левских множеств A_n, при котором

$$\left\| U_x - \sum_n \chi_n(x) E(A_n) \right\| < \varepsilon,$$

где χ_n — произвольная „точка“ множества A_n.

Предметом важных исследований служила задача унитарного представлеиия *неабелевых локально бикомпактных* групп. Основной результат в этом направлении, полученный Гельфандом и Райковым[1]), состоит в том, что *всякая такая группа имеет полную систему неприводимых унитарных представлений*. Представление группы G посредством унитарных операторов U_x в гильбертовом пространстве называется *неприводимым*, если в этом пространстве нет подпространства (в собственном смысле слова), конечномерного или бесконечномерного, которое было бы инвариантно относительно всех U_x. Система представлений называется *полной*, если для любого элемента x_0 группы G, отличного от e, найдется хотя бы одно представление U_x, такое, что $U_{x_0} \neq U_e = I$. Упомянутый результат обобщает, по крайней мере частично, классические результаты Петера и Г. Вейля, относящиеся к представлению компактных групп посредством конечных унитарных матриц[2]).

§ 2. НЕУНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

141. Группы и полугруппы самосопряженных операторов. Вернемся к однопараметрическим группам операторов T_t $(-\infty < t < \infty)$, но не будем теперь предполагать, что T_t унитарны. Мы рассмотрим также *полугруппы* операторов, т. е. такие семейства операторов $\{T_t\}$, заданных только для $t \geqslant 0$, для которых

$$T_0 = I, \quad T_s T_t = T_{s+t} \quad (s \geqslant 0, \quad t \geqslant 0).$$

Очевидно, что если все операторы, принадлежащие полугруппе, имеют обратные, то, положив $T_{-t} = T_t^{-1}$, мы получим однопараметрическую группу, служащую продолжением исходной полугруппы.

Рассмотрим сначала полугруппы ограниченных симметричных операторов $\{A_t\}$. Все A_t положительны, так как $A_t = A_{\frac{t}{2}}^2 \geqslant O$. Покажем, что функции

$$h_f(t) = \log(A_t f, f) = \log \left\| A_{\frac{t}{2}} f \right\|^2$$

выпуклы, т. е.

$$h_f\left(\frac{s+t}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left[h_f(s) + h_f(t)\right].$$

[1]) Гельфанд и Райков [1]; см. также Годеман [2], [3]; Сегал [1]; Маутнер [1].

[2]) Современное изложение результата Петера и Г. Вейля читатель найдет в книге А. Вейля [1] (стр. 94—109).

В самом деле,

$$\log\left(A_{\frac{s+t}{2}}f, f\right)=\frac{1}{2}\log\left(A_{\frac{s}{2}}f, A_{\frac{t}{2}}f\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\log\left(\left\|A_{\frac{s}{2}}f\right\|^2\left\|A_{\frac{t}{2}}f\right\|^2\right).$$

Но выпуклая функция $\varphi(t)$, принимающая конечные или бесконечные значения (в частности, функция $\varphi(t)\equiv-\infty$), непрерывна внутри интервала, в котором она определена, если только $\varphi(t)$ ограничена сверху или измерима на каком-нибудь подынтервале[1]). Таким образом, если

1) $\|A_t\|\leqslant C$ *в интервале* $0<t<1$

или же

2) *функции* (A_tf, f) *измеримы по* t *в интервале* $(0, 1)$,

то (A_tf, f) *непрерывны при всех* $t>0$.

Пусть $m(\geqslant 0)$ и M — нижняя и верхняя грани оператора A_1. Пусть

$$A_1=\int\limits_{m-0}^{M}\lambda\, dE_\lambda$$

— спектральное разложение оператора A_1. Определим с помощью формулы

$$B_t=\int\limits_{m-0}^{M}\lambda^t\, dE_\lambda \qquad (t\geqslant 0)$$

полугруппу самосопряженных операторов. Оператор B_t представляет собой непрерывную функцию параметра t (даже в смысле равномерной сходимости). Равенство

$$A_t=B_t$$

при $t=1$ выполняется в силу определения. Справедливость его при

$$t=\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$$

можно установить последовательно, пользуясь единственностью квадратного корня из положительного самосопряженного оператора (см. п. 104). Затем можно будет перейти к значениям параметра вида

$$t=\frac{k}{2^n}\qquad (k, n=1, 2, \ldots),$$

откуда, в силу непрерывности, будет следовать, что тождество $A_t=B_t$ выполняется для всех $t\geqslant 0$. Кроме того, $A_0=B_0=I$.

