не может иметь точек накопления, отличных от $z^* = 0$. Это означает, что любая точка $z_0 \neq 0$ спектра $\sigma(T)$ образует изолированную часть спектра. Отделим такую точку от остального спектра малой окружностью C с центром в z_0, лежащей целиком в резольвентном множестве.

Пусть $v(z)$ — функция, равная $\frac{1}{u(z)}$ внутри C и тождественно обращающаяся в нуль вне C. Очевидно, $v(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{F}(T)$. Так как произведение $u(z)v(z)$ равно 1 внутри C и равно 0 вне C, то, в силу мультипликативного свойства соответствия,

$$u(T)\,v(T) = P_{z_0},$$

где оператор P_{z_0} проектирует $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{M}_{z_0}$, соответствующее z_0 — изолированной части спектра (см. п. 148). Будучи произведением вполне непрерывного оператора $u(T)$ и непрерывного оператора $v(T)$, оператор P_{z_0} сам вполне непрерывен, а отсюда следует, что подпространство $\mathfrak{M}_{z_0}$ — *конечномерное*. Это в свою очередь обусловливает (см. пп. 73 и 89) *применимость к оператору T альтернативы Фредгольма.*

В частности, *альтернатива Фредгольма справедлива для T, если одна из степеней T^k ($k = 2, 3, \ldots$) представляет собой вполне непрерывный оператор*[1].

Заметим еще, что достаточно предполагать функцию $u(z)$ голоморфной в некоторой связной области, содержащей спектр оператора T, и не равной нулю при $z \neq 0$.

§ 2. ТЕОРИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ПО НЕЙМАНУ

153. Предварительные замечания. Следующее предложение является простым следствием результатов, полученных в предыдущих пунктах:

Теорема. *Пусть $u(z)$ — функция комплексного переменного z, голоморфная в некоторой области, охватывающей круг $C_r: |z| \leqslant r$. Пусть в этом круге*

$$|u(z)| \leqslant R.$$

[1]) В качестве применения полученного результата здесь уместно упомянуть об одной теореме Филипса [1], которую он получил с помощью результатов Данфорда и Петтиса [1], относящихся к линейным функционалам в пространстве L суммируемых функций. Согласно этой теореме, *если линейный оператор T в пространстве L вполне непрерывен в смысле слабой сходимости, т. е. если он отображает ограниченные множества в множества слабо компактные, то его квадрат T^2 вполне непрерывен в обычном смысле, т. е. в смысле сильной сходимости.* Из этой теоремы и из только что полученного нами результата [для частного случая $u(z) = z^2$] следует, что *альтернатива Фредгольма справедлива для операторов в пространстве L, вполне непрерывных в смысле слабой сходимости*; см. Данфорд [2] (стр. 208).

Тогда, если линейный оператор T таков, что

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} \leqslant r, \tag{29}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \|[u(T)]^n\|^{1/n} \leqslant R. \tag{30}$$

Предположение (29) означает, что $r_T \leqslant r$, т. е. спектр оператора T заключен в круге C_r. Тем самым обеспечено существование оператора $u(T)$. Согласно теореме об отображении спектров (п. 151) $\sigma(u(T)) = u(\sigma(T))$, откуда вытекает, что

$$\sigma(u(T)) \subseteq u(C_r) \subseteq C_R$$

и, следовательно,

$$r_{u(T)} \leqslant R,$$

т. е. мы получили неравенство (30).

В связи с этой теоремой возникает такой вопрос: *если вместо (29) выполняется неравенство*

$$\|T\| \leqslant r, \tag{31}$$

то следует ли отсюда, что

$$\|u(T)\| \leqslant R? \tag{32}$$

Заметим, что (31) влечет за собой (29), а следовательно, и (30), но из (30) неравенство (32) не вытекает.

Ответ на этот вопрос отрицательный, по крайней мере для произвольных банаховых пространств.

Вот простой пример. Рассмотрим двумерное пространство векторов $x = \{x_1, x_2\}$ с комплексными компонентами; норма в нем пусть определена равенством

$$\|x\| = |x_1| + |x_2|,$$

а сложение векторов и умножение их на комплексные числа — обычные. Линейный оператор

$$T\{x_1, x_2\} = \{x_2, x_1\}$$

в этом пространстве имеет норму 1. Рассмотрим функцию

$$u(z) = \frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha} z},$$

где α — фиксированное комплексное число, $|\alpha| < 1$. Если $|z| \leqslant 1$, то, очевидно, и $|u(z)| \leqslant 1$, однако норма оператора

$$u(T) = (T+\alpha I)(I+\bar{\alpha} T)^{-1},$$

вообще говоря, больше 1.

