Глава X

ГРУППЫ И ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

137. Теорема Стоуна. Пусть U — унитарный оператор в гильбертовом пространстве и

$$U = \int_0^1 e^{2\pi i\varphi} \, dE_\varphi$$

— его спектральное разложение (где $E_0 = 0$; см. п. 109). Тогда

$$U^n = \int_0^1 e^{2\pi i n\varphi} \, dE_\varphi$$

для любого целого n, положительного или отрицательного. Поэтому естественно определить оператор U^t при произвольном действительном t посредством равенства

$$U^t = \int_0^1 e^{2\pi i t\varphi} \, dE_\varphi. \tag{1}$$

Семейство унитарных операторов $\{U^t\}$, построенное таким образом, обладает следующими свойствами:

$$U^0 = I, \quad U^t U^s = U^{t+s}$$

и

$$U^s \Rightarrow U^t \quad \text{при} \quad s \to t.$$

Поставим обратную задачу. Предположим, что нам задано семейство $\{T_t\}$ $(-\infty < t < \infty)$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве, обладающее следующими свойствами:

$$T_0 = I, \quad T_t T_s = T_{t+s};$$

назовем такое семейство *однопараметрической группой операторов.* Допустим далее, что T_t зависит от t непрерывно, т. е., когда $s \to t$, оператор T_s стремится к T_t в том или ином смысле — равномерно, сильно или слабо. При этом слабая непрерывность означает, что $(T_t f, g)$ представляет собой непрерывную функцию переменного t при любом выборе f и g. Задача будет состоять в том, чтобы любую непрерывную однопараметрическую группу *унитарных* операторов $\{U_t\}$ представить посредством интеграла вида (1) на каком-нибудь конечном или бесконечном интервале.

Стоун установил, что такое представление возможно в предположении *слабой* непрерывности, если не требовать, чтобы соответствующие спектральные семейства были заданы на конечном отрезке $[0, 1]$. Заметим еще, что в этих условиях слабая непрерывность U_t влечет за собой непрерывность сильную, в силу теоремы, доказанной в п. 29, согласно которой из $f_n \to f$ и $\|f_n\| \to \|f\|$ следует $f_n \to f$.

Рассмотрим сначала частный случай, когда U_t является *периодической* функцией, хотя бы с периодом 1, т. е. $U_1 = U_0 = I$, откуда уже вытекает, что

$$U_{t+1} = U_t U_1 = U_t I = U_t.$$

Покажем, что в этом случае U_t имеет представление, подобное ряду Фурье:

$$U_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} P_n, \tag{2}$$

где коэффициенты P_n представляют собой проекционные операторы, попарно ортогональные и в сумме дающие I, которые можно вычислять по обычным формулам

$$P_n = \int_a^{a+1} e^{-2\pi i n t} U_t \, dt, \tag{3}$$

если понимать их в „слабом" смысле, т. е. так, что

$$(P_n f, g) = \int_a^{a+1} e^{-2\pi i n t} (U_t f, g) \, dt. \tag{4}$$

Правая часть равенства (4) представляет собой, очевидно, ограниченную билинейную форму, поэтому существование ограниченного линейного оператора P_n, определяемого формулой (4), обеспечено основной теоремой, доказанной в п. 30. Оператор P_n *симметричен*, так как, в силу того, что $U_t^* = U_{-t}$,

$$P_n^* = \int_0^1 e^{2\pi i n t} U_{-t} \, dt = -\int_0^{-1} e^{-2\pi i n \tau} U_\tau \, d\tau = \int_{-1}^0 e^{-2\pi i n \tau} U_\tau \, d\tau = P_n.$$

Далее легко видеть, что

$$U_s P_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n t} S_{s+t} \, dt = e^{2\pi i n s} \int_s^{s+1} e^{-2\pi i n \tau} U_\tau \, d\tau = e^{2\pi i n s} P_n \tag{5}$$

и, следовательно,

$$P_m P_n = \int_0^1 e^{-2\pi i m t} U_t P_n \, dt = \int_0^1 e^{-2\pi i m t} e^{2\pi i n t} P_n \, dt = \begin{cases} P_n & \text{при} \quad m = n, \\ O & \text{при} \quad m \neq n. \end{cases}$$

Тем самым доказана взаимная ортогональность операторов P_k.

