легко видеть, что эта полугруппа непрерывна в сильном смысле, B_ε является ее производящим оператором и $T_t^{(\varepsilon)} \smile T_s^{(\eta)}$. Далее, с помощью рассуждения, подобного тому, которое было проведено в доказательстве леммы, можно обнаружить, что

$$\| T_t^{(\varepsilon)} f - T_t^{(\eta)} f \| \leqslant t \| B_\varepsilon f - B_\eta f \|.$$

Если f принадлежит $\mathfrak{D}_A$, то $B_\varepsilon f - B_\eta f \to 0$ при ε, $\eta \to 0$ [см. (23)], следовательно,

$$T_t f = \lim_{\varepsilon \to 0} T_t^{(\varepsilon)} f$$

существует, причем сходимость равномерна относительно t в любом конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant s$. Благодаря тому, что $\| T_t^{(\varepsilon)} \| \leqslant 1$ [см. (24)] и $\mathfrak{D}_A$ плотно в $\mathfrak{B}$, это предложение распространяется на произвольные элементы f пространства $\mathfrak{B}$. Отсюда следует, что $\{T_t\}$ — сильно непрерывная полугруппа и $\|T_t\| \leqslant 1$.

Соотношение (18) для полугруппы $\left\{T_t^{(\varepsilon)}\right\}$ имеет вид

$$\frac{1}{s}(T_s^{(\varepsilon)} - I) f = \frac{1}{s} \int_0^s T_t^{(\varepsilon)} B_\varepsilon f \, dt.$$

Из него, в силу (23), следует, что для f, принадлежащих $\mathfrak{D}_A$,

$$\frac{1}{s}(T_s - I) f = \frac{1}{s} \int_0^s T_t A f \, dt,$$

откуда вытекает, что

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s}(T_s - I) f = Af.$$

Если производящий оператор полугруппы $\{T_t\}$ обозначить $\bar{A}$, то, как мы видим, $\bar{A} \supseteq A$. Но $\bar{A}$ не может быть истинным расширением оператора A, так как иначе оператор $(I - \varepsilon A)^{-1}$ имел бы истинное расширение $(I - \varepsilon \bar{A})^{-1}$, что невозможно, так как оба эти оператора определены во всем пространстве $\mathfrak{B}$, первый — в силу первой части теоремы, уже доказанной, второй — согласно предположению. Итак, $\bar{A} = A$. Теорема полностью доказана.

§ 3. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

144. Первоначальные методы. В п. 139 нами была упомянута „статистическая эргодическая теорема" И. Неймана, относящаяся к движениям $P \to P_t$, которые преобразуют некоторое множество Ω само в себя и сохраняют меру. В соответствующей „дискретной" теореме (от которой нетрудно перейти к „непрерывному" случаю) речь идет о степенях некоторого фиксированного отображения $P \to P'$ множества Ω самого в себя, сохраняющего меру $d\sigma$ на Ω, т. е. обладающего тем свойством, что

$$\int\limits_{\Omega} f(P)\,d\sigma = \int\limits_{\Omega} f(P')\,d\sigma.$$

Введя обозначения

$$P'' = (P')', \ \ldots, \quad P^{(n)} = (P^{(n-1)})', \ \ldots,$$

мы сможем сформулировать эту теорему следующим образом:

Статистическая эргодическая теорема. *Для любой функции $f(P)$ с суммируемым квадратом на Ω средние арифметические*

$$\varphi_{m,n}(P) = \frac{1}{n-m} \sum_{k=m}^{n-1} f(P^{(k)})$$

при $n-m \to \infty$ сходятся в среднем к некоторой функции $f^*(P)$ с суммируемым квадратом, почти инвариантной относительно преобразования $P \to P'$, т. е. такой, что

$$f^*(P) = f^*(P')$$

для почти всех точек P множества Ω.

