчерпывает класса *всех* самосопряженных операторов (так, например, тождественный оператор не является оператором такого типа). И. Нейману [8] принадлежит следующая теорема, которую мы приведем здесь без доказательства:

Теорема. *Всякий самосопряженный оператор A в пространстве $L^2(a, b)$, порожденный ядром $K(x, y)$ карлемановского типа* [*так что для всех элементов f из области определения оператора A для почти всех x справедливо представление* (18)], *обладает тем свойством, что* 0 *является точкой (может быть, не единственной) его предельного спектра. Обратно, всякий самосопряженный оператор в пространстве $L^2(a, b)$, для которого* 0 *является точкой предельного спектра, унитарно эквивалентен некоторому оператору указанного типа.*

Унитарная эквивалентность операторов A и A' означает, что

$$A = U^{-1} A' U,$$

где U — некоторый унитарный оператор. Если $\{E_\lambda\}$ и $\{E'_\lambda\}$ —

[1]) См. Карлеман [2] и Стоун [2] (гл. X, § 1).

спектральные семейства операторов A и A', то, очевидно,

$$E_\lambda^{*} = U^{-1} E'_\lambda U;$$

отсюда следует, что A и A' обладают одинаковым точечным спектром и одинаковым непрерывным спектром, причем равные собственные значения имеют одну и ту же кратность. Обратно, если операторы A и A' имеют одинаковый чисто точечный спектр, причем равные собственные значения имеют одну и ту же кратность, то A и A' унитарно эквивалентны. Действительно, в этом случае спектральные семейства операторов A и A' представляют собой функции скачков

$$E_\lambda = \sum_{\mu \leqslant \lambda} E(\mu), \quad E'_\lambda = \sum_{\mu \leqslant \lambda} E'(\mu),$$

причем сами „скачки" являются проекционными операторами, соответствующими подпространствам $\mathfrak{L}(\mu)$ и $\mathfrak{L}'(\mu)$ одинаковой размерности. Отобразив (для любого μ) подпространство $\mathfrak{L}(\mu)$ линейно и изометрично на подпространство $\mathfrak{L}'(\mu)$, мы получим в результате некоторый унитарный оператор U во всем пространстве $\mathfrak{H}$, такой, что

$$U^{-1} E'_\lambda U = E_\lambda, \quad U^{-1} A' U = A.$$

В том случае, когда непрерывный спектр не пуст, унитарную эквивалентность установить гораздо труднее. Хеллингеру первому удалось найти в этом общем случае полную систему „унитарных инвариантов"; в дальнейшем Хан внес в эту теорию значительные упрощения[1]). Оба эти автора рассматривали случай координатного гильбертова пространства, т. е. пространство *сепарабельное*. В случае несепарабельных пространств возникают существенные затруднения; мы позволим себе отослать читателя к работам, указанным в примечании[2]).

134. Возмущение спектра, вызванное вполне непрерывным слагаемым. В п. 95 было показано, как изменятся собственные значения вполне непрерывного симметричного оператора A, если вместо A взять сумму $A' = A + B$, где B—оператор такого же типа. Для не вполне непрерывного оператора A положение более сложно. Г. Вейлю [4] принадлежит следующая

Теорема. *Если к ограниченному симметричному оператору A прибавить вполне непрерывный симметричный оператор B, то предельный спектр оператора A при этом не изменится.*

В самом деле, достаточно воспользоваться критерием Вейля (п. 133), применив его к операторам A и A', так как, в силу

[1]) См. Хеллингер [1] и Хан [1]; этот материал, охватывающий случай неограниченных операторов, изложен у Стоуна [2] (гл. VII).

[2]) Веккен [2]; Накано [4], [5]; Плеснер и Рохлин [1]; Халмош [1].

полной непрерывности оператора B, из $f_n \rightharpoonup 0$ следует $Bf_n \to 0$ (см. п. 85), поэтому если

$$\|f_n\| = 1, \quad f_n \rightharpoonup 0, \quad (A-\mu I) f_n \to 0,$$

то

$$\|f_n\| = 1, \quad f_n \rightharpoonup 0, \quad (A'-\mu I) f_n \to 0,$$

и наоборот.

В отношении точек ∞ и $-\infty$, могущих принадлежать предельному спектру, сомнений не возникает, следовательно, эта теорема верна и для *неограниченных* A.

Итак, прибавление вполне непрерывного симметричного оператора не изменяет предельного спектра. Однако *прибавлением вполне непрерывного симметричного оператора B можно превратить непрерывный спектр в чисто точечный, по крайней мере в случае сепарабельного пространства* $\mathfrak{H}$. Это доказал Г. Вейль [4]. Позднее И. Нейман [8] дал более простое доказательство, причем показал, что *в качестве B можно взять оператор типа Гильберта—Шмидта, для которого соответствующая сумма $\sum_k \mu_k^2$ сколь угодно мала.*

С помощью этих результатов он же доказал теорему, обратную теореме Вейля:

Теорема. *Если предельные спектры ограниченных симметричных операторов A и A' в сепарабельном пространстве $\mathfrak{H}$ одинаковы, то A' унитарно эквивалентен оператору A'', такому, что оператор $B = A - A''$ вполне непрерывен.*

Класс операторов B в этой теореме нельзя сузить: изъятие хотя бы одного вполне непрерывного оператора сделало бы эту теорему неверной.