Остается показать, что сумма

$$P=\sum_{-\infty}^{\infty} P_n$$

равна I и справедливо разложение (2). Во всяком случае P и $Q=I-P$ представляют собой проекционные операторы, причем Q, очевидно, ортогонален всем P_n, следовательно,

$$\int_0^1 e^{-2\pi int}(U_tQf,\ g)\,dt=(P_nQf,\ g)=0 \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

каковы бы ни были элементы f и g. Таким образом, все коэффициенты Фурье *непрерывной* числовой функции $(U_tQf,\ g)$ равны нулю. Следовательно, она сама равна нулю тождественно. Отсюда вытекает, что

$$U_tQ=O, \qquad Q=U_{-t}U_tQ=O, \qquad P=I-Q=I.$$

Формула (2) прямо следует из равенства

$$I=\sum_{-\infty}^{\infty} P_n,$$

если умножить это последнее на U_t и воспользоваться соотношениями (5).

Разложению (2) можно придать интегральную форму

$$U_t=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dE_\lambda,$$

где $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство, определенное следующим образом:

$$E_\lambda=\sum_{n\leqslant\lambda/2\pi} P_n.$$

Из самого определения проекционных операторов P_n следует, что

$$P_n \smile\smile \{U_t\}.$$

Перейдем теперь к общему случаю, когда $U_1\neq I$. Положим

$$V_t=U_tU_1^{-t},$$

где степени U_1^t определены формулой (1), т. е.

$$U_1^t=\int_0^1 e^{2\pi it\varphi}\,dF_\varphi.$$

Оператор U_t, будучи перестановочен с U_1, а следовательно, и с F_φ, перестановочен также с U_1^t, поэтому

$$V_sV_t=V_{s+t}.$$

Далее, если $U_s \to U_t$ и $U_1^{-t} \Rightarrow U_1^{-s}$, то

$$V_s \to V_t$$

(см. п. 84). Наконец, $V_1 = I$. Согласно сказанному выше, V_t допускает представление

$$V_t = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} P_n,$$

следовательно,

$$U_t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} P_n U_1^t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n t} P_n \int_0^t e^{2\pi i t \varphi} dF_\varphi =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{2\pi i \mu t} dP_n F_{\mu-n},$$

или

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_\lambda,$$

где спектральное семейство $\{E_\lambda\}$ определяется формулой

$$E_{2\pi\mu} = \sum_{n<[\mu]} P_n + P_{[\mu]} F_{\mu-[\mu]}$$

($[\mu]$ означает наибольшее целое число $\leqslant \mu$). Из соотношений

$$F_\varphi \smile\smile U_1, \quad P_n \smile\smile \{V_t\}, \quad V_s \smile\smile \{U_t\}$$

следует, что

$$E_\lambda \smile\smile \{U_t\}.$$

Таким образом, доказана

Теорема Стоуна[1]. *Любая однопараметрическая группа унитарных операторов $\{U_t\}$ $(-\infty < t < \infty)$, для которой $(U_t f, g)$ при любом выборе элементов f и g является непрерывной функцией параметра t, допускает спектральное представление*

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dE_\lambda, \tag{6}$$

где $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство, такое, что $E_\lambda \smile\smile \{U_t\}$.

Спектральное семейство, определяемое формулой (6), *единственно*. В самом деле, из (6) следует, что если обобщенные тригонометрические многочлены

$$\pi_n(\lambda) = \sum_k a_{nk} e^{i\lambda t_k} \tag{7}$$

[1]) См. Стоун [1] (заметка 3) и [2]; И. Нейман [6]; Бохнер [2]; Рисс [15]; С.-Надь [2]; Иосида [2]. Приведенное выше доказательство принадлежит С.-Надю.

образуют ограниченную последовательность, сходящуюся к характеристической функции полупрямой $\lambda \leqslant \mu$[1]), то последовательность соответствующих операторов

$$\Pi_n = \sum_k a_{nk} U_{t_k}$$

сходится к E_λ. Попутно еще раз доказано, что $E_\lambda \smile\smile \{U_t\}$.