В самом деле, взяв $\alpha = ti$, $x_1 = ri$, $x_2 = 1$, где $0 < t < r < 1$, получим

$$\|(T+\alpha I)x\| - \|(I+\bar{\alpha}T)x\| = |x_2+\alpha x_1| + |x_1+\alpha x_2| - |x_1+\bar{\alpha}x_2| -$$
$$- |x_2+\bar{\alpha}x_1| = (1-tr)+(r+t)-(r-t)-(1+tr) = 2t(1-r) > 0,$$

откуда следует, что

$$\|(T+\alpha I)x\| > \|(I+\bar{\alpha}T)x\|.$$

Положив $y=(I+\bar{\alpha}T)x$, будем иметь

$$\|u(T)y\| > \|y\|,$$

т. е.

$$\|u(T)\| > 1.$$

Значительно интереснее то, что в случае гильбертова пространства на поставленный вопрос следует ответить положительно. В силу однородности, мы можем положить $r=R=1$. Соответствующая теорема формулируется следующим образом:

Теорема А. *Пусть $u(z)$ — функция комплексного переменного z, голоморфная в области, охватывающей круг C_1*

$$|z| \leqslant 1;$$

пусть, кроме того,

$$|u(z)| \leqslant 1$$

на C_1. Тогда

$$\|u(T)\| \leqslant 1, \tag{33}$$

каков бы ни был ограниченный линейный оператор T с нормой

$$\|T\| \leqslant 1$$

в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

Эта теорема принадлежит И. Нейману [10]. В своем первоначальном доказательстве[1]) И. Нейман рассматривал дробно-линейные функции вида

$$u(z)=\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z} \qquad (|\alpha|<1),$$

для которых теорема доказывается непосредственным подсчетом, а случай произвольной голоморфной функции $u(z)$ сводил к этому частному путем довольно сложных вычислений, опираясь при этом на одну теорему Шура. Другое доказательство предложил вслед за тем Хайнц [2]; его доказательство основано на классической формуле, выражающей действительную часть функции, голоморфной в круге, через действительные части ее значений на окружности. Этот способ приводит к следующей теореме, частным случаем которой является теорема А:

Теорема Б. *Пусть $v(z)$ — функция комплексного переменного z, голоморфная в области, охватывающей круг C_1; пусть в этой области функция $v(z)$ обладает тем свойством, что*

$$\operatorname{Re} v(z) \geqslant 0.$$

Тогда, каков бы ни был ограниченный линейный оператор T с нормой

$$\|T\| \leqslant 1$$

[1]) Оно было воспроизведено в первом издании этой книги.

в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, *для него*

$$\operatorname{Re}(v(T)f,\ f)\geqslant 0$$

при любом выборе элемента f *в пространстве* $\mathfrak{H}$.

Докажем сначала теорему Б[1]). Пусть

$$v(z)=\sum_0^\infty c_k z^k \quad (c_k=a_k+ib_k);$$

этот ряд сходится равномерно в некотором круге $|z|\leqslant R$, где $R>1$, следовательно, ряд

$$v(T)=\sum_0^\infty c_k T^k$$

сходится по норме. Положив для фиксированного f

$$\rho_k=\operatorname{Re}(T^k f,\ f),\quad \sigma_k=\operatorname{Im}(T^k f,\ f),$$

мы получим с помощью формулы Парсеваля для рядов Фурье, что

$$\operatorname{Re}(v(T)f,\ f)=\sum_0^\infty (c_k\rho_k-b_k\sigma_k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V_R(x)K_R(x)\,dx, \tag{34}$$

где

$$V_R(x)=\sum_0^\infty R^k(a_k\cos kx-b_k\sin kx)=\operatorname{Re}v(Re^{ix})\geqslant 0 \tag{35}$$

и

$$K_R(x)=\frac{1}{2}\rho_0+\sum_0^\infty R^{-k}(\rho_k\cos kx+\sigma_k\sin kx)=$$
$$=\operatorname{Re}\left[\frac{1}{2}(f,\ f)+\sum_1^\infty R^{-k}(T^k f,\ f)\,e^{ikx}\right].$$