Итак, доказана

---

[1]) См., например, Серпинский [1].

Теорема[1]). *Всякая полугруппа ограниченных самосопряженных операторов $\{A_t\}$, удовлетворяющая условию* (1) *или условию* (2), *может быть представлена в виде*

$$A_t = \int_{m-0}^{M} \lambda^t \, dE_\lambda \quad (0 \leqslant m < M), \tag{10}$$

где $\{E_\lambda\}$ — некоторое спектральное семейство, заданное на интервале $[m, M]$.

Заметим, что

$$\lim_{t \to 0} A_t = I - E_0;$$

таким образом, непрерывность при $t = 0$ имеет место лишь тогда, когда $E_0 = O$, т. е. когда 0 *не является собственным значением оператора* A_1. Если это условие выполняется, то представлению (10) можно придать вид

$$A_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu t} \, dF_\mu, \tag{11}$$

где $\{F_\mu\}$ — спектральное семейство, связанное с $\{E_\lambda\}$ равенством

$$F_\mu = E_{e^\mu}.$$

Введем самосопряженный оператор

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \mu \, dF_\mu;$$

он ограничен, если $m > 0$, и во всяком случае полуограничен сверху, так как $F_\mu = I$ для $\mu > \log M$. Представление (11) можно тогда записать в виде

$$A_t = e^{tA}.$$

При этом „производящий оператор“ A выражается через $\{A_t\}$ формулой

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} (A_h - I). \tag{12}$$

Действительно, если f принадлежит области определения A, то

$$\left\| \left[\frac{1}{h}(A_h - I) - A \right] f \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{h}(e^{h\mu} - 1) - \mu \right|^2 d \| F_\mu f \|^2 \to 0,$$

так как функция под интегралом при $h \to 0$ стремится к нулю убывая. Следовательно, оператор в правой части формулы (12)

[1]) Эту теорему С.-Надь [2] доказал сначала для групп. В дальнейшем она была доказана для полугрупп, см. Хилле [1], [2], [3] (стр. 373—386) и С.-Надь [1] (стр. 73—77), [3]. С.-Надь [1], [3] обобщил эту теорему на группы и полугруппы произвольных нормальных операторов.

является расширением оператора A, а так как они оба симметричны, то он должен совпадать с A.

Несколько более подробно изучены однопараметрические полугруппы $\{V_t\}$ изометричных (но не унитарных) операторов в гильбертовом пространстве. Примером такой полугруппы в функциональном пространстве $L^2(0, \infty)$ может служить

$$V_t f(x) = f_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x < t, \\ f(x-t) & \text{при } x \geqslant t. \end{cases}$$

$L^2(0, \infty)$ можно рассматривать как подпространство пространства $L^2(-\infty, \infty)$, если отождествить элемент $f(x)$ из $L^2(0, \infty)$ с элементом из $L^2(-\infty, \infty)$, который получится, если положить $f(x)=0$ для $x<0$. В пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ сдвиги

$$U_t g(x) = g(x-t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

образуют однопараметрическую группу унитарных операторов. При $t \geqslant 0$, если $f(x)$ принадлежит $L^2(0, \infty)$, то, очевидно, $U_t f = V_t f$.

Можно доказать, что подобное же положение имеет место и в общем случае:

Теорема[1]). *Если $\{V_t\}$ — полугруппа изометричных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то можно построить гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1$, содержащее $\mathfrak{H}$ в качестве подпространства, и в $\mathfrak{H}_1$ задать однопараметрическую группу унитарных операторов $\{U_t\}$ таким образом, чтобы при $t \geqslant 0$ для всех элементов f, принадлежащих $\mathfrak{H}$, выполнялось равенство $V_t f = U_t f$.*

142. Инфинитезимальный производящий оператор полугруппы операторов общего вида. Полугруппы ограниченных линейных операторов общего вида в гильбертовом и банаховом пространствах изучались многими авторами, и полученные результаты нашли применение в различных областях анализа и в теории вероятностных процессов. Этот вопрос мы затронем лишь бегло, так как ему посвящена прекрасная книга Хилле [3].

В теории полугрупп операторов возникают, в частности, вопросы такого рода. Предполагается, что операторы T_t, образую-

---

[1]) Купер [3]; эту же теорему можно получить, сопоставив результаты Наймарка [3], касающиеся „расширений второго рода" симметричных операторов, с одной более ранней теоремой, принадлежащей Плеснеру [1] (см. добавление 1).