Заметим еще, что *в том случае, когда пространство $\mathfrak{H}$ сепарабельно, эта теорема справедлива при более слабом условии: функции $(U_t f, g)$ параметра t при любом выборе f и g измеримы в смысле Лебега.*

В самом деле, в том случае, когда $U_1 = I$, проекционные операторы P_n могут быть определены теми же формулами (4), только интегралы в них следует понимать в смысле Лебега. Свойства операторов P_n устанавливаются так же, за исключением того, что $\sum P_n = I$. Все коэффициенты Фурье функции $(U_t Qf, g)$ по-прежнему равны нулю, но теперь отсюда следует только, что $(U_t Qf, g) = 0$ *почти всюду*. Если элемент f фиксирован, а g пробегает последовательность, всюду плотную в $\mathfrak{H}$, то объединение множеств, на которых при различных g нарушается это равенство, будет иметь меру нуль. Поэтому найдутся значения t, при которых $(U_t Qf, g) = 0$ для всех g из всюду плотной последовательности, а следовательно, $U_t Qf = 0$, $Qf = U_t^{-1} U_t Qf = 0$. Так как это верно при любом фиксированном f, то $Q = O$.

Общий случай ($U_1 \neq I$) сводится к этому частному так же, как и выше. Нуждается в доказательстве только измеримость функции $(V_t f, g)$. Но это следует из разложения

$$(V_t f, g) = (U_t f, U_1^* g) = \sum_n (U_t f, \varphi_n)(\varphi_n, U_1^* g),$$

где $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормированная последовательность, так как сумма ряда измеримых функций сама измерима.

---

[1]) Существование такой последовательности может быть доказано следующим образом. Возьмем сначала какую-нибудь последовательность непрерывных периодических функций $\{f_n(\lambda)\}$, периоды которых неограниченно возрастают вместе с n, сходящуюся к указанному пределу; например, можно в качестве $f_n(\lambda)$ взять функцию с периодом $2n$, заданную в интервале $\mu - n \leqslant \lambda \leqslant \mu + n$, которая принимает значения

$$f_n(\mu - n) = 0, \quad f_n\left(\mu - n + \frac{1}{n}\right) = 1, \quad f_n(\mu) = 1,$$

$$f_n\left(\mu + \frac{1}{\mu}\right) = 0, \quad f_n(\mu + n) = 0$$

и линейна между этими точками. Если теперь равномерно приблизить функции $f_n(\lambda)$ тригонометрическими многочленами с такими же периодами с точностью до $\frac{1}{n}$, то полученная таким образом последовательность тригонометрических многочленов будет обладать требуемыми свойствами.

Вернемся к формуле (6); ее можно записать в виде

$$U_t = e^{itA},$$

где A — *самосопряженный* оператор,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda.$$

Он, или, точнее говоря, оператор iA, играет роль „бесконечно малого" производящего оператора в том смысле, в каком этот термин применяется в теории непрерывных групп, а именно,

$$iA = \lim_{h \to 0} \frac{U_h - I}{h}.$$

В самом деле, если f принадлежит области определения оператора A, то

$$\left\| \left(\frac{1}{h}(U_h - I) - iA \right) f \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{h}(e^{i\lambda h} - 1) - i\lambda \right|^2 d \, \| E_\lambda f \|^2 \to 0$$

при $h \to 0$, так как функция под знаком интеграла стремится к нулю и мажорируется функцией вида $K\lambda^2$, которая суммируема относительно $\|E_\lambda f\|^2$. Обратно, если элемент f таков, что существует

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(U_h - I) f,$$

то существует также

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{1}{h}(U_h - I) f \right\|^2 = \lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{h}(e^{i\lambda h} - 1) \right|^2 d \, \| E_\lambda f \|^2,$$

и так как функция под знаком интеграла имеет предел λ^2, то, согласно теореме Фату (см. п. 20), λ^2 суммируем относительно $\|E_\lambda f\|^2$ и, следовательно, f принадлежит области определения оператора A.

Таким образом, теорема Стоуна может быть сформулирована так:

Всякая непрерывная однопараметрическая группа унитарных операторов $\{U_t\}$ порождается некоторым бесконечно малым производящим оператором:

$$U_t = e^{itA}, \quad iA = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(U_h - I),$$

где A — самосопряженный оператор, вообще говоря, неограниченный. Если пространство $\mathfrak{H}$ сепарабельно, то группа $\{U_t\}$ оказывается непрерывной, коль скоро она измерима.

138. Доказательство, основанное на теореме Бохнера. Приведенное выше доказательство теоремы Стоуна, принадлежащее одному из авторов этой книги, опиралось на ряды Фурье. Более ранние доказательства (см. статьи, перечисленные в подстрочном примечании в предыдущем пункте) в той или иной мере основывались на теории интегралов Фурье. Бохнер в своем доказательстве опирается на теорему, которая в теории интегралов Фурье соответствует теореме о тригонометрических моментах (см. п. 53); здесь она приводится без доказательства.