Вспомнив, что оператор U в пространстве $L^2(\Omega)$, определенный равенством

$$Uf(P) = f(P'),$$

есть оператор унитарный, мы придем к выводу, что перед нами частный случай следующей теоремы, в которой не упоминаются преобразования самого множества Ω:

Теорема. *Пусть U — унитарный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Каков бы ни был элемент f пространства $\mathfrak{H}$, средние арифметические*

$$\varphi_{m,n} = \frac{1}{n-m} \sum_{k=m}^{n-1} U^k f$$

при $n-m \to \infty$ сходятся сильно к некоторому элементу f^*, инвариантному относительно оператора U.

Эту теорему можно доказать, воспользовавшись спектральным представлением оператора U и его степеней (см. п. 109), так же, как с помощью теоремы Стоуна в п. 139 был доказан ее „непрерывный" аналог. Однако здесь мы приведем ее прямое доказательство [1]).

---

[1]) Оно принадлежит Риссу и воспроизведено в монографии Хопфа [1] (§ 8); см. также Рисс и С.-Надь [1]. Идея доказательства подсказана статьей Карлемана [2].

Рассмотрим два подпространства пространства $\mathfrak{H}$. Одно из них, $\mathfrak{L}'$, пусть состоит из элементов вида $g-Ug$ и их пределов. Таким образом, если f принадлежит $\mathfrak{L}'$, то

$$f=g-Ug+g',$$

где

$$\|g'\|<\varepsilon,$$

а ε произвольно мало. Отсюда вытекает, что

$$\varphi_{m,n}=\frac{U^m g-U^n g}{n-m}+\frac{1}{n-m}\sum_{k=m}^{n-1}U^k g'$$

и

$$\|\varphi_{m,n}\|\leqslant\frac{2\|g\|}{n-m}+\varepsilon;$$

следовательно,

$$\|\varphi_{m,n}\|\leqslant 2\varepsilon$$

при достаточно большом $n-m$. Итак, $\varphi_{n,m}\to 0$.

Второе подпространство, $\mathfrak{L}''$, пусть состоит из элементов f, инвариантных относительно U, т. е. таких, для которых $Uf=f$. Для f, принадлежащих $\mathfrak{L}''$, очевидно, $\varphi_{m,n}=f$.

Теорема будет доказана, если мы установим, что всякий элемент f пространства $\mathfrak{H}$ может быть представлен в виде суммы некоторого f' из $\mathfrak{L}'$ и некоторого f'' из $\mathfrak{L}''$. Но прямо из определения сопряженного оператора вытекает тождество

$$(g-Tg,\ h)=(g,\ h-T^*h),$$

а из него в свою очередь следует, что множество элементов, ортогональных всем $g-Ug$, совпадает с множеством элементов, инвариантных относительно U^*; в силу же равенства

$$U^*=U^{-1},$$

характеризующего унитарный оператор, U^* и U имеют одни и те же инвариантные элементы. Следовательно, подпространства $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L}''$ служат ортогональными дополнениями друг друга, и теорема, таким образом, доказана.

Это доказательство применимо и к более широкому классу операторов. В самом деле, оно опирается лишь на следующие свойства оператора U:

а) U определен всюду и линеен;

б) $\|Uf\|=\|f\|$;

в) U и U^* имеют общие инвариантные элементы.

Вместо б) достаточно было бы знать, что

б′) $\|Uf\|\leqslant\|f\|$.

Итак, доказательство предыдущей теоремы применимо ко всякому оператору U, удовлетворяющему условиям а), б′) и в).

Покажем, теперь, что *условие* в) *является следствием условий* а) *и* б′). В самом деле, пусть оператор U обладает свойствами а) и б′); условимся называть такой оператор U *сжатием* пространства $\mathfrak{H}$. Тогда будет выполняться неравенство

$$\|U\| \leqslant 1$$

и, следовательно,

$$\|U^*\| \leqslant 1.$$

Отсюда, если элемент f инвариантен относительно U, то

$$\|f\|^2 = (f, f) = (Uf, f) = (f, U^*f) \leqslant \|f\| \|U^*f\| \leqslant \|f\|^2;$$