Так как

$$\frac{1}{2}I+\sum_1^\infty R^{-k}e^{ikx}T^k=\left(I-\frac{e^{ix}}{R}T\right)^{-1}-\frac{1}{2}I=$$
$$=\frac{1}{2}\left(I+\frac{e^{ix}}{R}T\right)\left(I-\frac{e^{ix}}{R}T\right)^{-1},$$

то

$$2K_R(x)=\operatorname{Re}\left[\left(I+\frac{e^{ix}}{R}T\right)g_x,\ \left(I-\frac{e^{ix}}{R}T\right)g_x\right]=$$
$$=(g_x,\ g_x)-\frac{1}{R^2}(Tg_x,\ Tg_x),$$

где

$$g_x=\left(I-\frac{e^{ix}}{R}T\right)^{-1}f.$$

[1]) Приведенное здесь доказательство отличается от доказательства Хайнца тем, что вместо упомянутой классической теоремы из теории функций в нем использована формула Парсеваля.

Так как $\|T\| \leqslant 1$ и $R > 1$, то $K_R(x) \geqslant 0$. Приняв во внимание (34) и (35), получим $\mathrm{Re}(v(T)f, f) \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Перейдем к доказательству теоремы А. Выберем число $R > 1$ так, чтобы круг $|z| \leqslant R$ был еще заключен в той области, в которой $u(z)$ голоморфна, и обозначим M_R наибольшее значение $|u(z)|$ в этом круге.

Если $|u(z_0)| = M_R$, где $|z_0| < R$, то $u(z)$ постоянна, $u(z) = c$, и, следовательно, $u(T) = cI$; так как $|u(z)| \leqslant 1$ при $|z| \leqslant 1$, то $|c| \leqslant 1$ и $\|u(T)\| \leqslant 1$.

Если же $|u(z)| < M_R$ при $|z| < R$, то функция

$$v_R(z) = \frac{M_R + u(z)}{M_R - u(z)}$$

голоморфна в круге $|z| < R$ и $\mathrm{Re}\, v_R(z) \geqslant 0$; согласно теореме Б,

$$\mathrm{Re}\,(v_R(T)f, f) \geqslant 0$$

при любом f; отсюда следует, что

$$\mathrm{Re}\,(v_R(T)(M_R g - u(T)g), M_R g - u(T)g) \geqslant 0,$$

каков бы ни был элемент g. Так как, очевидно,

$$v_R(T)(M_R I - u(T)) = M_R I + u(T),$$

то

$$\mathrm{Re}\,(M_R g + u(T)g, M_R g - u(T)g) = M_R^2 \|g\|^2 - \|u(T)g\|^2 \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$\|u(T)\| \leqslant M_R.$$

Заставив R стремиться к 1, получим

$$\|u(T)\| \leqslant 1,$$

что и требовалось.

Отметим, что теорема А И. Неймана является характеристическим свойством гильбертова пространства. Именно, Фояш [1] доказал, что если эта теорема справедлива для каждого оператора T с нормой $\|T\| \leqslant 1$ в некотором банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B}$—гильбертово пространство.

154. Спектральные множества. В этом и в следующем пунктах мы рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и линейные операторы в нем, относительно которых мы предположим, что они ограничены и определены всюду. Нас будут интересовать „метрические" свойства соответствия между функциями $u(z)$ и операторами $u(T)$; при этом мы ограничимся *рациональными* функциями, регулярными во всех точках спектра оператора T. Что касается „алгебраических" свойств соответствия между $u(z)$ и $u(T)$, то, как мы видели в п. 151, их можно установить прямо, не прибегая к формуле (27).

Известно, что если оператор T *симметричен* и в точках его спектра функция $u(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|u(z)| \leqslant M, \tag{36}$$

то

$$\|u(T)\| \leqslant M. \tag{37}$$

Это следует непосредственно из спектрального разложения оператора T [гл. VIII, формула (10)]. То же верно для всех *нормальных* и, в частности, для всех *унитарных* операторов (см. п. 111 и конец п. 132). Напомним, что спектр нормального оператора представляет собой замкнутое множество в комплексной плоскости; в частном случае симметричного или унитарного оператора спектр расположен соответственно на действительной оси или на единичной окружности.

Если оператор T *не является нормальным*, то его спектр $\sigma(T)$, вообще говоря, не достаточно обширен для того, чтобы неравенство (36), выполняющееся на $\sigma(T)$, влекло за собой неравенство (37). Действительно, существуют линейные операторы $T \neq O$, спектр которых состоит из единственной точки $z=0$[1]; в этом случае функция $u(z) \equiv z$ равна иулю на $\sigma(T)$, тогда как $\|T\| \neq 0$.