135. Непрерывные возмущения. В силу приведенной выше теоремы Вейля и Неймана, всякий самосопряженный оператор, даже обладающий чисто непрерывным спектром, является равномерным пределом последовательности самосопряженных операторов с чисто точечными спектрами.

Выясним, как сказывается предельный переход на спектральном семействе. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность самосопряженных операторов, равномерно ограниченная и сходящаяся (сильно) к оператору A. Предположим для определенности, что $\|A_n\| \leqslant 1$. Тогда, каков бы ни был многочлен $p(\mu)$,

$$p(A_n) \to p(A).$$

С помощью известной теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами этот вывод можно распространить на любые непрерывные функции $u(\mu)$ на отрезке $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$. Возьмем, в частности, $u(\mu) = e_0(\mu)\mu$, где $e_0(\mu) = 1$

при $\mu \leqslant 0$ и $e_0(\mu)=0$ при $\mu > 0$. При этом

$$E_{n0}A_n \to E_0 A,$$

где $\{E_{n\lambda}\}$ и $\{E_\lambda\}$ означают спектральные семейства соответственно операторов A_n и A. Отсюда, в силу неравенств

$$\|E_{n0}Af - E_0Af\| \leqslant \|E_{n0}(A-A_n)f\| + \|E_{n0}A_nf - E_0Af\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(A-A_n)f\| + \|E_{n0}A_nf - E_0Af\|,$$

вытекает, что

$$E_{n0}A \to E_0 A.$$

Если 0 не является собственным значением оператора A, то A^{-1} также самосопряжен и

$$E_{n0}f = E_{n0}AA^{-1}f \to E_0AA^{-1}f = E_0f$$

для любого элемента f, принадлежащего области определения оператора A. Так как эта последняя плотна в $\mathfrak{H}$, а проекционные операторы E_{n0} ограничены в совокупности, то

$$E_{n0} \to E_0.$$

Таким же рассуждением можно показать, что вообще

$$E_{n\lambda} \to E_\lambda$$

при любом λ, не принадлежащем точечному спектру оператора A.

То же верно и в том случае, когда последовательность самосопряженных операторов A_n *не является ограниченной в совокупности*, но сходится к некоторому самосопряженному оператору A; последнее надо понимать в том смысле, что A служит наименьшим замкнутым расширением оператора $\lim A_n$. Пусть λ — какое-нибудь число, не принадлежащее точечному спектру оператора A; не ограничивая общности, можно предположить, что $\lambda = 0$. Мы замечаем, что значения спектральных функций E_0 и E_{n0} соответственно для A и A_n совпадают с соответствующими значениями спектральных функций для

$$C = A(I+A^2)^{-1} \quad \text{и} \quad C_n = A_n(I+A_n^2)^{-1};$$

так как $\|C_n\| \leqslant 1$, то мы свели нашу теорему к уже рассмотренному случаю. Остается показать, что $C_n \to C$.

Положим

$$B = (I+A^2)^{-1} \quad \text{и} \quad B_n = (I+A_n^2)^{-1},$$

тогда $\{Bh, Ch\}$ и $\{B_nh, C_nh\}$ будут представлять собой проекции элемента $\{h, 0\}$ пространства $\boldsymbol{H}$ (декартова „квадрата“ пространства $\mathfrak{H}$) соответственно на графики $\boldsymbol{G}_A$ и $\boldsymbol{G}_{A_n}$ (см. п. 118). Можно доказать, что проекционный оператор в $\boldsymbol{H}$, соответствующий подпространству $\boldsymbol{G}_{A_n}$, стремится к проекционному оператору, соответствующему подпространству $\boldsymbol{G}_A$. В этом можно убедиться[1]),

[1]) См. С.-Надь [1] (стр. 56—57).

рассмотрев сначала элементы, принадлежащие G_A, а затем элементы ортогонального дополнения $H \ominus G_A$; в него подпространство G_A отображается оператором V (см. п. 117).

Резюмируем полученные результаты:

Теорема[1]). *Пусть $\{A_n\}$ — последовательность самосопряженных операторов, сходящаяся к самосопряженному оператору A в том смысле, что A является наименьшим замкнутым расширением оператора $\lim A_n$. Если $\{E_{n\lambda}\}$ и $\{E_\lambda\}$ — соответствующие спектральные семейства, то*

$$E_\lambda = \lim_{n \to \infty} E_{n\lambda}$$

в любой точке λ, не принадлежащей точечному спектру оператора A.

