Глава XI

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ТЕОРИИ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

147. Спектр. Криволинейные интегралы. Спектральная теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, не являющихся нормальными, а также линейных операторов в более общих пространствах разработана еще сравнительно мало. Для частного случая вполне непрерывных операторов мы располагаем теорией, которая изложена в гл. IV и VI. Между прочим, там было установлено, что для вполне непрерывного оператора K оператор K_λ, определенный равенством $I+\lambda K_\lambda=(I-\lambda K)^{-1}$, представляет собой аналитическую функцию параметра λ, не имеющую других особенностей, кроме полюсов. Так называемый *резольвентный оператор*

$$R_z=(K-zI)^{-1}=-\frac{1}{z}\left(I+\frac{1}{z}K_{\frac{1}{z}}\right) \qquad (1)$$

как функция от z обладает тем же свойством, но с оговоркой, что для него $z=0$ может оказаться точкой накопления полюсов.

В общем случае, когда рассматривается произвольный линейный оператор T в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, комплексная плоскость разбивается на две взаимно дополнительные части: *резольвентное множество* $\rho(T)$ *и спектр* $\sigma(T)$; из них первое определяется как совокупность точек z, для которых существует оператор

$$R_z=(T-zI)^{-1},$$

ограниченный и имеющий область определения, плотную в $\mathfrak{B}$. Если сам оператор T — замкнутый, то R_z также замкнут и тем самым определен во всем пространстве $\mathfrak{B}$. Так обстоит дело, в частности, тогда, когда T *определен всюду* и *ограничен*; для простоты мы н будем это предполагать. Полученные в этом направлении результаты частично распространяются на неограниченные замкнутые операторы [1]).

Можно вывести из п. 67 или доказать непосредственно, что $\rho(T)$ представляет собой открытое множество и R_z как функция переменного z голоморфна на $\rho(T)$. Говоря точнее, имеет место следующее предложение:

---

[1]) См. Тэйлор [1].

а) *Вместе с любой своей точкой* ζ *резольвентное множество* $\rho(T)$ *содержит ее окрестность*

$$|z-\zeta| \leqslant \|R_\zeta\|^{-1}, \tag{2}$$

и для z, *принадлежащих этой окрестности,* R_z *разлагается в степенной ряд*

$$R_z = R_\zeta + (z-\zeta)R_\zeta^2 + (z-\zeta)^2 R_\zeta^3 + \ldots, \tag{3}$$

сходящийся по норме.

б) *Резольвентному множеству* $\rho(T)$ *принадлежат все точки* z, *удовлетворяющие неравенству*

$$|z| > \|T\|, \tag{4}$$

и для таких z *функция* R_z *разлагается в ряд Лорана*

$$R_z = -\frac{1}{z}I - \frac{1}{z^2}T - \frac{1}{z^3}T^2 - \ldots, \tag{5}$$

сходящийся по норме.

В самом деле, условия (2) и (4) обеспечивают существование сходящихся числовых мажорант для рядов (3) и (5), поэтому эти последние сходятся по норме в соответствующих областях. В том, что суммы этих рядов равны R_z, можно убедиться, умножив их почленно на $T-zI=(T-\zeta I)-(z-\zeta)I$.

Взяв вместо T оператор T^n, где n — целое положительное число, мы придем к выводу, что $\rho(T^n)$ содержит все точки $\zeta=z^n$, для которых $|\zeta| > \|T^n\|$, т. е. те, которые удовлетворяют неравенству $|z| > \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Из очевидного равенства

$$T^n - z^n I = (T^{n-1} + zT^{n-2} + z^2T^{n-3} + \ldots + z^{n-1}I)(T-zI) \tag{6}$$

следует, что z входит при этом в $\rho(T)$ и

$$(T-zI)^{-1} = (T^n - z^n I)^{-1}(T^{n-1} + zT^{n-2} + z^2T^{n-3} + \ldots + z^{n-1}I).$$

Итак, предложение б) может быть обобщено следующим образом:

Множеству $\rho(T)$ *принадлежат все точки* z, *каждая из которых удовлетворяет условию*

$$|z| > \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

при каком-нибудь целом положительном n, *т. е. все те* z, *для которых*

$$|z| > \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{7}$$

Отметим также следующее важное соотношение:

$$R_z - R_\zeta = (z-\zeta)R_zR_\zeta, \tag{8}$$

справедливое для любых двух точек, принадлежащих $\rho(T)$; оно вытекает из формулы (1) гл. IX, а также может быть проверено непосредственно умножением обеих его частей на $(T-zI)(T-\zeta I)$.

То обстоятельство, что резольвентный оператор R_z ведет себя как обыкновенная голоморфная функция, наводит на мысль прибегнуть к методам теории функций, в частности к *теории вычетов*. В монографии, вышедшей в свет в 1913 г.[1]), один из авторов этой книги показал, что такой метод дает, в частности, разложение оператора T, соответствующее разложению спектра на *непересекающиеся* части. Получение разложения T, соответствующего разложению спектра на *произвольные* части, т. е. аналога спектрального разложения самосопряженного или нормального оператора, представляет собой гораздо более тонкую задачу, не получившую еще решения. Мощное развитие и успехи теории самосопряженных и нормальных операторов, ограниченных и неограниченных, рассеяли на время интерес к этой общей задаче; однако много лет спустя ею начали заниматься и достигли в этом направлении известных успехов[2]).

Начнем с некоторых почти очевидных замечаний.

Пусть $T(z)$ — ограниченный линейный оператор, являющийся голоморфной функцией комплексного переменного z в некоторой области D; это означает, что в окрестности любой точки ζ области D функция $T(z)$ может быть представлена в виде ряда, подобного (3), сходящегося по норме:

$$T(z)=T(\zeta)+(z-\zeta)\,T_1(\zeta)+(z-\zeta)^2T_2(\zeta)+\ldots\ . \tag{9}$$

Если C — спрямляемая кривая, принадлежащая D, то можно взять интеграл

$$\int\limits_C T(z)\,dz, \tag{10}$$

т. е. предел (по норме) сумм вида

$$\sum T(\zeta_k)\,(z_k-z_{k-1}).$$

Для наших целей существенно то, что *если замкнутая кривая C непрерывно деформируется в кривую C' в пределах области D, то значение интеграла* (10) *при этом не изменяется.*

В самом деле, от C к C' можно перейти, дополнив C конечным числом замкнутых ориентированных спрямляемых контуров K_j, каждый из которых заключен в такой окрестности некоторой точки ζ_j, где справедливо представление вида (9); почленно интегрируя ряды (9) вдоль каждого K_j, мы получим интегралы, равные O.