Возникает задача охарактеризовать множества Z в комплексной плоскости, обладающие тем свойством, что неравенство (37) выполняется, коль скоро функция $u(z)$ на множестве Z удовлетворяет неравенству (36). Очевидно, что можно ограничиться рассмотрением замкнутых множеств и, в снлу однородности, положить $M=1$. Введем следующее определение[2]:

Множество Z точек комплексной плоскости (пополненной бесконечно удаленной точкой) назовем спектральным множеством оператора T, если Z замкнуто и для любой рациональной функции $u(z)$, удовлетворяющей на Z неравенству

$$|u(z)| \leqslant 1,$$

оператор $u(T)$ существует и удовлетворяет условию

$$\|u(T)\| \leqslant 1.$$

Требование существования оператора $u(T)$ означает, что

$$Z \supseteq \sigma(T);$$

кроме того, очевидно, что любое замкнутое множество, содержащее какое-нибудь спектральное множество, само является спектральным множеством.

Имеет место следующий аналог теоремы об отображении спектров:

[1]) Простейшим примером может служить оператор $T\{x_1, x_2\} = \{x_2, 0\}$ в двумерном пространстве.

[2]) Это определение, равно как н результаты, изложенные в пп. 154 и 155, принадлежнт И. Нейману [10].

Лемма 1. *Пусть $v(z)$ — рациональная функция, для которой существует оператор $v(T)$. Если Z — спектральное множество оператора T, то его образ $Z' = v(Z)$ представляет собой спектральное множество оператора $v(T)$.*

В самом деле, пусть $u(z')$ — рациональная функция, такая, что $|u(z')| \leqslant 1$ на Z'. Так как [1])

$$Z' = v(Z) \supseteq v(\sigma(T)) = \sigma(v(T)),$$

то функция $u(z')$ регулярна во всех точках спектра оператора $v(T)$, поэтому $u(v(T))$ существует. С другой стороны, $u(v(T))$ равен оператору $\psi(T)$, соответствующему функции $\psi(z) = u(v(z))$, и так как $|\psi(z)| \leqslant 1$ на Z, то $\|u(v(T))\| \leqslant 1$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим, в частности, дробно-линейную функцию

$$z' = v(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$; обратная функция имеет такой же вид:

$$z = v^{-1}(z') = \frac{-\delta z' + \beta}{\gamma z' - \alpha}.$$

Пусть Z — замкнутое множество, отображаемое функцией $z' = v(z)$ в ограниченное множество $Z' = v(Z)$. Если Z — спектральное множество оператора T, то Z' является спектральным множеством оператора $T' = v(T)$; этот последний существует, так как функция $v(z)$ ограничена на Z, а следовательно, и на $\sigma(T)$. Обратно, пусть оператор $T' = v(T)$ существует и Z' — его спектральное множество; докажем, что тогда Z является спектральным множеством оператора T. Так как $Z = v^{-1}(Z')$, то достаточно показать, что оператор $v^{-1}(T')$ существует и равен T. В силу того, что $v^{-1}(v(z)) \equiv z$, второе предложение есть следствие первого, так как функция $v^{-1}(z)$ ограничена на спектре оператора T', т. е. множество $v^{-1}(\sigma(T'))$ ограничено. Но $\sigma(T') = v(\sigma(T))$ [1]), следовательно, $v^{-1}(\sigma(T')) = \sigma(T)$ и множество $\sigma(T)$ ограничено (оно заключено в замкнутом круге $|z| \leqslant \|T\|$).

Мы доказали, таким образом, следующее предложение:

Лемма 2. *Пусть $z' = v(z)$ — дробно-линейная функция, отображающая множество Z в множество Z'. Для того чтобы Z было спектральным множеством оператора T, необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор $T' = v(T)$, а Z' было спектральным множеством оператора T'.*

Согласно теореме, доказанной в предыдущем пункте, единичный круг C_1 является спектральным множеством любого линейного оператора T с нормой $\|T\| \leqslant 1$. В том, что условие $\|T\| \leqslant 1$

[1]) Здесь мы пользуемся теоремой об отображении спектров.

необходимо, можно убедиться, рассмотрев функцию $u(z) \equiv z$. Итак, доказана следующая

Теорема. *Единичный круг* $|z| \leqslant 1$ *является спектральным множеством оператора* T *тогда и только тогда, когда* $\|T\| \leqslant 1$.