Рассмотрим частный случай, когда пространство $\mathfrak{H}$ сепарабельно. Пусть $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная система в $\mathfrak{H}$. Если P_n — проекционный оператор, соответствующий подпространству, натянутому на первые n элементов φ_k, то

$$P_n \to I \text{ и } A_n = P_n A P_n \to A,$$

каков бы ни был ограниченный самосопряженный оператор A. Спектральное семейство ограниченного симметричного оператора A является, таким образом, пределом спектральных семейств операторов A_n, по крайней мере на некотором числовом множестве, плотном на оси λ. Именно такнм путем Гильберт впервые получил спектральное семейство ограниченного симметричного оператора. Тот же метод применил Стоун для случая неограниченного самосопряженного оператора[2]).

Заметим, наконец, что *сходимость $E_{n\lambda}$ к E_λ, вообще говоря, не равномерна, даже в том случае, когда $A_n \Rightarrow A$.*

Так, например, последовательность операторов

$$A_n f(x) = \left(x - \frac{1}{n}\right) f(x)$$

в пространстве $L^2(0, 1)$ равномерно сходится к оператору

$$Af(x) = xf(x).$$

При этом

$$E_\lambda f(x) = e_\lambda(x) f(x),$$

где $e_\lambda(x)$ — характеристическая функция полуоси $x \leqslant \lambda$, и

$$E_{n\lambda} f(x) = e_{\lambda + \frac{1}{n}}(x) f(x);$$

таким образом, проекционному оператору $E_{n\lambda} - E_\lambda$ соответствует

[1]) См. Реллих [3] или С.-Надь [1] (стр. 56—57).

[2]) См. Стоун [2] (стр. 165—167).

подпространство, состоящее из функций, тождественно равных нулю вне интервала $\left(\lambda, \lambda+\frac{1}{n}\right)$. Очевидно, $E_{n\lambda}-E_\lambda \to O$, но при $0 \leqslant \lambda < 1$, $n=1, 2, \ldots$

$$\|E_{n\lambda}-E_\lambda\|=1.$$

Несколько проще поведение спектральных семейств на *изолированных участках спектра* предельного оператора A тогда, когда последовательность $\{A_n\}$ *сходится к A равномерно*. Сходимость $\{A_n\}$ к A может быть даже „относительно равномерной" в том смысле, что все A_n имеют общую область определения $\mathfrak{D}_A$ и

$$\eta_n=\sup_f \frac{\|(A_n-A)f\|}{\|f\|+\|Af\|} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{19}$$

Далее, мы говорим, что интервал $\delta=(\mu_1, \mu_2)$ несет изолированный участок спектра, если концы интервала μ_1 и μ_2 не принадлежат спектру, так что часть спектра, заключенная в δ, может быть отделена от остальной части спектра замкнутой спрямляемой жордановой кривой J, лежащей целиком в резольвентном множестве оператора A; для определенности предположим, что J — окружность, для которой отрезок $[\mu_1, \mu_2]$ служит диаметром.

В этом выводе z будет означать переменную точку контура J. Так как резольвента

$$R_z=(A-zI)^{-1}$$

отображает пространство $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{D}_A$, то оператор $(A_n-A)R_z$ определен всюду и, в силу (19),

$$\|(A_n-A)R_zf\| \leqslant \eta_n(\|R_zf\|+\|AR_zf\|) \leqslant c\eta_n\|f\|, \tag{20}$$

где c — наибольшее значение $\|R_z\|+\|AR_z\|$ на J; c удовлетворяет неравенству

$$c \leqslant \frac{1}{d}+\left(1+\frac{\rho}{d}\right),$$

где d — расстояние от J до спектра оператора A, а ρ — расстояние от J до точки 0[1]). Из (20) вытекает, что оператор

$$A_n-zI=(A-zI)+(A_n-A)=[I+(A_n-A)R_z](A-zI)$$

для тех z, для которых $c\eta_n<1$, имеет обратный

$$R_{nz}=(A_n-zI)^{-1}=R_z[I-(A-A_n)R_z]^{-1}=$$

$$=R_z\sum_{\nu=0}^{\infty}[(A-A_n)R_z]^\nu, \tag{21}$$

[1]) В самом деле, $\|R_z\|=\max\limits_\lambda\left|\frac{1}{\lambda-z}\right|$ и $\|AR_z\|=\max\limits_\lambda\left|\frac{\lambda}{\lambda-z}\right|=\max\limits_\lambda\left|1+\frac{z}{\lambda-z}\right|$, где λ пробегает спектр оператора A.