Отсюда, в частности, следует, что *если замкнутая кривая C в пределах области D может быть стянута в точку, то интеграл* (10) *равен O.*

---

[1]) Рисс [7] (стр. 117—121).

[2]) См. Гельфанд [1]; Лорч [4]; Данфорд [2], [3]; Тэйлор [1]; Хилле [3].

Непосредственным следствием этого является

Теорема[1]) *Спектр линейного оператора никогда не пуст, по крайней мере тогда, когда пространство не состоит из единственного элемента* 0.

В самом деле, в противном случае функция R_z была бы голоморфна по всей комплексной плоскости и равенство

$$\int_C R_z\,dz = O$$

выполнялось бы для всякого замкнутого спрямляемого контура C. Но если в качестве C взять окружность радиуса $> \|T\|$ с центром в $z=0$, то такой интеграл можно будет вычислить, проинтегрировав почленно ряд (5); при этом мы получим $-2\pi i I$. А так как $O \neq I$, за исключением того случая, когда все пространство состоит из единственного элемента 0, то теорема доказана.

Из сказанного следует, что спектр $\sigma(T)$ представляет собой непустое замкнутое множество, заключенное в замкнутом круге

$$|z| \leqslant \inf_n \|T^n\|^{1/n}. \tag{11}$$

148. Теорема о разложении. Назовем *допустимой областью* (по отношению к оператору T) любое ограниченное открытое множество D в комплексной плоскости, связное или несвязное, граница ∂D которого состоит из конечного числа замкнутых спрямляемых кривых, причем ориентация ∂D согласована с ориентацией D как открытого множества в ориентированной комплексной плоскости.

Пусть σ — какая-нибудь *изолированная* часть спектра $\sigma(T)$, т. е. такое его подмножество, которое отстоит на положительном расстоянии от остальной части $\bar{\sigma} = \sigma(T) - \sigma$. При этом мы не исключаем заранее возможность того, что σ или $\bar{\sigma}$ пусто. Тогда можно выбрать такую допустимую область D, что

$$\sigma = \sigma(T) \cap D. \tag{12}$$

В том случае, когда σ совпадает с $\sigma(T)$ или пусто, это очевидно. В общем случае, если σ отстоит от $\bar{\sigma}$ на расстоянии d, в качестве D можно взять объединение некоторой конечной системы кругов радиуса $\frac{d}{2}$ с центрами в точках множества σ; существование такой системы обеспечено теоремой Бореля.

Пусть D — какая-нибудь допустимая область, удовлетворяющая условию (12); так как ее граница ∂D заключена в $\rho(T)$, то

[1]) Стоун [2] (стр. 149).

можно образовать интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} R_z\,dz. \tag{13}$$

На основании топологических соображений можно заключить, что если D' — какая-нибудь другая допустимая область, то D можно преобразовать в D' с помощью конечного числа разрезов и непрерывной деформации границы, не выходя за пределы области, в которой функция R_z голоморфна; отсюда следует, что значение интеграла (13) будет одинаковым как для области D, так и для области D', т. е. этот интеграл определяется лишь самой частью σ спектра. Значение интеграла (13), представляющее собой ограниченный линейный оператор, обозначим P_σ.

Если T — самосопряженный (или нормальный) оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то P_σ является проекционным оператором, отображающим $\mathfrak{H}$ на подпространство, соответствующее части σ спектра (см. пп. 135, 136). Мы покажем, что в случае произвольного банахова пространства $\mathfrak{B}$ оператор P_σ осуществляет „параллельное проектирование" (см. п. 78).

Расстояние от σ до замкнутого множества, дополнительного к D, положительно, поэтому существует допустимая область D', такая, что $\sigma \subset D' \subset D$ и ее граница $\partial D'$ заключена внутри области D. При этом

$$P_\sigma = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} R_z\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D'} R_{z'}\,dz',$$

следовательно,

$$P_\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\partial D}\int\limits_{\partial D'} R_z R_{z'}\,dz'\,dz = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\partial D}\int\limits_{\partial D'} \frac{R_z - R_{z'}}{z-z'}\,dz'\,dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\partial D} R_z\,dz \int\limits_{\partial D'} \frac{1}{z-z'}\,dz' - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\partial D'} R_{z'}\,dz' \int\limits_{\partial D} \frac{1}{z-z'}\,dz.$$

Но

$$\int\limits_{\partial D'} \frac{1}{z-z'}\,dz' = 0, \qquad \int\limits_{\partial D} \frac{1}{z-z'}\,dz = 2\pi i,$$

так как z находится вне области D', а z' — внутри области D.

Итак, $P_\sigma^2 = P_\sigma$, а это свойство как раз характеризует операторы параллельного проектирования. Пространство $\mathfrak{B}$ может быть представлено как векторная сумма двух своих линейно независимых подпространств $\mathfrak{M}_\sigma$ и $\mathfrak{N}_\sigma$, где $\mathfrak{M}_\sigma$ состоит из тех элементов f, для которых $P_\sigma f = f$, а $\mathfrak{N}_\sigma$ — из тех g, для которых $P_\sigma g = 0$; другими словами, оператор P_σ осуществляет „параллельное проектирование на $\mathfrak{M}_\sigma$ в направлении $\mathfrak{N}_\sigma$".

Оператор T, будучи перестановочен с R_z, перестановочен также с P_σ, следовательно, T отображает само в себя каждое из подпространств $\mathfrak{M}_\sigma$ и $\mathfrak{N}_\sigma$. Таким образом, изучение оператора T может быть сведено к изучению его „частей“ T' и T'' соответственно в $\mathfrak{M}_\sigma$ и в $\mathfrak{N}_\sigma$. Соответствующие резольвентные операторы обозначим R'_z и R''_z.

Очевидно, что резольвентное множество $\rho(T)$ равно пересечению резольвентных множеств операторов T' и T'':

$$\rho(T)=\rho(T')\cap\rho(T'').$$

Множества $\rho(T')$ и $\rho(T'')$ не совпадают; мы покажем, что множеству $\rho(T')$ принадлежат все точки, лежащие вне D, а множеству $\rho(T'')$ — все точки, лежащие внутри D.