Отметим в этой связи следующий результат, принадлежащий С.-Надю [8].

Всякая однопараметрическая группа $\{T_t\}$ линейных операторов в гильбертовом пространстве, обладающая тем свойством, что $\|T_t\| \leqslant C$ $(-\infty < t < \infty)$, „подобна" некоторой группе унитарных операторов, т. е. существует ограниченный линейный оператор Q, имеющий ограниченный обратный Q^{-1} и обладающий тем свойством, что $Q^{-1}T_tQ$ $(-\infty < t < \infty)$ представляют собой унитарные операторы.

щие полугруппу, зависят от параметра t непрерывно (в сильном или слабом смысле) или хотя бы измеримым образом (причем приходится различать сильную и слабую измеримость), и ставится вопрос, вытекают ли из такого предположения те или иные свойства T_t, например сильная непрерывность или существование производной $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(T_{t+\varepsilon} - T_t)$ на некотором всюду плотном множестве. Исследуется строение инфинитезимального производящего оператора $A = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(T_\varepsilon - I)$ и ищутся способы построения полугруппы $\{T_t\}$ по заданному производящему оператору A. В общем случае, когда оператор A неограничен, нельзя рассчитывать получить простую показательную формулу $T_t = e^{tA}$. Для *ограниченного* оператора B мы имеем естественное определение оператора e^B как суммы ряда

$$e^B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} B^n,$$

мажорируемого по норме рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \|B\|^n.$$

Тогда, когда операторы B и C ограничены и перестановочны, мы имеем даже равенство $e^{B+C} = e^B e^C$ [1]).

Следующая теорема утверждает существование инфинитезимального производящего оператора со всюду плотной областью определения:

Теорема [2]). *Пусть $\{T_t\}$ — однопараметрическая полугруппа ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$; предположим, что эта полугруппа сильно непрерывна, т. е.*

$$T_s \longrightarrow T_t, \quad \text{когда} \quad s \longrightarrow t \quad (\text{даже при } t = 0).$$

---

[1]) В самом деле, разность $e^B e^C - e^{B+C}$ представляет собой предел (при $N \to \infty$) оператора

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} B^n \cdot \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!} C^m - \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} (B+C)^p = \sum \frac{1}{n!m!} B^n C^m,$$

где сумма в правой части распространена на m и n, подчиненные неравенствам $0 \leqslant n \leqslant N$, $0 \leqslant m \leqslant N$ и $n + m > N$. По норме она не превосходит

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} b^n \cdot \sum_{m=0}^{N} \frac{1}{m!} c^m - \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{p!} (b+c)^p = \sum \frac{1}{n!m!} b^n c^m,$$

где $b = \|B\|$, $c = \|C\|$; предел последней суммы при $N \to \infty$ равен $e^b e^c - e^{b+c} = 0$.

[2]) Хилле [3] (гл. IX). См. также Данфорд и Сегал [1], Иосида [2].

В этих предположениях производящий оператор

$$A = \lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon,$$

где

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(T_\varepsilon - I),$$

имеет область определения $\mathfrak{D}_A$, плотную в $\mathfrak{B}$. Он представляет собой замкнутый линейный оператор, причем для f из $\mathfrak{D}_A$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(T_{t+\varepsilon} - T_t) f = AT_t f = T_t A f. \tag{13}$$

Для доказательства заметим, что $T_t f$ при заданном f является непрерывной функцией параметра t, следовательно,

$$f_s = \frac{1}{s} \int_0^s T_t f \, dt \longrightarrow f,$$

когда $s \to 0$; при этом интеграл следует понимать как сильный предел сумм римановского типа. Утверждение теоремы, касающееся $\mathfrak{D}_A$, будет доказано, если мы обнаружим, что $\mathfrak{D}_A$ содержит все элементы вида f_s $(s > 0)$. Но

$$A_\varepsilon f_s = \frac{1}{s\varepsilon}\left[\int_s^{s+\varepsilon} T_t f \, dt - \int_0^\varepsilon T_t f \, dt\right] = A_s f_\varepsilon \longrightarrow A_s f$$

при $\varepsilon \to 0$; таким образом, Af_s определено: оно равно $A_s f$.

Соотношения (13) вытекают из следующих очевидных равенств:

$$\frac{1}{\varepsilon}(T_{t+\varepsilon} - T_t) = T_t A_\varepsilon = A_\varepsilon T_t.$$

Остается показать, что A — *замкнутый* оператор.