Теорема Бохнера[1]. *Для того чтобы функция* $p(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ *допускала представление в виде*

$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dV(\lambda) \tag{8}$$

с действительной, неубывающей и ограниченной $V(\lambda)$, *необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной и положительно определенной, т. е. удовлетворяла условию*

$$\sum_{\mu,\, \nu=1}^{m} p(t_\mu - t_\nu)\, \rho_\mu \bar{\rho}_\nu \geqslant 0,$$

каковы бы ни были целое положительное число m, *действительные* $t_1, t_2, \ldots, t_m$ *и комплексные числа* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$.

Звеном, связывающим теоремы Стоуна и Бохнера, служит тот факт, что

$$p_f(t) = (U_t f, f)$$

является положительно определенной функцией; в самом деле,

$$\sum_{\mu,\, \nu=1}^{m} (U_{t_\mu - t_\nu} f, f)\, \rho_\mu \bar{\rho}_\nu = \left(\sum_{\mu=1}^{m} \rho_\mu U_{t_\mu} f,\ \sum_{\nu=1}^{m} \rho_\nu U_{t_\nu} f \right) \geqslant 0.$$

Согласно теореме Бохнера,

$$p_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dV_f(\lambda),$$

и так как

$$4\,(U_t f, g) = p_{f+g}(t) - p_{f-g}(t) + i p_{f+ig}(t) - i p_{f-ig}(t),$$

то

$$(U_t f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dV(f, g; \lambda), \tag{9}$$

где $V(f, g; \lambda)$ имеет ограниченное изменение. Если функцию V нормировать, потребовав, чтобы она стремилась к 0 при $\lambda \to -\infty$ и была всюду непрерывна справа, то $V(f, g; \lambda)$ будет однозначно определяться формулой (9). Действительно, если $\{\pi_n(\lambda)\}$ — после-

[1]) Бохнер [1] (§ 20).

довательность тригонометрических многочленов (7), а $\{\Pi_n\}$ — последовательность соответствующих операторов, то

$$(\Pi_n f,\ g) \to V(f,\ g;\ \mu).$$

Левая часть формулы (9) является билинейной формой относительно f и g, поэтому и $V(f,\ g;\ \lambda)$ — билинейная форма, притом ограниченная, так как, с одной стороны,

$$|V(f,\ g;\ \lambda)|^2 \leqslant V(f,\ f;\ \lambda)\,V(g,\ g;\ \lambda)$$

(неравенство Шварца для квадратичной формы $V(f, f;\ \lambda) = V_f(\lambda) \geqslant 0$), а с другой стороны, $V_f(\lambda)$ — неубывающая функция и

$$V_f(\lambda) \leqslant V_f(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dV_f(\lambda) = p_f(0) = \|f\|^2.$$

Следовательно, существует ограниченный линейный оператор E_λ, такой, что

$$V(f,\ g;\ \lambda) = (E_\lambda f,\ g)$$

(см. п. 84). Покажем, что $\{E_\lambda\}$ представляет собой спектральное семейство. Возьмем опять последовательность (7), сходящуюся к характеристической функции полупрямой $\lambda \leqslant \mu$. Из самого построения E_μ следует, что $\Pi_n \rightharpoonup E_\mu$. В действительности же $\Pi_n \to E_\mu$; для того чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что $\Pi_n - \Pi_m \to O$ при $m,\ n \to \infty$, а это вытекает из следующего соотношения между произвольным тригонометрическим многочленом $\pi(\lambda) = \sum c_k e^{i\lambda t_k}$ и соответствующим оператором $\Pi = \sum c_k U_{t_k}$:

$$\|\Pi f\|^2 = (\Pi^* \Pi f,\ f) = \left(\left(\sum_k \bar{c}_k U^*_{t_k}\right)\left(\sum_h c_h U_{t_h}\right) f,\ f\right) =$$

$$= \sum_k \sum_h \bar{c}_k c_h (U_{t_h - t_k} f,\ f) = \sum_k \sum_h \bar{c}_k c_h \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t_h - t_k)\lambda}\, d(E_\lambda f,\ f) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\pi(\lambda)|^2\, d(E_\lambda f,\ f).$$

Последовательности

$$\{\pi_n(\lambda)\},\quad \{\overline{\pi_n(\lambda)}\} \quad \text{и} \quad \{[\pi_n(\lambda)]^2\}$$

имеют один и тот же предел, поэтому не только $\Pi_n \to E_\mu$, но также

$$\Pi_n^* \to E_\mu \quad \text{и} \quad \Pi_n^2 \to E_\mu;$$

отсюда следует, что

$$E_\mu = E_\mu^* = E_\mu^2,$$

т. е. E_μ представляет собой проекционный оператор. Остальные свойства спектрального семейства проверяются непосредственно.