В самом деле, из очевидных соотношений

$$(T-\zeta I)R_z=(T-zI)R_z+(z-\zeta)R_z=I+(z-\zeta)R_z$$

следует, что

$$(T-\zeta I)\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{R_z}{z-\zeta}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{dz}{z-\zeta}\cdot I+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}R_z\,dz=$$

$$=\begin{cases}0\cdot I-P_\sigma=-P_\sigma, & \text{если } \zeta \text{ лежит вне } D,\\ 1\cdot I-P_\sigma=I-P_\sigma, & \text{если } \zeta \text{ лежит внутри } D.\end{cases}$$

В силу того, что все эти операторы перестановочны, полученный результат означает, что, когда ζ находится вне D, оператор R'_ζ существует и равен части оператора

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{R_z}{z-\zeta}\,dz$$

в подпространстве $\mathfrak{M}_\sigma$, а когда ζ находится внутри D, R''_ζ существует и равен части оператора

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{R_z}{z-\zeta}\,dz$$

в подпространстве $\mathfrak{N}_\sigma$.

Из сказанного следует, что $\sigma(T')$ совпадает с частью спектра $\sigma(T)$, попавшей в D, т. е. с σ, а $\sigma(T'')$ совпадает с частью спектра $\sigma(T)$, лежащей вне D, т. е. с $\bar{\sigma}$.

Так как спектр ограниченного линейного оператора пуст тогда и только тогда, когда соответствующее пространство состоит из единственного элемента 0, то множество $\bar{\sigma}=\sigma(T'')$ пусто только при $\mathfrak{N}_\sigma=(0)$, т. е. при $P_\sigma=I$. Это означает, что $P_\sigma=I$ тогда и только тогда, когда σ совпадает с $\sigma(T)$.

Если вместо σ взять $\bar{\sigma}$, то мы получим оператор $P_{\bar{\sigma}}=I-P_\sigma$ и соответствующие подпространства

$$\mathfrak{M}_{\bar{\sigma}}=\mathfrak{N}_\sigma \text{ и } \mathfrak{N}_{\bar{\sigma}}=\mathfrak{M}_\sigma.$$

Действительно, взяв непересекающиеся допустимые области D и

$\overline{D}$, такие, что $\sigma(T)\cap D=\sigma$, $\sigma(T)\cap\overline{D}=\overline{\sigma}$, и заметив, что $D\cup\overline{D}$ является допустимой областью, содержащей весь спектр, получим

$$P_\sigma+P_{\overline{\sigma}}=-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\partial D}R_z\,dz+\int\limits_{\partial\overline{D}}R_z\,dz\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial(D\cup\overline{D})}R_z dz=P_{\sigma(T)}=I.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема о разложении. *Пусть T — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, а σ и $\overline{\sigma}$ — две изолированные взаимно дополнительные части его спектра; одно из множеств σ или $\overline{\sigma}$ может, в частности, быть пустым. Тогда пространство $\mathfrak{B}$ может быть представлено как векторная сумма двух своих линейно независимых подпространств $\mathfrak{M}_\sigma$ и $\mathfrak{M}_{\overline{\sigma}}$, каждое из которых отображается оператором T само в себя. При этом T, если его рассматривать как оператор в $\mathfrak{M}_\sigma$ или в $\mathfrak{M}_{\overline{\sigma}}$, имеет спектр, совпадающий соответственно с σ и с $\overline{\sigma}$. Оператор, проектирующий $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{M}_\sigma$ в направлении $\mathfrak{M}_{\overline{\sigma}}$, выражается в виде*

$$P_\sigma=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}R_z dz,$$

где интеграл берется вдоль границы произвольной допустимой (относительно T) области D, такой, что $\sigma=\sigma(T)\cap D$. При этом $P_\sigma=I$, $P_{\overline{\sigma}}=O$ тогда и только тогда, когда σ совпадает с $\sigma(T)$, а $\overline{\sigma}$ пусто.

Эту теорему можно рассматривать как обобщение теоремы о разложении для вполне непрерывных линейных операторов, доказанной в гл. IV. Вспомним, что спектр вполне непрерывного линейного оператора T (состоящий из обратных величин „особых“ значений и, может быть, точки $z=0$) не имеет точек накопления, отличных от $z=0$. Следовательно, любая точка $z_0\neq 0$, принадлежащая $\sigma(T)$, образует изолированную часть спектра. Отделив z_0 от остальных точек спектра малой окружностью C и воспользовавшись очевидным соотношением

$$R_z=\frac{T-(T-zI)}{z}R_z=T\frac{R_z}{z}-\frac{I}{z},$$

мы получим

$$P_{z_0}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C R_z\,dz=T\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{R_z}{z}dz\right).$$

Таким образом, проекционный оператор P_{z_0} представляется в виде произведения вполне непрерывного оператора и ограниченного линейного оператора, следовательно (см. п. 76), оператор P_{z_0} сам вполне непрерывен. Далее, так как P_{z_0} оставляет инвариантными элементы соответствующего подпространства $\mathfrak{M}_{z_0}$, то всякое бесконечное ограниченное множество в $\mathfrak{M}_{z_0}$ должно быть компактно; отсюда следует, что $\mathfrak{M}_{z_0}$ — *конечномерное* пространство (доказательство этого утверждения в применении к подпространствам $\mathfrak{M}_n$ приведено в пп. 77 и 89).

Вернемся к нашей общей теореме и выведем из нее несколько интегральных формул, которые пригодятся нам в дальнейшем.

Первая формула относится к степеням оператора T. Из соотношения (6) вытекает, что для любой точки z множества $\rho(T)$

$$T^n R_z = z^n R_z + z^{n-1} I + \ldots + z^2 T^{n-3} + z T^{n-2} + T^{n-1}$$

и, следовательно,

$$T^n P_\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} T^n R_z \, dz = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} z^n R_z \, dz, \tag{14}$$

так как интегралы остальных слагаемых обращаются в нуль.

Вторая формула относится к степеням резольвентного оператора R_a, т. е. к операторам $(T - aI)^{-n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для значений a, принадлежащих резольвентному множеству. В очевидном соотношении

$$(\zeta R_a^n + \zeta^2 R_a^{n-1} + \ldots + \zeta^n R_a)[(T - aI) - \zeta^{-1} I] = \zeta^n I - R_a^n$$

положим $\zeta = (z - a)^{-1}$; умножив на R_z и перегруппировав слагаемые, получим

$$R_a^n R_z = (z-a)^{-n} R_z - (z-a)^{-n} R_a - (z-a)^{-n+1} R_a^2 - \ldots - (z-a)^{-1} R_a^n.$$

Отсюда следует, что

$$(T - aI)^{-n} P_\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} R_a^n R_z \, dz = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} (z-a)^{-n} R_z \, dz, \tag{15}$$

по крайней мере тогда, когда точка a находится вне допустимой области D, выбранной, как указано выше, так, чтобы было $\sigma(T) \cap D = \sigma$; это предположение никак не ограничивает общности вывода, ибо a принадлежит $\rho(T)$.