таким образом,

$$(f, U^*f) = \|f\| \|U^*f\|$$

и

$$\|U^*f\| = \|f\|,$$

а отсюда в свою очередь следует, что

$$\|f - U^*f\|^2 = \|f\|^2 - (f, U^*f) - (U^*f, f) + \|U^*f\|^2 = 0,$$

т. е.

$$U^*f = f.$$

Поменяв ролями U и U^* в этом рассуждении, мы придем к выводу, что *U и U^* имеют одни и те же инвариантные элементы.*

Итак, *эргодическая теорема верна не только для унитарных операторов, но и для произвольных сжатий гильбертова пространства.*

Забудем на минуту, что нам удалось доказать совпадение инвариантных элементов относительно сжатия U и относительно сопряженного ему оператора U^*. Этим свойством не обладают, вообще говоря, более общие операторы U, которые мы собираемся рассмотреть, а именно, *линейные, всюду определенные операторы U с ограниченными (в совокупности) степенями U^k*, т. е. такие, что

$$\|U^k\| \leqslant C \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{29}$$

Даже раньше, чем было обнаружено свойство сжатий, о котором шла речь, одному из авторов этой книги удалось в 1938 г.[1]) распространить эргодическую теорему на произвольные операторы, удовлетворяющие условию (29) даже в функциональных пространствах L^p $(p > 1)$, а при некоторых дополнительных предположениях—и в пространстве L. Одновременно Иосида и Какутани[2]), со своей стороны, открыли тот же метод и применили его даже к некоторым абстрактным пространствам. С тех пор рядом авторов были предложены другие доказательства и обобщения. Укажем здесь метод Лорча [3], который в известном смысле представляется наиболее сильным.

---

[1]) Рисс [20].

[2]) Иосида [1]; Какутани [1], [2].

Рассмотрим произвольный линейный оператор U, удовлетворяющий условию (29), и возьмем для него подпространства $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L}''$, а также соответствующие подпространства $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$ для сопряженного оператора U^*. Так же, как и выше, доказывается, что, когда f принадлежит $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L}''$, средние арифметические сходятся к определенному пределу φ, причем $\varphi=0$ в первом случае и $\varphi=f$ во втором; тем же свойством (в применении к оператору U^*) обладают подпространства $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$. Отсюда сразу следует, что 0 является единственным элементом, принадлежащим как $\mathfrak{M}'$, так и $\mathfrak{M}''$. Так же, как в рассмотренном выше случае, $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{M}''$ служат ортогональными дополнениями друг друга; то же справедливо относительно $\mathfrak{L}''$ и $\mathfrak{M}'$. Остается только доказать, что всякий элемент f может быть представлен в виде $f=f'+f''$, где f' и f'' (ортогональны они или нет) принадлежат соответственно $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L}''$.

Прежде всего покажем, что множество $\mathfrak{N}$ (очевидно, линейное) элементов вида $f'+f''$ плотно в пространстве $\mathfrak{H}$. Действительно, в противном случае существовал бы элемент $g\neq 0$, ортогональный к $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L}''$ и, следовательно, принадлежащий одновременно $\mathfrak{M}''$ и $\mathfrak{M}'$; но, как мы только что видели, $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$ не имеют общих элементов, отличных от 0, и, таким образом, $\mathfrak{N}$ плотно в $\mathfrak{H}$. С другой стороны, мы имеем неравенство

$$\|f''\|\leqslant C\|f'+f''\|,$$

вытекающее из (29) и из того факта, что f'' представляет собой предел средних арифметических, соответствующих элементу $f=f'+f''$. В силу этого неравенства, если последовательность $\{f'_n+f''_n\}$ сходится, то сходятся также последовательности $\{f'_n\}$ и $\{f''_n\}$ (в этом можно убедиться, взяв в последнем неравенстве $f'_m-f'_n$ и $f''_m-f''_n$ соответственно вместо f' и f''). Так как $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L}''$ замкнуты, то замкнуто и $\mathfrak{N}$, следовательно, $\mathfrak{N}=\mathfrak{H}$, и теорема доказана.