Таким образом, мы снова пришли к теореме Стоуна, по крайней мере в том случае, когда при любых f и g функция $(U_t f, g)$ *непрерывна* по t.

Если пространство $\mathfrak{H}$ сепарабельно и, кроме того, известно, что $(U_t f, g)$ *измеримы* по t, то можно воспользоваться уточненной формой теоремы Бохнера, согласно которой *измеримая положительно определенная функция* $p(t)$ *представима в виде* (8) *для почти всех* t[1]. Возможность нарушения равенства (8) для функций $p_f(t)=(U_t f, f)$ исключена, в силу группового свойства и сепарабельности $\mathfrak{H}$.

Однако *непрерывность* можно вывести из *измеримости* более прямым путем. Возьмем операторы

$$T_x=\int_0^x U_s\,ds,$$

определенные уравнениями

$$(T_x f, g)=\int_0^x (U_s f, g)\,ds.$$

Так как

$$(U_t T_x h, g)=(T_x h, U_{-t}g)=\int_0^x (U_s h, U_{-t}g)\,ds=$$
$$=\int_0^x (U_{t+s}h, g)\,ds=\int_t^{t+x} (U_\tau h, g)\,d\tau,$$

то функция $U_t f$ слабо (а следовательно, и сильно) непрерывна по t при любом $f=T_x h$. Но элементы f такого вида образуют всюду плотное множество в $\mathfrak{H}$. Действительно, в противном случае существовал бы элемент $g\neq 0$, такой, что

$$(T_x h, g)=\int_0^x (U_s h, g)\,ds=0$$

для всех h из $\mathfrak{H}$ и для всех значений x. Отсюда следовало бы, что $(U_s h, g)=0$ для всех s, кроме, может быть, некоторого множества E_h меры нуль (зависящего от h). Заставив h пробегать счетное всюду плотное множество в $\mathfrak{H}$, возьмем объединение E множеств E_h, соответствующих этим h; само E будет множеством меры нуль. Тогда для s, не принадлежащих E, т. е. по крайней мере для одного s_0, и для всех h из всюду плотного множества выполнялось бы тождество $(h, U_{s_0}^* g)=(U_{s_0} h, g)=0$, откуда вытекало бы $U_{s_0}^* g=0$ и $g=U_{s_0}U_{s_0}^* g=0$ в противоречии с предположением, что $g\neq 0$. Итак, элементы вида $T_x h$ всюду плотны. Но

---

[1]) Рисс [15]; см. также Хопф [1] (стр. 21).

тогда $U_t f$ непрерывно по t при всех f без исключения; в самом деле, если $\{f_n\}$ — последовательность элементов вида $T_x h$, сходящаяся к f, то последовательность непрерывных функций $\{U_t f_n\}$ сходится к $U_t f$ равномерно относительно t, так как $\|U_t f - U_t f_n\| = \|f - f_n\| \to 0$.

139. Некоторые применения теоремы Стоуна. Свое первое применение теорема Стоуна нашла в статистической механике, а именно в „эргодической теории".

Пусть Φ — „фазовое пространство" некоторой голономной механической системы. Каждая точка пространства Φ изображает некоторое возможное состояние системы. Пусть P_t $(-\infty < t < \infty)$ — точка, описывающая состояние системы в момент t в предположении, что в момент $t=0$ система находилась в состоянии P. Таким образом, в Φ задается некоторое непрерывное движение

$$P \to P_t.$$

С помощью дифференциальных уравнений Гамильтона—Якоби можно доказать, что мера в пространстве Φ, а следовательно, и интегралы инвариантны относительно такого движения, т. е.

$$\int_{\Phi} f(P)\,dv = \int_{\Phi} f(P_t)\,dv$$

для любой суммируемой функции $f(P)$ (теорема Лиувилля). Если Ω — поверхность постоянной энергии в пространстве Φ, то движение $P \to P_t$ преобразует Ω самое в себя. На поверхности Ω можно ввести инвариантную меру $d\sigma$; достаточно положить

$$d\sigma = \frac{dS}{|\operatorname{grad} H|},$$

где dS — элемент поверхности, а H — гамильтонова функция системы.