причем

$$\|R_{nz}-R_z\| = \left\| R_z \sum_{\nu=1}^{\infty} [(A-A_n)E_z]^{\nu} \right\| \leqslant \frac{1}{d} \sum_{\nu=1}^{\infty} (c\eta_n)^{\nu} =$$

$$= \frac{1}{d} \frac{c\eta_n}{1-c\eta_n} = \varkappa_n \to 0. \quad (22)$$

Операторы R_z и R_{nz} представляют собой непрерывные функции параметра z [1]), поэтому интегралы

$$P(J) = -\frac{1}{2\pi i} \int_J R_z\, dz, \quad P_n(J) = -\frac{1}{2\pi i} \int_J R_{nz}\, dz$$

имеют смысл. Если $|J|$ — длина окружности, то

$$\|P_n(J) - P(J)\| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_J \|R_{nz} - R_z\| \, |dz| \leqslant \frac{|J|}{2\pi} \varkappa_n \to 0.$$

Но

$$P(J) = -\frac{1}{2\pi i} \int_J dz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} dE_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_J \frac{1}{\lambda - z} dz \right) dE_\lambda,$$

и так как выражение в скобках, как функция λ, равно единице внутри J и равно нулю вне J, то $P(J) = E_{\mu_2} - E_{\mu_1} = E(\delta)$. Точно так же можно убедиться в том, что $P_n(J) = E_n(\delta)$. Таким образом,

$$E_n(\delta) \Rightarrow E(\delta) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Далее, если мы положим

$$A(\delta) = AE(\delta), \qquad A_n(\delta) = A_n E_n(\delta),$$

то, так как $AR_z = (A - zI + zI) R_z = I + zR_z$, будем иметь

$$A(\delta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_J AR_z\, dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_J (I + zR_z)\, dz,$$

$$A_n(\delta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_J (I + zR_{nz})\, dz,$$

$$\|A_n(\delta) - A(\delta)\| = \left\| -\frac{1}{2\pi i} \int_J z(R_{nz} - R_z)\, dz \right\| \leqslant \frac{\rho |J|}{2\pi} \varkappa_n \to 0.$$

Резюмируем полученные результаты:

Теорема. *Пусть $\{A_n\}$ — последовательность самосопряженных операторов, имеющих общую область определения $\mathfrak{D}$; пред-*

[1]) Это вытекает из соотношения $R_z - R_\zeta = (z-\zeta) R_z R_\zeta$, являющегося непосредственным следствием тождества $\frac{1}{\lambda - z} - \frac{1}{\lambda - \zeta} = \frac{z-\zeta}{(\lambda - z)(\lambda - \zeta)}$, и аналогичного соотношения для оператора R_{nz}, если учесть, что $\|R_z\| \leqslant 1/d$ на J и, в силу (21), $\|R_{nz}\| \leqslant \frac{1}{d} \frac{1}{1 - c\eta_n}$.

положим, что $\{A_n\}$ сходится на $\mathfrak{D}$ к некоторому самосопряженному оператору A „относительно равномерно", т. е.

$$\sup_f \frac{\|(A_n - A) f\|}{\|f\| + \|Af\|} \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty$$

(это имеет место, в частности, тогда, когда все A_n ограничены и стремятся к A равномерно). Если $\{E_{n\lambda}\}$ и $\{E_\lambda\}$ — соответствующие спектральные семейства, то

$$E_n(\delta) \Rightarrow E(\delta) \quad \textit{и} \quad A_n E_n(\delta) \Rightarrow AE(\delta)$$

для любого интервала $\delta = (\mu_1, \mu_2)$, концы которого не принадлежат спектру оператора A [1]).

Рассмотрим частный случай, когда интервал δ содержит *единственную точку λ_0 спектра A*, являющуюся *собственным значением оператора A конечной кратности m*. Соответствующий проекционный оператор $E(\delta)$ будет при этом иметь ранг m. Для тех значений n, для которых

$$\|E_n(\delta) - E(\delta)\| < 1,$$

проекционный оператор $E_n(\delta)$ также будет иметь ранг m (см. п. 105). Это означает, что при достаточно больших n та часть спектра оператора A_n, которая попадает в интервал δ, состоит из собственных значений с суммой кратностей, равной m. Так как интервал δ, содержащий точку λ_0, может быть выбран сколь угодно малым, то эти собственные значения операторов A_n стремятся к λ_0 при $n \to \infty$.

136. Аналитические возмущения. Ясно, что все сказанное в предыдущем пункте о последовательностях $\{A_n\}$ переносится на семейства $\{A(\varepsilon)\}$, зависящие от действительного параметра ε и обладающие тем свойством, что $A(\varepsilon) \to A$ при $\varepsilon \to 0$. Однако новые задачи возникают тогда, когда $A(\varepsilon)$ представляет собой

---

[1]) Изложенное здесь доказательство проведено по методу, принадлежащему С.-Надю [5]. Сама теорема была высказана Реллихом [3] (II); данное им доказательство, так же как доказательство С.-Надя [1], основано на следующем более общем предложении:

Если самосопряженные операторы A_n с общей областью определения $\mathfrak{D}$ стремятся „относительно равномерно" к самосопряженному оператору A и если $\{E_{n\lambda}\}$ и $\{E_\lambda\}$ — соответствующие спектральные семейства, то $E_{n\lambda} \Rightarrow E_\lambda$ в любой точке λ, не принадлежащей спектру оператора A.