Если рациональной функции

$$u(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k + \sum_{k=1}^{n_1} c_{1k} (z - a_1)^{-k} + \ldots + \sum_{k=1}^{n_m} c_{mk} (z - a_m)^{-k},$$

полюсы которой $a_1, \ldots, a_m$ принадлежат $\rho(T)$, поставить в соответствие оператор

$$u(T) = \sum_{k=0}^{n} c_k T^k + \sum_{k=1}^{n_1} c_{1k} (T - a_1 I)^{-k} + \ldots + \sum_{k=1}^{n_m} c_{mk} (T - a_m I)^{-k},$$

то из (14) и (15), просуммировав, получим более общую формулу

$$u(T) P_\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} u(z) R_z \, dz, \tag{16}$$

в которой D — допустимая область, такая, что $\sigma(T) \cap D = \sigma$ и ни одна из точек $a_1, \ldots, a_m$ не попадает ни внутрь D, ни на ее границу.

149. Спектр и нормы степеней оператора. Рассмотрим частный случай, когда две взаимно дополнительные части спектра $\sigma(T)$ могут быть отделены окружностью C

$$|z - a| = r,$$

лежащей в резольвентном множестве $\rho(T)$. Если σ — часть спектра, попавшая внутрь C, то

$$P_\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \int_C R_z \, dz = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} R_{z_k} (z_{k+1} - z_k),$$

где $z_k = a + r\varepsilon^k$, $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ и имеет место сходимость по норме. Положив $U = \frac{1}{r}(T - aI)$, получим

$$P_\sigma = \lim_{n \to \infty} \frac{\varepsilon - 1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} (I - \varepsilon^{-k} U)^{-1} = \lim_{n \to \infty} n \frac{\varepsilon - 1}{2\pi i} (I - U^n)^{-1} = \lim_{n \to \infty} (I - U^n)^{-1};$$

при этом мы воспользовались тождеством

$$\frac{1}{1 - x^n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 - \varepsilon^{-k} x},$$

заменив в нем переменное x оператором U, а также тем фактом, что $n(\varepsilon - 1)/2\pi i \to 1$. Таким образом, доказана

Теорема[1]). *Если часть σ спектра оператора T может быть отделена от остальной части спектра окружностью $|z - a| = r$, лежащей в резольвентном множестве, причем σ находится внутри этой окружности, то*

$$P_\sigma = \lim_{n \to \infty} \left[I - \left(\frac{T - aI}{r} \right)^n \right]^{-1}$$

в смысле сходимости по норме.

При тех же условиях, в силу (16),

$$(T - aI)^n P_\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \int_C (z - a)^n R_z \, dz \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Отсюда вытекает, что

$$\| (T - aI)^n P_\sigma \| \leqslant \frac{1}{2\pi} 2\pi r \cdot r^n \max_C \| R_z \|$$

---

[1]) Лорч [4].

и, следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \|(T-aI)^n P_\sigma\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r.$$

Варьируя r так, чтобы C продолжала оставаться в $\rho(T)$, мы придем к выводу, что нижняя грань значений r равна наибольшему расстоянию от точки a до точек σ, откуда вытекает, что

$$\limsup_{n\to\infty} \|(T-aI)^n P_\sigma\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \max_{z\in\sigma} |z-a|. \tag{17}$$

Мы получаем в этом случае возможность охарактеризовать подпространство $\mathfrak{M}_\sigma$ следующим образом. Если f принадлежит $\mathfrak{M}_\sigma$, то $f=P_\sigma f$ и, в силу (17),

$$\limsup_{n\to\infty} \|(T-aI)^n f\|^{\frac{1}{n}} < r. \tag{18}$$

Обратно, пусть f — элемент пространства $\mathfrak{B}$, для которого выполняется условие (18). При этом ряд

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} (T-aI)^n f$$

сходится на окружности C радиуса r и даже равномерно. Его сумма h_z, очевидно, удовлетворяет равенству $(T-aI)h_z = (z-a)h_z+f$, откуда следует, что $(T-zI)h_z=f$, $R_z f=h_z$ и, так как законно почленное интегрирование, то

$$P_\sigma f = -\frac{1}{2\pi i}\int_C R_z f\,dz = f.$$

Мы получили следующий результат:

Теорема. *В условиях предыдущей теоремы элементы f подпространства $\mathfrak{M}_\sigma$ характеризуются неравенством* (18).

В частности, если σ состоит из одной точки $z=a$, которая в этом случае является изолированной точкой спектра, то для элементов f подпространства $\mathfrak{M}_\sigma$ неравенство (18) выполняется при любом достаточно малом положительном r, т. е. для таких f справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \|(T-aI)^n f\|^{\frac{1}{n}} = 0;$$

подпространству $\mathfrak{M}_\sigma$ принадлежат, между прочим, все те f, для которых

$$(T-aI)^n f = 0$$

при каком-либо значении $n \geqslant 0$.

Теперь допустим, что σ совпадает со всем спектром $\sigma(T)$. Тогда $P_\sigma = I$ и, записав неравенство (17) при $a=0$, мы получим

$$\limsup_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r_T, \tag{19}$$

где r_T означает *спектральный радиус* оператора T, т. е. радиус наименьшего замкнутого круга с центром в 0, содержащего весь спектр оператора T.

С другой стороны, в силу неравенства (11) п. 147,

$$r_T \leqslant \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}};$$

сопоставив полученные неравенства, мы придем к следующему результату:

Теорема[1]). *Для любого ограниченного линейного оператора T предел*

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

существует и равен спектральному радиусу r_T оператора T[2]).

Отсюда следует, что предел выражения $\|(T-aI)^n\|^{\frac{1}{n}}$ равен наибольшему расстоянию от $z=a$ до точек множества $\sigma(T)$. В частности, *равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|(T-aI)^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$$

означает, что $z=a$ является единственной точкой спектра оператора T. Очевидным примером оператора, спектр которого состоит из одной точки, может служить $T=aI$. Операторами такого вида исчерпываются нормальные операторы в гильбертовом пространстве, спектр которых состоит из одной точки. Напротив, даже в гильбертовом пространстве можно указать бесконечное множество других операторов, обладающих этим свой-

---

[1]) См. Гельфанд [1] и (для частного случая, рассматриваемого в следующем пункте) Бёрлинг [1].