Заметим, что $\|T_t\|$ как функция от t ограничена во всяком конечном интервале. Действительно, в противном случае существовала бы последовательность $t_k \to t_0$, такая, что $\|T_{t_k}\| \to \infty$, но это невозможно, так как операторы T_{t_k} сходятся к T_{t_0} и поэтому, согласно теореме Осгуда — Банаха (см. п. 30), их нормы ограничены.

Отсюда вытекает, что для любого f из $\mathfrak{D}_A$

$$\|f_s\| = \left\| \frac{1}{s} \int_0^s T_t f \, dt \right\| \leqslant M_s \|f\|,$$

где

$$M_s = \sup_{0 \leqslant t \leqslant s} \|T_t\| < \infty; \tag{14}$$

следовательно,

$$\text{если } f^{(n)} \to f, \quad \text{то } f_s^{(n)} - f_s = (f^{(n)} - f)_s \to 0, \quad f_s^{(n)} \to f_s. \tag{15}$$

Пусть f — произвольный элемент $\mathfrak{D}_A$; при $\varepsilon \to 0$, по определению, $A_\varepsilon f \to Af$ и, в силу (15),

$$(A_\varepsilon f)_s \to (Af)_s.$$

С другой стороны,

$$A_\varepsilon f_s = (A_s f)_\varepsilon, \tag{16}$$

и так как $T_t \smile A_\varepsilon$, то

$$A_\varepsilon f_s = (A_\varepsilon f)_s. \tag{17}$$

В силу (16) и (17), если $f_\varepsilon \to f$, то

$$(A_\varepsilon f)_s = A_s f_\varepsilon \to A_s f.$$

Таким образом,

$$A_s f = (Af)_s. \tag{18}$$

Замкнутость A можно теперь доказать следующим образом. Пусть $\{f^{(n)}\}$ — любая последовательность элементов из $\mathfrak{D}_A$, обладающая тем свойством, что

$$f^{(n)} \to f, \quad Af^{(n)} \to g \quad (n \to \infty).$$

Тогда, с одной стороны,

$$A_s f^{(n)} \to A_s f,$$

а с другой, — в силу (18) и (15),

$$A_s f^{(n)} = (Af^{(n)})_s \to g_s,$$

откуда следует, что

$$A_s f = g_s.$$

Поэтому $A_s f \to g$ при $s \to 0$; мы видим, что f также принадлежит $\mathfrak{D}_A$ и $Af = g$, что и требовалось доказать.

143. Показательные формулы. Так как в случае неограниченного оператора A формула $T_t = e^{tA}$ прямого смысла не имеет, то мы будем рассматривать формулы вида

$$T_t = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{tB_\varepsilon},$$

где B_ε — ограниченные линейные операторы, зависящие от параметра $\varepsilon > 0$. Докажем следующую лемму:

Лемма. *Пусть $\{T_t\}$ — полугруппа, удовлетворяющая условиям теоремы предыдущего пункта, а B_ε — ограниченный линейный оператор (в том же пространстве $\mathfrak{B}$), зависящий от параметра ε, где $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, и обладающий следующими свойствами:*

а) $B_\varepsilon \smile T_t$;

б) $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant s} \|e^{tB_\varepsilon}\| \leqslant N_s$, *где постоянная N_s не зависит от ε;*

в) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} B_\varepsilon f = Af$ *для любого элемента f из $\mathfrak{D}_A$, где A — производящий оператор полугруппы $\{T_t\}$. Тогда*

$$T_t f = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{tB_\varepsilon} f,$$

каков бы ни был элемент f пространства $\mathfrak{B}$. Кроме того, при фиксированном f это предельное соотношение выполняется равномерно относительно t в любом конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant s$.