Это рассуждение представляет собой применение вывода Лорча к случаю гильбертова пространства; особенности строения этого пространства позволяют упростить вывод по сравнению с общим случаем. У Лорча рассматриваются произвольное *рефлексивное банахово пространство*, т. е. пространство $\mathfrak{P}$, сопряженное своему сопряженному: $\mathfrak{P}^{**}=\mathfrak{P}$.

§ 145. Методы, основанные на свойствах выпуклости. Приведем еще один способ доказательства эргодической теоремы в применении к *сжатию* U гильбертова пространства $\mathfrak{H}$; это доказательство, предложенное одним из авторов настоящей книги[1]), подсказано статьей Г. Биркгофа [1]. Оно основывается на том,

[1]) Рисс [22].

что если в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ задано выпуклое множество G и μ есть нижняя грань норм элементов g множества G, то любая минимизирующая последовательность $\{g_n\}$, т. е. такая, что

$$\|g_n\| \to \mu,$$

сходится к некоторому элементу φ из $\mathfrak{H}$, причем φ не зависит от выбора последовательности $\{g_n\}$. Сходимость $\{g_n\}$ вытекает из соотношения

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|f\|^2 + \|g\|^2\right) \tag{30}$$

(см. п. 34). Единственность же элемента φ следует из того факта, что, объединяя две минимизирующие последовательности $\{g_k\}$ и $\{g'_k\}$, мы получим последовательность $g_1, g'_1, g_2, g'_2, \ldots$ такого же типа, поэтому $\{g_k\}$ и $\{g'_k\}$ должны иметь один и тот же предел.

Возьмем какой-нибудь фиксированный элемент f и рассмотрим выпуклое множество G, состоящее из элементов вида

$$g = \sum_0^{\nu} c_k f_k, \tag{31}$$

где

$$f_k = U^k f,$$

а коэффициенты c_k неотрицательны и сумма их равна 1. Средние

$$\varphi_n = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} f_k \quad \text{и} \quad \varphi_{m,n} = \frac{1}{n-m}\sum_m^{n-1} f_k,$$

очевидно, прииадлежат G. Покажем, что $\{\varphi_n\}$ и $\{\varphi_{m,n}\}$ представляют собой минимизирующие последовательности. Так как

$$\|\varphi_{m,n}\| = \|U^m \varphi_{n-m}\| \leqslant \|\varphi_{n-m}\|,$$

то достаточно рассмотреть $\{\varphi_n\}$. Мы должны показать, что при произвольно малом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\|\varphi_n\| < \mu + \varepsilon,$$

когда n достаточно велико. Для этого возьмем в G элемент g, для которого

$$\|g\| < \mu + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{32}$$

и образуем из g элементы g_k и ψ_n так, как соответственно f_k и φ_n были образованы из f. В выражении

$$\psi_n = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} g_k$$

элемент $g_0 = g$ заменим суммой, стоящей в правой части равенства (31), а остальные g_k — элементами, в которые преобразуют эту сумму последовательные степени оператора U. Так как $\Sigma c_k = 1$, то в выражениях φ_n и ψ_n совпадут члены с ν-го до $(n-1)$-го; следовательно, в разности $\varphi_n - \psi_n$ эти члены взаимно уничтожатся. Коэффициенты остальных 2ν членов по абсолютной величине не превосходят $\frac{1}{n}$. Таким образом, при достаточно больших n будут справедливы неравенства

$$\|\varphi_n - \psi_n\| \leqslant 2\nu \frac{1}{n} \|f\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33}$$

С другой стороны, так как U представляет собой сжатие, то из неравенства (32) вытекает аналогичное неравенство для g_k и, следовательно, для ψ_n; отсюда, в силу (33), получаем

$$\|\varphi_n\| \leqslant \|\varphi_n - \psi_n\| + \|\psi_n\| < \mu + \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Последовательности $\{\varphi_n\}$ и $\{\varphi_{n+1}\}$ — обе минимизирующие, следовательно, они имеют общий предел φ, и так как $\varphi_{n+1} = U\varphi_n$, то $U\varphi = \varphi$; на этом доказательство эргодической теоремы заканчивается.