[2]) Существование предела $\lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ следует уже из очевидного неравенства $\|T^{n+m}\| \leqslant \|T^n\| \|T^m\|$; в самом деле, если последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ удовлетворяет неравенствам $a_{n+m} \leqslant a_n a_m$, то последовательность $\left\{a_n^{\frac{1}{n}}\right\}$ сходится к своей нижней грани; иначе говоря, если последовательность $\{\alpha_n\}$ „полуаддитивна", т. е. удовлетворяет неравенствам $\alpha_{n+m} \leqslant \alpha_n + \alpha_m$, то последовательность $\{\alpha_n/n\}$ сходится к своей нижней грани (см. Полиа и Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. 1, отд. 1, задача 98).

ством, но не являющихся нормальными. Например, в пространстве $L^2(a, b)$ всякий оператор типа Вольтерра

$$Kf(x) = \int_a^x K(x, y) f(y)\, dy$$

с ограниченным измеримым ядром $K(x, y)$ имеет в качестве спектра единственную точку 0. Действительно, в п. 65 мы показали, что любая точка комплексной плоскости регулярна по отношению к оператору K, поэтому, в силу соотношения (1), любая точка $z \neq 0$ принадлежит резольвентному множеству.

Существование такого многообразия линейных операторов, спектры которых сконцентрированы в одной точке, дает представление о трудностях, возникающих при попытке охарактеризовать линейные операторы общего вида при помощи спектров.

Возьмем теперь два перестановочных ограниченных линейных оператора S и T и посмотрим, как связаны между собой величины r_S, r_T, r_{ST} и r_{S+T}.

Из только что доказанной теоремы прямо следует, что

$$r_{ST} = \lim_{n\to\infty} \|(ST)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|S^n T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \|S^n\|^{\frac{1}{n}} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = r_S r_T.$$

Что касается r_{S+T}, то прежде всего отметим неравенство

$$\|(S+T)^n\| = \left\| \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} S^\nu T^{n-\nu} \right\| \leqslant \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \|S^\nu\| \|T^{n-\nu}\|. \tag{20}$$

Зададим произвольным образом $p > r_S$ и $q > r_T$; тогда существует целое число $m > 0$, такое, что

$$\|S^n\|^{\frac{1}{n}} < p, \quad \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < q \text{ для } n \geqslant m;$$

с другой стороны, при любом n справедливы неравенства

$$\|S^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|S\| = s \quad \text{и} \quad \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \|T\| = t.$$

Для $n > 2m$ из (20) будет следовать, что

$$\|(S+T)^n\| \leqslant \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{n}{\nu} s^\nu q^{n-\nu} + \sum_{\nu=m}^{n-m} \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu} + \sum_{\nu=n-m+1}^{n} \binom{n}{\nu} p^\nu t^{n-\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu} \left(\frac{s}{p}\right)^\nu + \sum_{\nu=m}^{n-m} \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu} + \sum_{\nu=n-m+1}^{n} \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu} \left(\frac{t}{q}\right)^{n-\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} p^\nu q^{n-\nu} \right] \left[\max_{0 \leqslant k \leqslant m-1} \left(\frac{s}{p}\right)^k + 1 + \max_{0 \leqslant k \leqslant m-1} \left(\frac{t}{q}\right)^k \right] =$$

$$= (p+q)^n M,$$

где M не зависит от n; следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \|(S+T)^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty} (p+q) M^{\frac{1}{n}} = p+q.$$

Заставив p и q стремиться соответственно к r_S и r_T, мы получим

$$r_{S+T} \leqslant r_S + r_T.$$

Итак, *если S и T перестановочны, то*[1])

$$r_{ST} \leqslant r_S r_T, \quad r_{S+T} \leqslant r_S + r_T. \tag{21}$$

Эти неравенства дают известное представление о поведении спектров перестановочных операторов при умножении и сложении.

150. Применение к абсолютио сходящимся тригонометрическим рядам. Полученные в предыдущем пункте соотношения допускают интересное применение к теории непрерывных функций $f(x)$, заданных на всей действительной оси, периодических или почти периодических, ряды Фурье которых абсолютно сходятся. Итак, рассматриваются функции $f(x)$ вида

$$f(x) = \sum_\nu c(\nu) e^{i\nu x},$$

где

$$\sum_\nu |c(\nu)| < \infty, \tag{22}$$

причем $c(\nu)$ равна нулю всюду, кроме некоторого конечного или счетного множества значений ν, по которому производится суммирование.

Если сумму в (22) принять за *норму* функции f и обозначить ее $\|f\|$, то получим следующие соотношения: $\|f\| \geqslant 0$, причем $\|f\|=0$ лишь для $f(x) \equiv 0$; $\|cf(x)\| = |c| \|f(x)\|$, $\|f(x)+g(x)\| \leqslant \leqslant \|f(x)\| + \|g(x)\|$. Нетрудно видеть, что с такой нормой множество $\mathfrak{A}$ описанных функций *полно*, т. е. $\mathfrak{A}$ представляет собой банахово пространство.

Более того, вместе с функциями $f(x)$ и $g(x)$ пространству $\mathfrak{A}$ принадлежит также их *произведение*, причем

$$\|f(x) g(x)\| \leqslant \|f(x)\| \|g(x)\|.$$

В самом деле, если

$$f(x) = \sum c(\nu) e^{i\nu x} \quad \text{и} \quad g(x) = \sum d(\nu) e^{i\nu x},$$

то

$$f(x) g(x) = \sum_\nu \Big(\sum_\mu c(\mu) d(\nu-\mu) \Big) e^{i\nu x}$$

и

$$\sum_\nu \Big| \sum_\mu c(\mu) d(\nu-\mu) \Big| \leqslant \sum_\nu \sum_\mu |c(\mu) d(\nu-\mu)| = \sum_\mu |c(\mu)| \sum_\nu |d(\nu)|.$$

[1]) Для частного случая, который рассматривается в п. 150, эти соотношения получены Бёрлингом [1].