Будем исходить из формулы

$$T_t - e^{tB_\varepsilon} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} T_{k\frac{t}{n}} e^{(n-1-k)\frac{t}{n}B_\varepsilon}\right)\left(T_{\frac{t}{n}} - e^{\frac{t}{n}B_\varepsilon}\right),$$

которую легко проверить, так как $e^{tB_\varepsilon} \smile T_t$, в силу условия а). Задав M_s посредством (14), мы получим, в силу условия б), на интервале $0 \leqslant t \leqslant s$ неравенство

$$\|(T_t - e^{tB_\varepsilon}) f\| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} M_s N_s \left\|\left(T_{\frac{t}{n}} - e^{\frac{t}{n}B_\varepsilon}\right) f\right\| \leqslant$$

$$\leqslant C(s) \frac{n}{t} \left\|\left(T_{\frac{t}{n}} - e^{\frac{t}{n}B_\varepsilon}\right) f\right\|,$$

где $C(s) = sM_sN_s$. Отсюда следует, что

$$\|(T_t - e^{tB_\varepsilon}) f\| \leqslant C(s) \limsup_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \|(T_\tau - e^{\tau B_\varepsilon}) f\|.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\tau}\|(T_\tau - e^{\tau B_\varepsilon}) f\| = \left\|\left(A_\tau - \frac{1}{\tau}(e^{\tau B_\varepsilon} - I)\right) f\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|(A_t - B_\varepsilon) f\| + \left\|\left(\frac{1}{\tau}(e^{\tau B_\varepsilon} - I) - B_\varepsilon\right) f\right\|$$

и

$$\left\|\frac{1}{\tau}(e^{\tau B_\varepsilon} - I) - B_\varepsilon\right\| = \left\|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tau^{n-1}}{n!} B_\varepsilon^n\right\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tau^{n-1}}{n!} \|B_\varepsilon\|^n =$$

$$= \frac{1}{\tau}(e^{\tau\|B_\varepsilon\|} - 1) - \|B_\varepsilon\|;$$

правая часть стремится к нулю вместе с τ. Следовательно,

$$\|(T_t - e^{tB_\varepsilon}) f\| \leqslant C(s) \limsup_{\tau \to 0} \|A_\tau f - B_\varepsilon f\|,$$

и это неравенство выполняется для всех t в интервале $0 \leqslant t \leqslant s$ и для любого f из $\mathfrak{B}$.

В том случае, когда элемент f принадлежит области $\mathfrak{D}_A$ производящего оператора A, правая часть полученного неравенства равна $C(s)\|Af - B_\varepsilon f\|$ и, согласно условию в), при $\varepsilon \to 0$ стремится к нулю.

Лемма доказана для элементов f, принадлежащих множеству $\mathfrak{D}_A$, плотному в $\mathfrak{B}$. Переход к произвольному f осуществляется очевидным образом; при этом следует воспользоваться тем, что $\|T_t\|$ и $\|e^{tB_\varepsilon}\|$ при $0 \leqslant t \leqslant s$ ограничены сверху некоторой постоянной, зависящей только от s. На этом доказательство завершается.

Из этой леммы непосредственно вытекает следующая теорема Хилле (см. [3], гл. IX):

Теорема. *Для любой сильно непрерывной (всюду, включая $t=0$) полугруппы T_t справедливо равенство*

$$T_t f = \lim_{\varepsilon \to 0} e^{tA_\varepsilon} f,$$

где

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(T_\varepsilon - I),$$

причем, когда f фиксировано, сходимость равномерна относительно t в любом конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant s$.

Достаточно проверить, что для $B_\varepsilon = A_\varepsilon$ выполняются условия предыдущей леммы. Выполнение условий а) и в) очевидно. Что касается условия б), то, положив $M = M_1 = \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|T_t\| (\geqslant 1)$, мы получим для любого $t \geqslant 0$ $\|T_t\| = \|T_{[t]} T_{t-[t]}\| = \|T_1^{[t]} T_{t-[t]}\| \leqslant \leqslant \|T_1\|^{[t]} \|T_{t-[t]}\| \leqslant M^{[t]+1} \leqslant M^{t+1}$. Отсюда следует, что

$$\|e^{tA_\varepsilon}\| = \left\| e^{-\frac{t}{\varepsilon}} e^{\frac{t}{\varepsilon} T_\varepsilon} \right\| \leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^m \frac{1}{m!} M^{\varepsilon m+1} = M e^{\frac{t}{\varepsilon}(M^\varepsilon - 1)}.$$

Таким образом, для $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $0 \leqslant t \leqslant s$

$$\|e^{tA_\varepsilon}\| \leqslant M e^{s(M-1)},$$

и условие б) выполняется.

Отметим одно интересное приложение этой теоремы.