В указанных работах эта теорема доказана только для ограниченных A_n и A. Для общего случая, когда операторы могут быть неограниченными, теорема доказана позднее Хайнцом [1]. Его доказательство основано на формуле

$$E_{n\lambda} = \frac{1}{2} I - \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda - i\infty}^{\lambda + i\infty} R_{nz}\, dz$$

и требует весьма тонких выкладок.

аналитическую функцию, регулярную в окрестности 0. Естественно поставить вопрос, не является ли спектр оператора $A(\varepsilon)$ в каком-то смысле аналитической функцией параметра ε? Этот вопрос имеет значительный интерес, так как к нему сводятся задачи „теории возмущений" в волновой механике[1]).

Итак, предположим, что $A(\varepsilon)$ представится в виде ряда

$$A+\varepsilon A^{(1)}+\varepsilon^2 A^{(2)}+\ldots, \tag{23}$$

коэффициенты которого $A^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots)$ представляют собой симметричные операторы, имеющие ту же область определения, что и „невозмущенный" самосопряженный оператор $A=A(0)$. Допустим далее, что выполняются неравенства

$$\|A^{(k)}f\| \leqslant \frac{M}{r^{k-1}}(\|f\|+\|Af\|) \quad (k=1, 2, \ldots), \tag{24}$$

обеспечивающие сходимость ряда (23) в круге $|\varepsilon|<r$; сумма ряда, т. е. $A(\varepsilon)$, очевидно, является симметричным оператором.

Пусть $\delta=(\mu_1, \mu_2)$ — интервал, несущий изолированную часть спектра оператора A. Контур J и числа d, ρ, c пусть будут такими же, как в предыдущем пункте; тогда для значений z на контуре J будет выполняться условие

$$\|R_z\| \leqslant \frac{1}{d}$$

и, в силу (24),

$$\|A^{(k)}R_z\| \leqslant \frac{Mc}{r^{k-1}}.$$

Отсюда следует, что ряд

$$R_z(\varepsilon)=[A(\varepsilon)-zI]^{-1}=R_z\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k A^{(k)}R_z\right)^{\nu} \tag{25}$$

мажорируется по норме числовым рядом

$$\frac{1}{d}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\frac{Mc}{r^{k-1}}\right)^{\nu}.$$

Этот последний сходится при

$$|\varepsilon|<\frac{r}{1+Mcr},$$

и для таких значений его можно представить в виде ряда по

---

[1]) Впервые строгая математическая теория аналитических возмущений была разработана Реллихом [3] (I, III, IV, V). Более простой и общий метод, с которым мы здесь знакомим читателя, предложил С.-Надь [5]. Этот метод, слегка видоизмененный, применим частично даже к произвольным замкнутым несамосопряженным операторам; см. С.-Надь [9].

степеням ε:

$$\frac{1}{d}+\frac{Mc}{d}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\left(\frac{1}{r}+Mc\right)^{n-1}.$$

Таким образом, для этих значений ε разложение (25) справедливо. Более того, правая часть (25) может быть расположена по степеням ε:

$$R_z(\varepsilon)=R_z+\varepsilon R_z^{(1)}+\varepsilon^2 R_z^{(2)}+\ldots;$$

при этом

$$\|R_z^{(k)}\|\leqslant\frac{Mc}{d}\left(\frac{1}{r}+Mc\right)^{k-1}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

В частности, $R_{\mu_1}(\varepsilon)=[A(\varepsilon)-\mu_1 I]^{-1}$ представляет собой ограниченный оператор, а так как он симметричен, то обратный ему оператор $A(\varepsilon)-\mu_1 I$, а следовательно, и $A(\varepsilon)$ являются самосопряженными. Обозначим спектральные семейства операторов $A=A(0)$ и $A(\varepsilon)$ соответственно $\{E_\lambda\}$ и $\{E_\lambda(\varepsilon)\}$; положив

$$E(\delta)=E_{\mu_2}-E_{\mu_1},\qquad E(\delta;\ \varepsilon)=E_{\mu_2}(\varepsilon)-E_{\mu_1}(\varepsilon)$$

и

$$A(\delta;\ \varepsilon)=A(\varepsilon)\,E(\delta;\ \varepsilon),$$

получим [1])

$$E(\delta;\ \varepsilon)=-\frac{1}{2\pi i}\int_J R_z(\varepsilon)\,dz=E(\delta)+\varepsilon E^{(1)}+\varepsilon^2 E^{(2)}+\ldots$$

и

$$A(\delta;\ \varepsilon)=-\frac{1}{2\pi i}\int_J [I+zR_z(\varepsilon)]\,dz=AE(\delta)+\varepsilon B^{(1)}+\varepsilon^2 B^{(2)}+\ldots,$$

где

$$E^{(k)}=-\frac{1}{2\pi i}\int_J R_z^{(k)}\,dz,\qquad B^{(k)}=-\frac{1}{2\pi i}\int_J zR_z^{(k)}\,dz\quad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

Ряды, представляющие $E(\delta;\ \varepsilon)$ и $A(\delta;\ \varepsilon)$, сходятся по норме; их коэффициенты можно оценить с помощью неравенств, которым подчинены $R_z^{(k)}$.