Отсюда следует, что всякий элемент f пространства $\mathfrak{A}$ порождает некоторый линейный оператор T_f в $\mathfrak{A}$, а именно,

$$T_f g(x) = f(x) g(x).$$

При этом, очевидно,

$$T_{cf} = cT_f, \quad T_{f_1+f_2} = T_{f_1} + T_{f_2}, \quad T_{f_1 f_2} = T_{f_1} T_{f_2},$$

откуда следует, что

$$T_{f_1} \smile T_{f_2}.$$

Так как

$$\|T_f g\| \leqslant \|f\| \|g\|$$

и так как при $g(x) \equiv 1$ справедливы равенства $T_f g = f$ и $\|g\| = 1$, то

$$\|T_f\| = \|f\|$$

и

$$\|T_f^n\| = \|T_{f^n}\| = \|f^n\|.$$

Таким образом,

$$r_{T_f} = \lim_{n\to\infty} \|T_f^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|f^n\|^{1/n}. \tag{23}$$

Докажем, следуя Бёрлингу [1], что этот предел равен

$$M_f = \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)|,$$

т. е. что[1])

$$r_{T_f} = M_f. \tag{24}$$

---

[1]) В пространстве L^2 периодических (с периодом 1) функций $f(x) \sim \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x}$ с суммируемым квадратом, где

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2\right)^{1/2}$$

(а не $\sum |c_k|$!), оператор $T_f g(x) = f(x) g(x)$, очевидно, ограничен тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ существенно ограничена; при этом

$$\|T_f\| = \operatorname{vrai\,max} |f(x)|.$$

В рассматриваемом пространстве $\mathfrak{A}$ мы имеем лишь неравенство

$$\|T_f\| \geqslant M_f = \max |f(x)|$$

и отношение $\|T_f\| : M_f$ может быть сколь угодно велико. В этом можно убедиться, обратившись к фейеровским средним

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) c_k e^{2\pi i k x},$$

которые соответствуют ограниченной периодической функции

$$h(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{2\pi i k x},$$

имеющей хотя бы одну точку разрыва.

Так как

$$|f(x)| = \left|\sum_{\nu} c(\nu)\, e^{i\nu x}\right| \leqslant \sum_{\nu} |c(\nu)| = \|f\|,$$

то

$$M_f \leqslant \|f\|; \tag{25}$$

кроме того, $M_f^n = M_{f^n}$, поэтому

$$M_f = M_{f^n}^{1/n} \leqslant \|f^n\|^{1/n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{25a}$$

следовательно,

$$M_f \leqslant r_{T_f}. \tag{26}$$

Сначала предположим, что $f(x)$ представляет собой тригонометрический многочлен вида

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} c(\nu_k)\, e^{i\nu_k x}$$

(с произвольными действительными ν_k). В разложении

$$f^n(x) = \sum_{j=1}^{N} d(\mu_j)\, e^{i\mu_j x}$$

число N членов с различными μ_j не превзойдет числа сочетаний с повторениями из n элементов по p. Заметив, что

$$\sum_{j=1}^{N} |d(\mu_j)|^2 = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} |f(x)|^{2n}\, dx \leqslant M_f^{2n}$$

(см. пп. 101, 102), и воспользовавшись неравенством Коши, получим

$$\|f^n\|^{1/n} = \left(\sum_{j=1}^{N} |d(\mu_j)|\right)^{1/n} \leqslant M_f N^{1/2n}.$$

Сопоставив это неравенство с (26), мы увидим, что $\|f^n\|^{1/n}$ при $n \to \infty$ стремится к M_f, т. е. мы получим для рассматриваемого частного случая равенство (24).

Общий случай может быть сведен к случаю тригонометрического многочлена следующим образом. Ясно, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы $f(x) = g(x) + h(x)$, где $g(x)$ — тригонометрический многочлен и $\|h(x)\| < \varepsilon$. Тогда, с одной стороны,

$$r_{T_g} = M_g \leqslant M_f + M_h,$$

где $M_h \leqslant \|h\|$ [см. (25)], а, с другой стороны,

$$r_{T_h} = \lim_{n} \|h^n\|^{1/n} \leqslant \|h\|.$$

Так как $T_f = T_g + T_h$, то, в силу (21),

$$r_{T_f} \leqslant r_{T_g} + r_{T_h} \leqslant M_f + 2\|h\| \leqslant M_f + 2\varepsilon.$$

Так как ε было выбрано произвольно, то $r_{T_f} \leqslant M_f$; сопоставив это неравенство с (26), мы получим (24).

Равенство (24) показывает, что *спектр оператора T_f заключен целиком в круге $|z| \leqslant M_f$*. Но можно получить и более точный результат:

Теорема. *Спектр оператора T_f совпадает с замыканием множества значений функции $f(x)$.*

Возьмем точку z, принадлежащую резольвентному множеству $\rho(T_f)$. Для любого элемента $h(x)$ пространства $\mathfrak{A}$ найдется тогда элемент $g(x)$, удовлетворяющий уравнению $(T_f - zI)\,g(x) = h(x)$; выбрав, в частности, $h(x) \equiv 1$, мы придем к выводу, что функция $\frac{1}{f(x)-z}$ также принадлежит $\mathfrak{A}$. Следовательно, z не может быть ни значением фуикции $f(x)$, ни пределом какой-либо последовательности ее значений.

Обратно, пусть точка z находится на расстоянии $\delta_z > 0$ от множества значений функции $f(x)$; положим

$$\Delta_z = \sup_x |f(x) - z|$$

и рассмотрим функцию

$$f^*(x) = (\overline{f(x)} - \overline{z})\,(f(x) - z) - \frac{1}{2}(\Delta_z^2 + \delta_z^2).$$

Эта функция, очевидно, принадлежит пространству $\mathfrak{A}$ и $M_{f^*} = \frac{1}{2}(\Delta_z^2 + \delta_z^2)$. Точка $\zeta = -\frac{1}{2}(\Delta_z^2 + \delta_z^2)$ находится вне круга радиуса M_{f^*} с центром в 0, поэтому она принадлежит резольвентному множеству оператора T_{f^*}. Следовательно, для

$$T_{f^*} - \zeta I = (T_{\bar{f}} - \bar{z}I)\,(T_f - zI)$$

существует ограниченный обратный оператор, и это же верно для оператора $T_f - zI$; таким образом, z принадлежит множеству $\rho(T_f)$. На этом доказательство теоремы заканчивается.

Непосредственно из этой теоремы вытекает следующая теорема, принадлежащая Винеру [1]):

Теорема. *Пусть $f(x)$ — функция, принимающая действительные или комплексные значения, непрерывная, периодическая и не обращающаяся в нуль. Тогда, если ее ряд Фурье сходится абсолютно, то ряд Фурье функции $1/f(x)$ также сходится абсолютно.*

---

1) Винер [1] (§ 12). Остроумное доказательство ее дано Гельфандом [2]; оно основано на теории *нормированных колец*, разработанной этим автором, и в нем используется аксиома Цермело; см. Гельфанд [1] или Хилле [3].

151. Начала операторного исчисления. В конце п. 148 были определены операторы $u(T)$ для рациональной функции $u(z)$, ни один из полюсов которой не попадает в спектр оператора T. Для этой цели мы воспользовались представлением $u(z)$ в виде суммы многочлена и элементарных дробей; в силу единственности такого представления, соответствие между $u(z)$ и $u(T)$ устанавливается однозначным образом. Это следует также из формулы

$$u(T) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} u(z) R_z\,dz, \tag{27}$$

где D — произвольная область, допустимая по отношению к T, которая охватывает спектр $\sigma(T)$, но не содержит полюсов функции $u(z)$. [Это — частный случай формулы (16) п. 148 при $\sigma = \sigma(T)$; напомним, что $P_{\sigma(T)} = I$.]