Пусть $\mathfrak{B}$ — пространство функций $f(x)$, ограниченных и равномерно непрерывных, заданных на интервале $0 \leqslant x < \infty$, с нормой

$$\|f\| = \max |f(x)|.$$

Операторы

$$T_t f(x) = f(x+t) \quad (t \geqslant 0)$$

в пространстве $\mathfrak{B}$, очевидно, образуют полугруппу, причем, в силу равномерной непрерывности функций $f(x)$,

$$\|T_s f - T_t f\| = \max |f(x+s) - f(x+t)| \to 0,$$

когда $s \to t$. Предыдущая теорема дает *формулу*

$$f(x+t) = \lim_{h \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{t}{h}\right)^n \Delta_h^{(n)} f(x), \tag{19}$$

в которой

$$\Delta_h^{(n)} f(x) = (T_h - I)^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh)$$

представляет собой так называемую „n-ю разность" функции $f(x)$. Сходимость при $h \to 0$ в правой части (19) равномерна относительно x в интервале $0 \leqslant x < \infty$ и относительно t в любом конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant \omega$.

Это — обобщение классической теоремы Тейлора. Отсюда можно получить доказательство *теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывной функции многочленами*. В самом деле, пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$. Продолжим ее на полуось $0 \leqslant x < \infty$, положив $f(x) = f(1)$ для $x > 1$. Для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ выберем настолько малое h, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| f(x+t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\left(\frac{t}{h}\right)^n \Delta_h^{(n)} f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{20}$$

Возможность этого обеспечивается формулой (19). Ряд в (20) сходится равномерно относительно x в интервале $x \geqslant 0$ и относительно t в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$; это вытекает не только из наших общих результатов, но и непосредственно из существования сходящегося мажорирующего ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{h^n} 2^n M = M e^{2/h},$$

где M — верхняя грань $|f(x)|$. Положив $x = 0$ и заменив в (20) ряд некоторой его частичной суммой, отличающейся от суммы ряда меньше чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, мы получим *многочлен* относительно t, приближающий $f(t)$ равномерно на интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ с точностью до ε.

В приведенной выше теореме операторы, фигурирующие в показателе, непосредственно не связаны с производящим оператором полугруппы. Таким образом, эта теорема не дает способа построения полугруппы по ее производящему оператору. Однако такое построение возможно, различные его способы указаны в книге Хилле [3] (гл. XI и XII). Следующая теорема дает некоторую показательную формулу и в то же время характеризует операторы, служащие инфинитезимальными производящими для полугрупп $\{T_t\}$, по крайней мере при дополнительном предположении $\|T_t\| \leqslant 1$.

Теорема[1]). (I) *Пусть $\{T_t\}$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и, кроме того,*

$$\|T_t\| \leqslant 1 \quad (t \geqslant 0). \tag{21}$$

[1]) См. Хилле [3] (теорема 12.2.1) и Иосида [2]. Формулу (22) доказал Иосида; у Хилле вместо (22) дается в числе прочих формула

$$T_t f = \lim_{k \to \infty} \left(I - \frac{t}{k} A\right)^{-k} f.$$

Доказательство, приведенное здесь, отличается от доказательства Иосида тем, что не привлекается к рассмотрению сопряженное пространство $\mathfrak{B}^*$.

Ограничение (21) несущественно. Миядера и Филипс [2] показали, что можно отказаться от условия (21), если в формулировке свойства (P) неравенство $\|I_\varepsilon\| \leqslant 1$ заменить условием: существует такое $\omega \geqslant 0$, что при $0 < \varepsilon < \omega^{-1}$

$$\limsup_{n \to \infty} \|I_\varepsilon^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant (1 - \varepsilon\omega)^{-1}.$$

Тогда производящий оператор A полугруппы $\{T_t\}$ обладает следующим свойством (P):

$$(P)\begin{cases} I_\varepsilon=(I-\varepsilon A)^{-1} \text{ существует при любом } \varepsilon>0 \text{ и его область} \\ \text{определения заполняет все } \mathfrak{B}, \text{ причем } \|I_\varepsilon\|\leqslant 1. \end{cases}$$

Если мы положим

$$B_\varepsilon=AI_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}(I_\varepsilon-I),$$

то придем к соотношению

$$T_t f=\lim_{\varepsilon\to 0} e^{tB_\varepsilon}f \tag{22}$$

и, когда f фиксировано, сходимость будет равномерной во всяком конечном интервале $0\leqslant t\leqslant s$.

(II) *Всякий линейный оператор A в пространстве $\mathfrak{B}$ с областью определения $\mathfrak{D}_A$, плотной в $\mathfrak{B}$, обладающий свойством (P), служит производящим оператором некоторой полугруппы рассматриваемого вида.*

Отметим сначала некоторые свойства операторов, удовлетворяющих условию предложения (II).