Тем же методом можно получить и более общие результаты. Прежде всего, очевидно, что в этом доказательстве гильбертово пространство можно заменить произвольным *равномерно выпуклым* банаховым пространством. Так называются банаховы пространства, в которых норма обладает следующим свойством: если

$$\|f\| \leqslant 1 + \varepsilon, \quad \|g\| \leqslant 1 + \varepsilon \quad \text{и} \quad \left\|\frac{f+g}{2}\right\| > 1,$$

то $\|f - g\|$ стремится к нулю вместе с ε. В самом деле, этим предположением можно заменить соотношение (30), справедливое лишь в гильбертовом пространстве, для того чтобы обеспечить сходимость минимизирующих последовательностей в выпуклом множестве G. Как показал Кларксон [1], функциональные пространства L^p при $p > 1$ равномерно выпуклы, тогда как при $p = 1$ это неверно. Кроме того, известно, что *равномерно выпуклые пространства образуют весьма частный подкласс класса рефлексивных пространств* [1]).

Другое обобщение, которое можно получить с помощью нашего метода, принадлежит Данфорду [1]. Вместо одного сжатия Данфорд рассматривает несколько сжатий, *перестановочных между собой*; для простоты рассмотрим случай *двух* сжатий. Справедлива следующая

1) Петтис [1]; Мильман [1].

Теорема. *Пусть T и U — два перестановочных сжатия гильбертова пространства или равномерно выпуклого банахова пространства, а f — какой-нибудь фиксированный элемент этого пространства. Если*

$$f_{i,k} = T^i U^k f \quad (i,\ k = 0,\ 1,\ \ldots),$$

то средние арифметические

$$\varphi_{m,\,n;\,m',\,n'} = \frac{1}{(n-m)(n'-m')} \sum_{i=m}^{n-1} \sum_{k=m'}^{n'-1} f_{i,k}$$

при $n-m \to \infty$, $n'-m' \to \infty$ стремятся к некоторому элементу φ, инвариантному относительно T и U.

Доказательство почти ничем не отличается от предыдущего. Сделаем еще следующее замечание. Говоря геометрически, средние арифметические элементов $f_{i,k}$ распространены на целочисленные точки $(i,\ k)$ некоторого неограниченно увеличивающегося прямоугольника. Вместо прямоугольника можно было бы взять, например, произвольную выпуклую фигуру, у которой площадь бесконечно возрастает, а отношение периметра к площади стремится к нулю. При этом доказательство полностью сохранится, только вместо оценки (33) придется воспользоваться тем, что отношение числа точек $(i,\ k)$, расстояние которых до границы фигуры меньше некоторого фиксированного числа, к общему количеству n целочисленных точек, заключенных в рассматриваемой фигуре, стремится к нулю одновременно с $\frac{1}{n}$.

146. Полугруппы неперестановочных сжатий. Если двигаться дальше в этом направлении, то возникнет интересный вопрос, что станет с приведенной выше эргодической теоремой, если от степеней некоторого фиксированного сжатия перейти к произвольной полугруппе $\{U\}$ сжатий гильбертова пространства, перестановочных или нет, содержащей тождественный оператор и обладающей тем свойством, что одновременно с любыми двумя ее элементами U_1 и U_2 ей принадлежит также их произведение $U_1 U_2$.

Даже самая простая задача, а именно, выяснение того, применима ли теорема Данфорда к двум неперестановочным сжатиям T и U, дает представление о возникающих при этом трудностях. Способ, с помощью которого можно если не преодолеть, то хотя бы обойти эти трудности, указан Алаоглу и Г. Биркгофом [1].