Для рассматриваемых сейчас рациональных функций действия над ними, в том числе и образование сложных функций, переносятся на соответствующие операторы. Это было бы нетрудно доказать, обратившись прямо к определению операторов $u(T)$, но мы предпочтем воспользоваться формулой (27).

Предварительно заметим, что формула (27) позволяет распространить соответствие между функциями и операторами за пределы класса рациональных функций. Для того чтобы значение интеграла (27) не зависело от выбора области D, необходимо ограничиться функциями аналитическими или хотя бы „кусочно"-аналитическими. Выражаясь точнее, мы условимся рассматривать *функции $u(z)$, определенные и имеющие конечные производные по комплексному переменному z на некотором открытом множестве E_u, охватывающем спектр оператора.* (Как это отражено в обозначении, множество E_u зависит от выбора функции $u(z)$.) *Класс* таких функций мы обозначим $\mathcal{Y}(T)$.

Пусть D — область, допустимая по отношению к T, охватывающая спектр оператора T и содержащаяся вместе со своей границей ∂D в E_u. (Существование такой области можно легко установить с помощью теоремы Бореля.) Образуем по формуле (27) оператор $u(T)$. Этот последний не зависит от выбора области D, обладающей указанными свойствами. В самом деле, от D можно перейти к аналогичной области D', осуществив конечное число разрезов и подвергнув границу непрерывной деформации внутри общей части множеств $\rho(T)$ и E_u; но в $\rho(T) \cap E_u$ функция $u(z) R_z$ голоморфна [1]), поэтому интегралы (27), соответствующие областям D и D', совпадут.

[1]) Действительно, если z_0 — произвольная точка множества $\rho(T) \cap E_u$, то в некоторой ее окрестности $u(z)$ и R_z разлагаются в ряды по степеням $z - z_0$. Так как ряд для R_z мажорируется по норме сходящимся числовым рядом, то для $u(z) R_z$ можно получить разложение по степеням $z - z_0$, перемножив по обычному правилу ряды, соответствующие обоим множителям.

Ясно, что соответствие между функциями и операторами, распространенное таким образом на функции класса $\mathcal{F}(T)$, оказывается *однородным* и *аддитивным*; для этого достаточно заметить, что если $u(z)$ и $v(z)$ принадлежат классу $\mathcal{F}(T)$, то их сумма определена и имеет производную на множестве $E_u \cap E_v \supset \rho(T)$, а интеграл (27) обладает свойствами однородности и аддитивности по u. Установленное соответствие вместе с тем *мультипликативно*; в этом можно убедиться, проведя выкладку с интегралами типа

$$\int_{\partial D} \frac{u(z)}{z-z'}\,dz,$$

аналогичную той, с помощью которой в п. 148 было доказано равенство $P_\sigma^2 = P_\sigma$.

Из мультипликативного свойства вытекает, что все операторы вида $u(T)$ *перестановочны*. Если функция $v(z) = \frac{1}{u(z)}$ также принадлежит классу $\mathcal{F}(T)$, что имеет место в том случае, когда $u(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке спектра $\sigma(T)$, то, в силу мультипликативности,

$$u(T)\,v(T) = v(T)\,u(T) = I,$$

откуда следует, что

$$v(T) = [u(T)]^{-1}.$$

Наконец, так как $\|R_z\|$ представляет собой непрерывную функцию переменного z и, следовательно, $\|R_z\|$ ограничена на ∂D, то, согласно (27), соответствие между $u(z)$ и $u(T)$ *непрерывно* в том смысле, что если $u_n(z)$ равномерно сходятся к $u(z)$ на некотором открытом множестве, содержащем $\sigma(T)$, то операторы $u_n(T)$ сходятся к $u(T)$ по норме.

Заметим еще, что если σ — изолированная часть спектра оператора T, а D — допустимая область, такая, что $\sigma(T) \cap D = \sigma$, то функция, равная 1 внутри D и равная 0 вне этого множества, принадлежит классу $\mathcal{F}(T)$; соответствующий проекционный оператор P_σ также оказывается „функцией" оператора T. Последнее обстоятельство не имело бы места (по крайней мере при $\sigma \neq \sigma(T)$), если бы, определяя $u(T)$, мы ограничились рассмотрением функций $u(z)$, голоморфных в *связных* областях, охватывающих $\sigma(T)$[1].

Спектры оператора T и его „функций" $u(T)$ связаны соотношением

$$\sigma(u(T)) = u(\sigma(T)), \tag{28}$$

где правая часть означает совокупность значений функции $u(z)$, принимаемых ею на множестве $\sigma(T)$. Это — „теорема об отобра-

[1]) Операторное исчисление, основанное на формуле (27), было предложено Риссом [7] (стр. 117—121) и развито во всей общности Данфордом [2], [3]. Данфорду принадлежат дальнейшие теоремы этого параграфа.

женин спектров" (spectral mapping theorem), принадлежащая Данфорду.

Доказывается она следующим образом. Пусть ζ — точка спектра $\sigma(T)$. Тогда функция $v(z)=\frac{u(z)-u(\zeta)}{z-\zeta}$ принадлежит классу $\mathcal{Y}(T)$, оператор $v(T)$ определен и, в силу мультипликативности установленного соответствия, справедливо равенство

$$(T-\zeta I)\,v(T)=u(T)-u(\zeta)\,I.$$

Оператор, стоящий в правой части этого равенства, не имеет ограниченного обратного, так как в противном случае и $T-\zeta I$ имел бы ограниченный обратный оператор, равный $v(T)\,[u(T)-u(\zeta)\,I]^{-1}$. Таким образом, $u(\zeta)$ принадлежит $\sigma(u(T))$, и, следовательно, $u(\sigma(T))\subseteq\sigma(u(T))$. С другой стороны, любая точка μ, принадлежащая $\sigma(u(T))$, входит одновременно в $u(\sigma(T))$. Действительно, в противном случае функция $\chi(z)=\frac{1}{u(z-\mu)}$ принадлежала бы классу $\mathcal{Y}(T)$, следовательно, существовал бы оператор $\chi(T)$ и, в силу мультипликатнвного свойства, выполнялось бы равенство

$$\chi(T)\,[u(T)-\mu I]=I,$$

а это противоречит предположению, что μ принадлежнт $\sigma(u(T))$. На этом доказательство теоремы заканчивается.