Каков бы ни был элемент f из $\mathfrak{D}_A$,

$$(I_\varepsilon-I)f=I_\varepsilon f-I_\varepsilon(I-\varepsilon A)f=\varepsilon I_\varepsilon Af, \quad \|(I_\varepsilon-I)f\|\leqslant\varepsilon\|Af\|$$

и, следовательно, $(I_\varepsilon-I)f\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Так как $\mathfrak{D}_A$ плотно в $\mathfrak{B}$ и $\|I_\varepsilon-I\|$ не превосходит 2, то этот результат распространяется на все элементы пространства $\mathfrak{B}$, т. е. $I_\varepsilon\to I$.

Так как $I_\varepsilon\smile I_\varepsilon^{-1}=I-\varepsilon A$, то $I_\varepsilon\smile A$, и для любого элемента f из $\mathfrak{D}_A$

$$B_\varepsilon f-Af=I_\varepsilon Af-Af=(I_\varepsilon-I)Af\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0. \tag{23}$$

Наконец,

$$\|e^{tB_\varepsilon}\|=\left\|e^{-\frac{t}{\varepsilon}}e^{\frac{t}{\varepsilon}I_\varepsilon}\right\|\leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^m\frac{1}{m!}\|I_\varepsilon\|^m\leqslant e^{-\frac{t}{\varepsilon}}e^{\frac{t}{\varepsilon}}=1. \tag{24}$$

Первая часть теоремы доказывается следующим образом. Для $\varepsilon>0$, $t>0$ имеем

$$I-\varepsilon A_t=I-\frac{\varepsilon}{t}(T_t-I)=\frac{t+\varepsilon}{t}\left(I-\frac{\varepsilon}{t+\varepsilon}T_t\right),$$

откуда, в силу (21), следует, что оператор

$$I_{t,s}=(I-\varepsilon A_t)^{-1}$$

существует, его область определения совпадает с $\mathfrak{B}$ и для любого f

$$\|(I-\varepsilon A_t)f\|\geqslant\frac{t+\varepsilon}{t}\left(\|f\|-\frac{\varepsilon}{t+\varepsilon}\|f\|\right)=\|f\|; \tag{25}$$

таким образом,

$$\|I_{t,\varepsilon}\|\leqslant 1. \tag{26}$$

Из (25) вытекает, что для любого элемента f, принадлежащего области определения $\mathfrak{D}_A$ оператора $A=\lim\limits_{t\to 0} A_t$, справедливо неравенство

$$\|(I-\varepsilon A)f\|\geqslant\|f\|. \tag{27}$$

Отсюда, в свою очередь, вытекает, что оператор

$$I_\varepsilon=(I-\varepsilon A)^{-1}$$

существует и для любого элемента g его области определения $\mathfrak{D}_{I_\varepsilon}$

$$\|I_\varepsilon g\|\leqslant\|g\|. \tag{28}$$

Так как A — замкнутый оператор (см. п. 142), то замкнут и I_ε, следовательно, в силу (28), $\mathfrak{D}_{I_\varepsilon}$ представляет собой *замкнутое* линейное множество. Для того чтобы показать, что $\mathfrak{D}_{I_\varepsilon}$ совпадает с $\mathfrak{B}$, достаточно установить, что $\mathfrak{D}_{I_\varepsilon}$ содержит $\mathfrak{D}_A$, т. е., другими словами, установить, что, каково бы ни было фиксированное ε, уравнение

$$(I-\varepsilon A)h^*=g$$

имеет решеине h^* при любом заданном g из $\mathfrak{D}_A$.

Приближенное уравнение

$$(I-\varepsilon A_t)h=g$$

имеет решение $h=I_{t,\varepsilon}g$; покажем, что это последнее при $t\to 0$ стремится к некоторому элементу пространства $\mathfrak{B}$ и в то же время $(I-\varepsilon A)h$ стремится к g; при этом, так как оператор $I-\varepsilon A$ замкнут, $\lim\limits_{t\to 0} h$ и будет искомым решением h^*. Все эти утверждения следуют из приведенных ниже оценок, к которым мы придем, воспользовавшись соотношениями $I_{t,\varepsilon}\smile I_{s,\varepsilon}$, $I_{t,\varepsilon}\smile A$, вытекающими из $I_{t,\varepsilon}\smile T_s$, а также неравенством (26):