Купмену [1] принадлежала идея вместо непрерывного движения $P \to P_t$ на поверхности Ω рассмотреть линейный оператор

$$U_t f(P) = f(P_t)$$

на непрерывных функциях, квадраты которых суммируемы относительно инвариантной меры $d\sigma$. Так как интегралы функций $|f(P)|^2$ и $|f(P_t)|^2$ на Ω равны, то оператор U_t изометричен в смысле метрики пространства $L^2(\Omega)$ и для U_t существует обратный оператор, равный U_{-t}. Следовательно, U_t имеет изометричное расширение, заданное на всем $L^2(\Omega)$. Очевидное свойство движения, состоящее в том, что

$$P_{t+s} = (P_s)_t,$$

отражается на операторах U_t в виде

$$U_{t+s} = U_t U_s.$$

Наконец, если $f(P)$ — непрерывная функция точки P, то $f(P_t)$ непрерывна по совокупности аргументов P и t, и легко видеть, что $(U_t f, g)$ при любых f и g из $L^2(\Omega)$ является измеримой функцией от t.

Согласно теореме Стоуна,

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_\lambda,$$

откуда, в частиости, следует, что

$$M(a, T) f = \int_{-\infty}^{\infty} M(a, T; \lambda) dE_\lambda f,$$

где

$$M(a, T; \lambda) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} e^{it\lambda} dt, \quad M(a, T) f = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} U_t f \, dt,$$

причем последний интеграл понимается как предел соответствующих сумм римановского тнпа. При $T \to \infty$ функция $M(a, T; \lambda)$ имеет предел $\delta(\lambda)$, равный 1 для $\lambda = 0$ и 0 для $\lambda \neq 0$. Так как, кроме того, $|M(a, T; \lambda) - \delta(\lambda)| \leqslant 1$, то, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла,

$$\| M(a, T) f - E(0) f \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | M(a, T; \lambda) - \delta(\lambda) |^2 d \| E_\lambda f \|^2 \to 0,$$

каков бы ни был элемент f из $L^2(\Omega)$. Если f непрерывна, то $M(a, T) f = g_{a, T}$, где $g_{a, T}(P)$ — среднее значение функции f по времени за промежуток $a \leqslant t \leqslant a + T$:

$$g_{a, T}(P) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(P_t) \, dt.$$

Итак, $g_{a, T}$ при $T \to \infty$ сходятся в среднем к элементу $f^* = E(0) f$ пространства $L^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega | g_{a, T}(P) - f^*(P) |^2 d\sigma \to 0.$$

Далее,

$$U_t f^* = U_t E(0) f^* = E(0) f^* = f^*,$$

т. е. $f^*(P_t) = f^*(P)$, если $f^*(P)$ непрерывна. То же верно и в общем случае, по крайней мере для почти всех P; в этом можно убедиться, аппроксимируя $f^*(P)$ непрерывными функциями. Таким образом, мы приходим к „статистической эргодической теореме" И. Неймана [7], утверждающей, что среднее по времени функции $f(P_t)$ прн $T \to \infty$ стремится „статистически", т. е. в смысле среднего квадратичного, к некоторому пределу $f^*(P)$, „почти инвариантному" относительно движения $P \to P_t$.

Эту теорему легко распространить на произвольные функции $f(P)$, принадлежащие $L^2(\Omega)$; вместо непрерывности движения $P \longrightarrow P_t$ достаточно предполагать, что оно „измеримо“ и сохраняет меру произвольного измеримого подмножества множества Ω (см. Хопф [1]).

Впоследствии был предложен ряд прямых доказательств этой теоремы и ее обобщений в различных направлениях; мы еще займемся ими в п. 144—146.

Семейства операторов вида $U_t = e^{itA}$ встречаются также в квантовой механике. Волновая функция Шрёдингера для системы частиц удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = H\varphi;$$

здесь H — оператор энергии, действующий на функцию координат $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; он порождает некоторый самосопряженный оператор в пространстве L^2 функций, заданных в пространстве конфигураций рассматриваемой системы; h в этом уравнении означает постоянную Планка. Если волновую функцию, соответствующую системе в момент t, обозначить $\varphi(x, t)$, то из исходного дифференциального уравнения можно получить соотношение [1])

$$\varphi(x, t) = e^{\frac{2\pi i t}{h} H} \varphi(x, 0).$$

140. Унитарные представления более общих групп. Однопараметрическую группу унитарных операторов, о которой говорится в теореме Стоуна, можно рассматривать как *представление* (не обязательно изоморфное) группы переносов $x \longrightarrow x + t$ оси x. С другой стороны, функция $e^{i\lambda t}$, стоящая под знаком интеграла, при фиксированном λ является *характером* той же группы, т. е. ее представлением посредством комплексных чисел с модулем 1.