Образование сложиых функций подчиняется следующему правилу:

Если функция $u(z)$ принадлежит классу $\mathcal{Y}(T)$, а функция $v(z)$ — классу $\mathcal{Y}(u(T))$, то сложная функция $w(z)=v(u(z))$ принадлежит классу $\mathcal{Y}(T)$ и при этом $w(T)=v(u(T))$.

Для доказательства выберем область D^*, допустнмую по отношению к $u(T)$, заключенную вместе со своей границей в открытом множестве E_v, которое соответствует функции v. Так как $u(\sigma(T))=\sigma(u(T))\subset D^*$, то можно выбрать область D, допустимую по отношению к T, которая вместе со своей границей отображалась бы функцией u внутрь области D^*. Можно даже потребовать, чтобы D вместе с границей была заключена в открытом множестве E_u, соответствующем функции u. Тогда, в силу мультипликативности соответствия, установленного между функциями и операторами,

$$[u(T)-z^*I]^{-1}=\left[\frac{1}{u-z^*}\right](T)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{1}{u(z)-z^*}R_z\,dz,$$

где z^* — точка границы ∂D^* и $R_z=(T-zI)^{-1}$; отсюда получаем

$$v(u(T)) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^*} v(z^*)\,[u(T)-z^*I]^{-1}\,dz^* =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\partial D^*}\int\limits_{\partial D} \frac{v(z^*)}{u(z)-z^*} R_z\,dz^*\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D^*}\frac{v(z^*)}{z^*-u(z)}dz^*\right)R_z dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} v(u(z))\,R_z\,dz = w(T),$$

что и требовалось доказать.

152. Два примера. Рассмотрим оператор T_f в пространстве $\mathfrak{A}$, введенный в п. 149. Спектр оператора T_f, как мы видели, совпадает с замыканием множества значений функции $f(x)$, поэтому соответствующий класс $\mathcal{Y}(T_f)$ состоит из функций, голоморфных в открытой области, охватывающей (связное) множество значений $f(x)$. Выбрав надлежащим образом область D, мы получим для любого элемента h пространства $\mathfrak{A}$ соотношения

$$u(T_f)\,h = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} u(z)\,(T_f - zI)^{-1} h\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} u(z)\,\frac{h(x)}{f(x)-z}\,dz =$$
$$= u(f(x))\,h(x).$$

Положив, в частности, $h(x) \equiv 1$, мы увидим, что функция $u(f(x))$ также принадлежит пространству $\mathfrak{A}$. Это обстоятельство, которое впервые заметил П. Леви[1]), может быть сформулировано, в применении к периодическим функциям, следующим образом:

Теорема. *Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, ряд Фурье которой сходится абсолютно. Тогда, какова бы ни была функция $u(z)$, голоморфная в открытой области комплексной плоскости, содержащей все значения, которые принимает $f(x)$, функция $u(f(x))$ также обладает абсолютно сходящимся рядом Фурье.*

Пусть T — ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве $\mathfrak{P}$. Предположим, что *существует целая функция $u(z)$, обращающаяся в нуль только в точке $z=0$ и обладающая тем свойством, что оператор $u(T)$ вполне непрерывен.*

Пусть $\{z_n\}$ — последовательность точек спектра $\sigma(T)$, сходящаяся к z^*, $z_n \neq z^*$. Тогда $u(z_n) \to u(z^*)$, и так как $u(z)$ отлична от постоянной, то $u(z_n) \neq u(z^*)$, хотя бы начиная с некоторого номера. В силу соотношения $\sigma(u(T)) = u(\sigma(T))$, точки $u(z_n)$ принадлежат спектру вполне непрерывного оператора $u(T)$ и, следовательно, они могут сходиться только к нулю; таким образом, $u(z^*) = 0$ и $z^* = 0$. Мы показали, что спектр оператора T

[1]) См. Винер [1].

не может иметь точек накопления, отличных от $z^*=0$. Это означает, что любая точка $z_0 \neq 0$ спектра $\sigma(T)$ образует изолированную часть спектра. Отделим такую точку от остального спектра малой окружностью C с центром в z_0, лежащей целиком в резольвентном множестве.

Пусть $v(z)$ — функция, равная $\frac{1}{u(z)}$ внутри C и тождественно обращающаяся в нуль вне C. Очевидно, $v(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{F}(T)$. Так как произведение $u(z)v(z)$ равно 1 внутри C и равно 0 вне C, то, в силу мультипликативного свойства соответствия,

$$u(T)\,v(T)=P_{z_0},$$

где оператор P_{z_0} проектирует $\mathfrak{P}$ на подпространство $\mathfrak{M}_{z_0}$, соответствующее z_0 — изолированной части спектра (см. п. 148). Будучи произведением вполне непрерывного оператора $u(T)$ и непрерывного оператора $v(T)$, оператор P_{z_0} сам вполне непрерывен, а отсюда следует, что подпространство $\mathfrak{M}_{z_0}$ — *конечномерное*. Это в свою очередь обусловливает (см. пп. 73 и 89) *применимость к оператору T альтернативы Фредгольма.*

В частности, *альтернатива Фредгольма справедлива для T, если одна из степеней T^k ($k=2, 3, \ldots$) представляет собой вполне непрерывный оператор*[1]).

Заметим еще, что достаточно предполагать функцию $u(z)$ голоморфной в некоторой связной области, содержащей спектр оператора T, и не равной нулю при $z \neq 0$.

§ 2. ТЕОРИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ПО НЕЙМАНУ

153. Предварительные замечания. Следующее предложение является простым следствием результатов, полученных в предыдущих пунктах:

Теорема. *Пусть $u(z)$ — функция комплексного переменного z, голоморфная в некоторой области, охватывающей круг C_r: $|z| \leqslant r$. Пусть в этом круге*

$$|u(z)| \leqslant R.$$

---

[1]) В качестве применения полученного результата здесь уместно упомянуть об одной теореме Филлипса [1], которую он получил с помощью результатов Данфорда и Петтиса [1], относящихся к линейным функционалам в пространстве L суммируемых функций. Согласно этой теореме, *если линейный оператор T в пространстве L вполне непрерывен в смысле слабой сходимости, т. е. если он отображает ограниченные множества в множества слабо компактные, то его квадрат T^2 вполне непрерывен в обычном смысле, т. е. в смысле сильной сходимости.* Из этой теоремы и из только что полученного нами результата [для частного случая $u(z)=z^2$] следует, что *альтернатива Фредгольма справедлива для операторов в пространстве L, вполне непрерывных в смысле слабой сходимости*; см. Данфорд [2] (стр. 208).