$$\|I_{t,\varepsilon}g-I_{s,\varepsilon}g\|=\|I_{t,\varepsilon}I_{s,\varepsilon}(I-\varepsilon A_s)g-I_{s,\varepsilon}I_{t,\varepsilon}(I-\varepsilon A_t)g\|=$$
$$=\|I_{t,\varepsilon}I_{s,\varepsilon}\varepsilon(A_t-A_s)g\|\leqslant\varepsilon\|(A_t-A_s)g\|\to 0 \quad \text{при} \quad t,\ s\to 0,$$
$$\|(I-\varepsilon A)I_{t,\varepsilon}g-g\|=\|I_{t,\varepsilon}(I-\varepsilon A)g-I_{t,\varepsilon}(I-\varepsilon A_t)g\|=$$
$$=\|I_{t,\varepsilon}\varepsilon(A_t-A)g\|\leqslant\varepsilon\|(A_t-A)g\|\to 0 \quad \text{при} \quad t\to 0.$$

Мы убедились в том, что оператор A обладает свойством (P). Это свойство, как мы видели, влечет за собой (23) и (24), а из $T_t\smile A$ следует, что $T_t\smile I_\varepsilon$ и $T_t\smile B_\varepsilon$, поэтому, в силу леммы, для $T_t f$ справедливо представление (22). Первая часть теоремы доказаиа.

Для того чтобы доказать вторую часть, рассмотрим при фиксированном $\varepsilon>0$ полугруппу

$$T_t^{(\varepsilon)}=e^{tB_\varepsilon},$$

где

$$B_\varepsilon=AI_\varepsilon=A(I-\varepsilon A)^{-1};$$

легко видеть, что эта полугруппа непрерывна в сильном смысле, B_ε является ее производящим оператором и $T_t^{(\varepsilon)} \smile T_s^{(\eta)}$. Далее, с помощью рассуждения, подобного тому, которое было проведено в доказательстве леммы, можно обнаружить, что

$$\| T_t^{(\varepsilon)} f - T_t^{(\eta)} f \| \leqslant t \| B_\varepsilon f - B_\eta f \|.$$

Если f принадлежит $\mathfrak{D}_A$, то $B_\varepsilon f - B_\eta f \to 0$ при ε, $\eta \to 0$ [см. (23)], следовательно,

$$T_t f = \lim_{\varepsilon \to 0} T_t^{(\varepsilon)} f$$

существует, причем сходимость равномерна относительно t в любом конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant s$. Благодаря тому, что $\| T_t^{(\varepsilon)} \| \leqslant 1$ [см. (24)] и $\mathfrak{D}_A$ плотно в $\mathfrak{B}$, это предложение распространяется на произвольные элементы f пространства $\mathfrak{B}$. Отсюда следует, что $\{T_t\}$ — сильно непрерывная полугруппа и $\|T_t\| \leqslant 1$.

Соотношение (18) для полугруппы $\left\{T_t^{(\varepsilon)}\right\}$ имеет вид

$$\frac{1}{s}(T_s^{(\varepsilon)} - I) f = \frac{1}{s} \int_0^s T_t^{(\varepsilon)} B_\varepsilon f \, dt.$$

Из него, в силу (23), следует, что для f, принадлежащих $\mathfrak{D}_A$,

$$\frac{1}{s}(T_s - I) f = \frac{1}{s} \int_0^s T_t A f \, dt,$$

откуда вытекает, что

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(T_s - I) f = Af.$$

Если производящий оператор полугруппы $\{T_t\}$ обозначить $\bar{A}$, то, как мы видим, $\bar{A} \supseteq A$. Но $\bar{A}$ не может быть истинным расширением оператора A, так как иначе оператор $(I - \varepsilon A)^{-1}$ имел бы истинное расширение $(I - \varepsilon \bar{A})^{-1}$, что невозможно, так как оба эти оператора определены во всем пространстве $\mathfrak{B}$, первый — в силу первой части теоремы, уже доказанной, второй — согласно предположению. Итак, $\bar{A} = A$. Теорема полностью доказана.

§ 3. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

144. Первоначальные методы. В п. 139 нами была упомянута „статистическая эргодическая теорема" И. Неймана, относящаяся к движениям $P \to P_t$, которые преобразуют некоторое множество Ω само в себя и сохраняют меру. В соответствующей „дискретной" теореме (от которой нетрудно перейти к „непрерывному" случаю) речь идет о степенях некоторого фиксированного отобра-