Допустим, что δ содержит *единственную* точку $\lambda^{(0)}$, принадлежащую спектру оператора A, и эта точка является *простым собственным значением*. Пусть $\varphi^{(0)}$ — соответствующий нормированный собственный элемент. При достаточно малом ε, а именно, таком, что

$$\|E(\delta;\ \varepsilon)-E(\delta)\|\leqslant 1,$$

$E(\delta,\ \varepsilon)$ представляет собой проекционный оператор, которому соответствует некоторое одномерное подпространство, следова-

---

[1]) Хайнц [1] доказал, что *при любом λ, не принадлежащем спектру оператора A, $E_\lambda(\varepsilon)$ разлагается в ряд по степеням ε, сходящийся при достаточно малых $|\varepsilon|$*. Из этого предложення вытекает, очевндно, что нашн $E(\delta;\ \varepsilon)$ также разлагаются в ряды по степеням ε.

тельно, δ содержит единственную точку $\lambda(\varepsilon)$ спектра оператора $A(\varepsilon)$ и эта точка является простым собственным значением; $\psi(\varepsilon)=E(\delta;\ \varepsilon)\psi^{(0)}$ будет собственным элементом, соответствующим этому собственному значению, т. е.

$$A(\varepsilon)\psi(\varepsilon)=\lambda(\varepsilon)\psi(\varepsilon).$$

Отсюда вытекает, что

$$\lambda(\varepsilon)=\frac{(A(\delta;\ \varepsilon)\varphi^{(0)},\ \varphi^{(0)})}{(E(\delta;\ \varepsilon)\varphi^{(0)},\ \varphi^{(0)})}=\frac{\lambda^{(0)}+\varepsilon(B^{(1)}\varphi^{(0)},\ \varphi^{(0)})+\varepsilon^2(B^{(2)}\varphi^{(0)},\ \varphi^{(0)})+\ldots}{1+\varepsilon(E^{(1)}\varphi^{(0)},\ \varphi^{(0)})+\varepsilon^2(E^{(2)}\varphi^{(0)},\ \varphi^{(0)})+\ldots}$$

и, следовательно,

$$\lambda(\varepsilon)=\lambda^{(0)}+\varepsilon\lambda^{(1)}+\varepsilon^2\lambda^{(2)}+\ldots \tag{26}$$

для достаточно малых $|\varepsilon|$. Так как функция

$$\|\psi(\varepsilon)\|^2=(E(\delta;\ \varepsilon)\varphi^{(0)},\ \varphi^{(0)})$$

регулярна в точке $\varepsilon=0$ и $\|\psi(0)\|^2=1$, то и

$$\varphi(\varepsilon)=\frac{\psi(\varepsilon)}{\|\psi(\varepsilon)\|}$$

регулярна в той же точке:

$$\varphi(\varepsilon)=\varphi^{(0)}+\varepsilon\varphi^{(1)}+\varepsilon^2\varphi^{(2)}+\ldots; \tag{27}$$

коэффициенты $\varphi^{(k)}$ этого ряда представляют собой элементы пространства $\mathfrak{H}$. Собственный элемент $\varphi(\varepsilon)$ *нормирован*; более того,

$$(\varphi(\varepsilon),\ \varphi^{(0)})=\frac{(E(\delta;\ \varepsilon)\varphi^{(0)},\ \varphi^{(0)})}{\|\psi(\varepsilon)\|}\geqslant 0,$$

т. е. он нормирован также „по фазе".

Когда *существование* разложений (26) и (27) установлено, коэффициенты $\lambda^{(k)}$ и $\varphi^{(k)}$ вычисляются последовательно с помощью системы уравнений, которая получится, если приравнять соответствующие коэффициенты в правой и левой частях уравнений

$$A(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)=\lambda(\varepsilon)\varphi(\varepsilon),\qquad (\varphi(\varepsilon),\ \varphi(\varepsilon))=1;$$

при этом следует иметь в виду, что, в силу $(\varphi(\varepsilon),\ \varphi^{(0)})\geqslant 0$, все числа $(\varphi^{(k)},\ \varphi^{(0)})$ действительны. В частности,

$$\lambda^{(1)}=(A^{(1)}\varphi^{(0)},\ \varphi^{(0)}).$$

Перейдем теперь к более общему случаю, когда *единственной* точкой спектра оператора A, принадлежащей интервалу δ, является собственное значение *конечной кратности* m. Мы докажем следующее предложение:

Теорема. *Если единственной точкой спектра оператора A, попавшей в интервал δ, является собственное значение $\lambda^{(0)}$ конечной кратности m, то при достаточно малых $|\varepsilon|$ существуют*

m действительных функций

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda_i^{(1)} + \varepsilon^2\lambda_i^{(2)} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

и m элементов пространства $\mathfrak{H}$

$$\varphi_i(\varepsilon) = \varphi_i^{(0)} + \varepsilon\varphi_i^{(1)} + \varepsilon^2\varphi_i^{(2)} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

таких, что часть спектра оператора $A(\varepsilon)$, попавшая в интервал δ, состоит из собственных значений, равных $\lambda_i(\varepsilon)$, каждое из которых считается столько раз, какова его кратность, а $\varphi_i(\varepsilon)$ образуют ортонормированную систему соответствующих собственных элементов.

Для $m = 1$ это предложение доказано выше. Воспользуемся методом индукции и покажем, что если это предложение верно для кратностей, меньших m, то оно верно и тогда, когда кратность собственного значения равна m.

Для упрощения записи положим $E(\delta) = P$ и $E(\delta;\ \varepsilon) = P(\varepsilon)$; соответствующие этим проекционным операторам подпространства обозначим $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}(\varepsilon)$. Тогда, когда $\|P(\varepsilon) - P\| < 1$, подпространства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ имеют одинаковую размерность m и, как было показано в п. 105, оператор

$$U(\varepsilon) = P(\varepsilon)[I + P(P(\varepsilon) - P)P]^{-1/2}P$$

изометрично отображает $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}(\varepsilon)$. Обратное отображение осуществляется оператором $U^*(\varepsilon) = [U(\varepsilon)]^*$. Если рассматривать их во всем пространстве $\mathfrak{H}$, то операторы $U(\varepsilon)$ и $U^*(\varepsilon)$ оказываются лишь „частично изометричными“ (см. п. 110); эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$U^*(\varepsilon)\,U(\varepsilon) = P \quad \text{и} \quad U(\varepsilon)\,U^*(\varepsilon) = P(\varepsilon).$$

При малых ε справедливы представления

$$U(\varepsilon) = P + \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \ldots, \qquad U^*(\varepsilon) = P + \varepsilon U^{(1)*} + \varepsilon^2 U^{(2)*} + \ldots.$$

Для того чтобы их получить, следует разложить $[I + P(P(\varepsilon) - P)P]^{-1/2}$ в биномиальный ряд, подставить в него ряд, представляющий $P(\varepsilon)$, и затем расположить результат по степеням ε; законность этих формальных операций можно оправдать, построив сходящиеся мажорантные ряды.

Теперь рассмотрим ограниченный самосопряженный оператор

$$C(\varepsilon) = U^*(\varepsilon)\,A(\delta;\ \varepsilon)\,U(\varepsilon) = U^*(\varepsilon)\,A(\varepsilon)\,P(\varepsilon)\,U(\varepsilon) = U^*(\varepsilon)\,A(\varepsilon)\,U(\varepsilon);$$

он также представляет собой регулярную функцию параметра ε:

$$C(\varepsilon) = C^{(0)} + \varepsilon C^{(1)} + \varepsilon^2 C^{(2)} + \ldots.$$

Оператор $C(\varepsilon)$ отображает подпространство $\mathfrak{M}$ само в себя и обращает в нуль элементы, ортогональные $\mathfrak{M}$. Теми же свойствами обладают, следовательно, коэффициенты $C^{(k)}$. При этом, в частности,

$$C^{(0)} = U^*(0)\,A\,(0)\,U\,(0) = PAP = \lambda^{(0)}P.$$

Может случиться, что все коэффициенты $C^{(k)}$ пропорциональны P, т. е.

$$C^{(k)} = \lambda^{(k)}P \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

тогда

$$C(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\,P,$$

где

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda^{(1)} + \varepsilon^2\lambda^{(2)} + \ldots.$$

Так как вообще

$$U(\varepsilon)\,C(\varepsilon) = U(\varepsilon)\,U^*(\varepsilon)\,A(\varepsilon)\,U(\varepsilon) = P(\varepsilon)\,A(\varepsilon)\,U(\varepsilon) = A(\varepsilon)\,U(\varepsilon), \quad (28)$$

то в этом случае

$$A(\varepsilon)\,U(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\,U(\varepsilon)\,P = \lambda(\varepsilon)\,U(\varepsilon).$$