Пусть $\{U\}$ — некоторая полугруппа сжатий гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Образуем „средние" элементов U этой полугруппы, т. е. операторы вида

$$T = c_1 U_1 + c_2 U_2 + \ldots + c_n U_n, \tag{34}$$

где U_i принадлежит $\{U\}$, $c_i \geqslant 0$ и $\sum c_i = 1$. Условимся говорить, что элемент g из $\mathfrak{H}$ *следует за* элементом f, если существует оператор T вида (34), преобразующий f в g. Тогда результат Алаоглу и Биркгофа может быть сформулирован следующим образом:

Теорема. *Каков бы ни был фиксированный элемент f_0 пространства $\mathfrak{H}$, элементы, следующие за f_0, сходятся к некоторому определенному элементу φ в смысле Мура—Смита: для каждого элемента f_1, следующего за f_0, и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент f_2, следующий за f_1, что*

$$\|\varphi - f\| < \varepsilon$$

для любого элемента f, который следует за f_2.

Для доказательства рассмотрим в $\mathfrak{H}$ подпространство $\mathfrak{L}$, состоящее из элементов, инвариантных относительно всех сжатий U, входящих в заданную полугруппу $\{U\}$, или, что то же самое (см. п. 144), инвариантных относительно всех сопряженных операторов U^*. Ортогональное дополнение $\mathfrak{M}$ подпространства $\mathfrak{L}$ отображается всеми U само в себя; действительно, если $(f, g) = 0$ для всех элементов g подпространства $\mathfrak{L}$, то

$$(Uf, g) = (f, U^*g) = (f, g) = 0.$$

Те элементы, которые следуют за каким-нибудь h_1, принадлежащим $\mathfrak{M}$, образуют выпуклое множество G. Следовательно, его замыкание $\overline{G}$ содержит единственный минимальный элемент ψ. Так как U представляют собой сжатия, то $\|U\psi\| \leqslant \|\psi\|$; элемент $U\psi$ тоже принадлежит $\overline{G}$, поэтому, в силу единственности минимального элемента,

$$U\psi = \psi.$$

Таким образом, элемент ψ принадлежит не только $\mathfrak{M}$, но и подпространству $\mathfrak{L}$, состоящему из инвариантных элементов, и, в силу ортогональности этих подпространств, $\psi = 0$. Это означает, что в миожестве G, т. е. среди элементов, следующих за h_1, есть элементы со сколь угодно малой нормой. Если h_2 следует за h_1 и $\|h_2\| < \varepsilon$, то $\|h\| < \varepsilon$ для любого элемента $h = Th_2$, следующего за h_2, так как операторы T вида (34), очевидно, также являются сжатиями.

Пусть теперь f_0 — произвольный фиксированный элемент пространства $\mathfrak{H}$ и $f_0 = g_0 + h_0$, где g_0 и h_0 принадлежат соответственно $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$. Элемент g_0 инвариантен относительно всех U, а следовательно, и относительно всех T; поэтому все элементы, следующие за g_0, совпадают с ним. Отсюда вытекает, что всякий элемент f_1, который следует за f_0, имеет вид $f_1 = g_0 + h_1$, где h_1 принадлежит $\mathfrak{M}$. Согласно предыдущему, за каждым таким f_1 следует элемент $f_2 = g_0 + h_2$, такой, что все следующие за ним элементы имеют вид $f=g_0+h$, где $\|h\|<\varepsilon$. Таким образом, теорема доказана, причем обнаружено, что $\varphi=g_0$, т. е. φ представляет собой проекцию элемента f_0 на подпространство $\mathfrak{L}$ инвариантных элементов.

Этот результат распространяется на некоторые более общие банаховы пространства, в частности на L^p $(p>1)$, но не распространяется, как это ни странно, на другие равномерно выпуклые пространства. В упомянутой выше работе Алаоглу и Г. Биркгофа дается характеристика тех пространств, в которых этот результат справедлив, а также содержится целый ряд других обобщений эргодической теоремы[1]).

[1]) Мы занимались здесь только „статистической" эргодической теоремой И. Неймана. „Индивидуальную" эргодическую теорему Дж. Д. Биркгофа и ее обобщения читатель найдет у Хопфа [1] и Рисса [21].