В связи с этим можно поставить задачу изучить представления того же типа посредством *унитарных* операторов групп G более общей природы. Такого рода представления возможны в случае, когда G представляет собой *локально бикомпактную топологическую группу*, т. е. каждая ее точка обладает окрестностью, для замыкания которой справедлива теорема Бореля о покрытии. Глубокое изучение таких групп стало возможным благодаря теореме Хаара [2]), утверждающей существование в локально компактной группе G некоторой левоинвариантной и некоторой, вообще говоря другой, правоинвариантной меры; *мера* $\mu(E)$ называется *левоинвариантной* или *правоинвариантной*, если

$$\mu(a \cdot E) = \mu(E)$$

[1]) См. И. Нейман [3] (в частности, стр. 108); см. также Купер [2].

[2]) Хаар [2]; см. также заметку Банаха в конце книги Сакса [2], [3]; см., кроме того, А. Вейль [1] (стр. 30—45).

или соответственно
$$\mu(E\cdot a)=\mu(E),$$
где a — произвольный элемент группы G, а $a\cdot E$ и $E\cdot a$ означают соответственно множества элементов вида $a\cdot x$ и $x\cdot a$, когда x пробегает измеримое множество E. Иначе этот факт можно выразить, сказав, что существуют функционалы A_1f и A_2f, заданные на непрерывных функциях, каждая из которых отлична от нуля лишь на некотором бикомпактном подмножестве группы G, причем эти функционалы аддитивны, однородны и, кроме того, обладают тем свойством, что
$$A_1f>0 \quad \text{и} \quad A_2f>0 \quad \text{при} \quad f(x)\geqslant 0, \quad f(x)\not\equiv 0.$$
Далее, эти функционалы инвариантны соответственно слева и справа, т. е.
$$A_1f(a\cdot x)=A_1f(x), \qquad A_2f(x\cdot a)=A_2f(x)$$
для всех элементов a группы G.

В частном случае, когда группа G *абелева*, Понтрягин[1]) показал с помощью инвариантной меры Хаара, что *непрерывные характеры* группы G, т. е. непрерывные комплексные функции $\chi(x)$ на G, такие, что $|\chi(x)|=1$ и
$$\chi(x)\,\chi(y)=\chi(x\cdot y)$$
для любых x и y из G, образуют группу Γ по умножению
$$(\chi_1\cdot\chi_2)(x)=\chi_1(x)\,\chi_2(x).$$

Эта группа Γ также локально бикомпактна в „слабой" или, как ее иначе называют, тихоновской топологии, когда произвольная окрестность
$$V(\chi_0)=V(\chi_0;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \varepsilon)$$
„точки" χ_0 определяется как совокупность характеров χ, удовлетворяющих неравенствам
$$|\chi(x_k)-\chi_0(x_k)|<\varepsilon \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$
где x_1, x_2, ..., x_n — заданные элементы группы G в конечном числе, ε — заданное положительное число. Далее, отношение между G и Γ взаимное, т. е. G изоморфна группе непрерывных характеров группы Γ. Тогда, когда G представляет собой группу переносов числовой оси, Γ изоморфна и гомеоморфна группе G, но в общем случае это не так.

С помощью перечисленных теорем А. Вейль[2]) обобщил теорему Бохнера на непрерывные положительно определенные функции $p(x)$, заданные на произвольной локально бикомпактной абелевой

[1]) См., например, А. Вейль [1] (стр. 94—109).
[2]) См. А. Вейль [1] (стр. 1Н—123).