Выберем в $\mathfrak{M}$ какую-нибудь полную ортонормированную систему $\{\varphi_i^{(0)}\}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$. Так как $U(\varepsilon)$ изометрично отображает $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}(\varepsilon)$, то элементы $\varphi_i(\varepsilon) = U(\varepsilon)\,\varphi_i^{(0)}$ образуют полную ортонормированную систему в $\mathfrak{M}(\varepsilon)$ и, в силу (28), все они являются собственными элементами оператора $A(\varepsilon)$, соответствующими собственному значению $\lambda(\varepsilon)$. Таким образом, в рассматриваемом случае собственное значение $\lambda^{(0)}$ не „расщепляется“ на собственные значения меньшей кратности, а только смещается в точку $\lambda(\varepsilon)$. Собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ и соответствующие собственные элементы $\varphi_i(\varepsilon)$, очевидно, представляют собой регулярные аналитические функции параметра ε.

Теперь рассмотрим случай, когда некоторые коэффициенты $C^{(k)}$ не пропорциональны P; пусть $C^{(s)}$ $(s \geqslant 1)$ — первый из таких коэффициентов. Таким образом, $C^{(k)} = \lambda^{(k)}P$ при $k < s$. Положим

$$D(\varepsilon) = C^{(s)} + \varepsilon C^{(s+1)} + \ldots.$$

Первый коэффициент $D(0) = C^{(s)}$, если рассматривать его как самосопряженный оператор в m-мерном пространстве $\mathfrak{M}$, не пропорционален тождественному оператору, следовательно, он имеет по крайней мере два различных собственных значения. Пусть $\varkappa_1,\ \varkappa_2,\ \ldots,\ \varkappa_n$ — все его собственные значения, а $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n$ $(m_1 + m_2 + \ldots + m_n = m)$ — их кратности. Так как каждое $\varkappa_i$ является изолнрованной точкой спектра и кратность его меньше m, то, по индуктивному предположению, для каждого из них теорема справедлива. Следовательно, существует m действительных чисел $\varkappa_i(\varepsilon)$ и m взаимно ортогональных единичных элементов $\psi_i(\varepsilon)$ в $\mathfrak{M}$, регулярно зависящих от ε в некоторой окрестности $\varepsilon = 0$, таких, что

$$\varkappa_i^{(0)} = \varkappa_1 \text{ при } i \leqslant m_1,\quad \varkappa_i^{(0)} = \varkappa_2 \text{ при } m_1 < i \leqslant m_1 + m_2,\ \ldots$$

и

$$D(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon) = \varkappa_i(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Отсюда следует, что

$$C(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon) = \left(\sum_{k=0}^{s-1} \varepsilon^k \lambda^{(k)} P + \varepsilon^s D(\varepsilon)\right)\psi_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{s-1} \varepsilon^k \lambda^{(k)} \psi_i(\varepsilon) + \varepsilon^s \varkappa_i(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon);$$

таким образом, положив

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda^{(1)} + \ldots + \varepsilon^{s-1}\lambda^{(s-1)} + \varepsilon^s \varkappa_i(\varepsilon),$$

мы получим

$$C(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon) = \lambda_i(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon),$$

откуда, в силу (28), будем иметь

$$A(\varepsilon)U(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon) = \lambda_i(\varepsilon)U(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon).$$

Числа $\lambda_i(\varepsilon)$ и элементы $\varphi_i(\varepsilon) = U(\varepsilon)\psi_i(\varepsilon)$ обладают теми свойствами, которые перечислены в теореме; на этом доказательство заканчивается.

Собственное значение *бесконечной* кратности может превратиться в непрерывный спектр. Так, например, оператор

$$A(\varepsilon)f(x) = \varepsilon x f(x)$$

в пространстве $L^2(-1, 1)$ при $\varepsilon = 0$ имеет изолированное собственное значение 0, а при $\varepsilon > 0$ — непрерывный спектр, заполняющий отрезок $-\varepsilon \leqslant \lambda \leqslant \varepsilon$.

Заметим, что наши рассуждения применимы и в случае простого изолированного собственного значения тогда, когда операторы зависят от нескольких параметров и могут быть представлены в виде степенных рядов по этим параметрам. В случае же кратного собственного значения мы бы столкнулись с таким затруднением: если в правой части разложения

$$C(\varepsilon, \eta) = C^{(0,0)} + \varepsilon C^{(1,0)} + \eta C^{(0,1)} + \varepsilon^2 C^{(2,0)} + \varepsilon\eta C^{(1,1)} + \eta^2 C^{(0,2)} + \ldots$$

не все коэффициенты пропорциональны оператору P, то нам не удастся, вообще говоря, построить оператор, аналогичный $D(\varepsilon)$. В этом случае теорема даже неверна, как можно показать на примере: оператор в двумерном пространстве с матрицей

$$\varepsilon\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \eta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения

$$\varepsilon + \eta \pm \sqrt{2}\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2},$$

которые, как функции от ε и η, нерегулярны в точке $\varepsilon = \eta = 0$.