группе G. Предположение, что функция $p(x)$ положительно определенна, означает в этом случае, что

$$\sum_{i,\, k=1}^{m} p(x_k^{-1}\cdot x_i)\,\rho_i\bar{\rho}_k \geqslant 0$$

при любом выборе целого положительного числа m, элементов группы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и комплексных чисел $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$. Вейль показал, что *в группе характеров* Γ *существует функция* $m(A)\geqslant 0$, *заданная на всевозможных B-измеримых множествах* $A\subseteq\Gamma$, *счетно-аддитивная, вполне конечная* (т. е. $m(\Gamma)<\infty$) *и, наконец, обладающая тем свойством, что*

$$p(x)=\int_{\Gamma}\chi(x)\,m(d\chi);$$

этими свойствами мера $m(A)$ *определяется однозначно.* На языке линейных функциоиалов это означает, что *в пространстве* $C(\Gamma)$ *функций* $f(\chi)$, *ограниченных и непрерывных на* Γ, *существует положительный линейный функционал* $L(f)$, *притом единственный, обладающий тем свойством, что*

$$p(x)=L(f_x),$$

где

$$f_x(\chi)=\chi(x).$$

Эта теорема позволяет следующим образом обобщить теорему Стоуна [1]):

Теорема. *Пусть* $\{U_x\}$ — *(слабо) непрерывное представление локально бикомпактной абелевой группы* G *посредством унитарных операторов в гильбертовом пространстве, т. е.*

$$U_e=I,\quad U_xU_y=U_{xy},$$

где e — *единичный элемент, а* x, y — *произвольные элементы группы* G, *и* $(U_xf,\, g)$ *при любом выборе элементов* f *и* g *гильбертова пространства представляет собой непрерывную функцию от* x. *Тогда на группе характеров* Γ *существует спектральное семейство* $\{E(A)\}$, *к тому же единственное, такое, что*

$$U_x=\int_{\Gamma}\chi(x)\,E(d\chi);$$

при этом $E(A)\smile\!\smile\{U_x\}$.

Точный смысл утверждения этой теоремы таков: $E(A)$ есть проекционный оператор, представляющий собой счетно-аддитивную мультипликативную функцию B-измеримого множества $A\subseteq\Gamma$, и при любом выборе $\varepsilon>0$ и элемента x группы G существует разбиение группы Γ на конечное число непересекающихся боре-

1) Наймарк [2]; Эмброз [1]; Годеман [1].

левских множеств A_n, при котором

$$\left\| U_x - \sum_n \chi_n(x) E(A_n) \right\| < \varepsilon,$$

где χ_n — произвольная „точка" множества A_n.

Предметом важных исследований служила задача унитарного представлеиия *неабелевых локально бикомпактных* групп. Основной результат в этом направлении, полученный Гельфандом и Райковым[1]), состоит в том, что *всякая такая группа имеет полную систему неприводимых унитарных представлений*. Представление группы G посредством унитарных операторов U_x в гильбертовом пространстве называется *неприводимым*, если в этом пространстве нет подпространства (в собственном смысле слова), конечномерного или бесконечномерного, которое было бы инвариантно относительно всех U_x. Система представлений называется *полной*, если для любого элемента x_0 группы G, отличного от e, найдется хотя бы одно представление U_x, такое, что $U_{x_0} \neq U_e = I$. Упомянутый результат обобщает, по крайней мере частично, классические результаты Петера и Г. Вейля, относящиеся к представлению компактных групп посредством конечных унитарных матриц[2]).

§ 2. НЕУНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

141. Группы и полугруппы самосопряженных операторов. Вернемся к однопараметрическим группам операторов T_t $(-\infty < t < \infty)$, но не будем теперь предполагать, что T_t унитарны. Мы рассмотрим также *полугруппы* операторов, т. е. такие семейства операторов $\{T_t\}$, заданных только для $t \geqslant 0$, для которых

$$T_0 = I, \quad T_s T_t = T_{s+t} \quad (s \geqslant 0, \quad t \geqslant 0).$$

Очевидно, что если все операторы, принадлежащие полугруппе, имеют обратные, то, положив $T_{-t} = T_t^{-1}$, мы получим однопараметрическую группу, служащую продолжением исходной полугруппы.

Рассмотрим сначала полугруппы ограниченных симметричных операторов $\{A_t\}$. Все A_t положительны, так как $A_t = A_{\frac{t}{2}}^2 \geqslant O$.

Покажем, что функции

$$h_f(t) = \log(A_t f, f) = \log \left\| A_{\frac{t}{2}} f \right\|^2$$

выпуклы, т. е.

$$h_f\left(\frac{s+t}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left[h_f(s) + h_f(t)\right].$$

[1]) Гельфанд и Райков [1]; см. также Годеман [2], [3]; Сегал [1]; Маутнер [1].

[2]) Современное изложение результата Петера и Г. Вейля читатель найдет в книге А. Вейля [1] (стр. 94—109).