Применив лемму 2 к замкнутым областям Z, характеризуемым соответственно неравенствами

$$|z-\alpha| \leqslant r, \quad |z-\alpha| \geqslant r, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0,$$

где α — комплексное число, а r — действительное, и к дробно-линейным функциям

$$\frac{z-\alpha}{r}, \quad \frac{r}{z-\alpha}, \quad \frac{z-1}{z+1},$$

отображающим эти области на единичный круг, мы получим следующий, более общий результат:

Теорема. *Любая из замкнутых областей*

$$|z-\alpha| \leqslant r, \quad |z-\alpha| \geqslant r, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0$$

является спектральным множеством оператора T *тогда и только тогда, когда соответственно*

$$\|T-\alpha I\| \leqslant r, \quad \|(T-\alpha I)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{r}, \quad \|(T-I)(T+I)^{-1}\| \leqslant 1$$

(существование указанных обратных операторов предполагается заранее).

Каков бы ни был линейный оператор T, круг

$$|z| \leqslant \|T\|$$

является его спектральным множеством. Если α — точка, принадлежащая резольвентному множеству оператора T, то область

$$|z-\alpha| \geqslant \|(T-\alpha I)^{-1}\|^{-1}$$

также является спектральным множеством оператора T. Отсюда следует, что *пересечение всех спектральных множеств оператора* T *совпадает со спектром оператора* T (это отнюдь не значит, что сам спектр является спектральным множеством).

Покажем теперь, что условие, относящееся к случаю полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, а именно то, что для $T+I$ существует обратный оператор (определенный всюду и ограниченный) и

$$\|(T-I)(T+I)^{-1} g\| \leqslant \|g\| \tag{38}$$

для всех элементов g пространства $\mathfrak{H}$, эквивалентно такому условию: для всех f из $\mathfrak{H}$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(Tf, f) \geqslant 0. \tag{39}$$

Действительно, из тождества

$$\|(T \pm I) f\|^2 = \|Tf\|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(Tf, f) + \|f\|^2 \tag{40}$$

следует, что

$$\|(T+I)f\|^2-\|(T-I)f\|^2=4\cdot\mathrm{Re}\,(Tf,\ f). \tag{41}$$

Положив в формуле (38) $g=(T+I)f$, получим, что $\|(T-I)f\|\leqslant\leqslant\|(T+I)f\|$, откуда, в силу (41), вытекает неравенство $\mathrm{Re}\,(Tf,\ f)\geqslant 0$. Таким образом, из (38) следует (39).

Обратно, из (39), в силу (40), вытекает, что

$$\|(T+I)f\|\geqslant\|f\| \tag{42}$$

и

$$\|(T-I)f\|\leqslant\|(T+I)f\|, \tag{43}$$

а так как

$$\mathrm{Re}\,(T^*f,\ f)=\mathrm{Re}\,(Tf,\ f)\geqslant 0,$$

то, аналогично,

$$\|(T^*+I)f\|\geqslant\|f\|. \tag{42*}$$

Из (42) и (42*) следует, что

$$((T^*+I)(T+I)f,\ f)\geqslant(f,\ f),\qquad((T+I)(T^*+I)f,\ f)\geqslant(f,\ f).$$

Таким образом, операторы $(T^*+I)(T+I)$ и $(T+I)(T^*+I)$ имеют нижние грани $\geqslant 1$; следовательно, оператор $(T+I)^{-1}$ существует, определен во всем пространстве и ограничен (см. конец п. 104). Наконец, из (43) вытекает, что для всех элементов g из $\mathfrak{H}$

$$\|(T-I)(T+I)^{-1}g\|\leqslant\|g\|,$$

т. е. из (39) следует (38), что и требовалось доказать.

Итак, эквивалентность условий (38) и (39) установлена. Тем самым доказана

Теорема. *Для того чтобы полуплоскость* $\mathrm{Re}\,z\geqslant 0$ *была для оператора T спектральным множеством, необходимо и достаточно, чтобы неравенство*

$$\mathrm{Re}\,(Tf,\ f)\geqslant 0$$

выполнялось для всех элементов f из $\mathfrak{H}$.

Отсюда непосредственно вытекает аналогичное условие для полуплоскости

$$\mathrm{Re}\,(e^{i\theta}z)\geqslant 0,$$

а именно,

$$\mathrm{Re}\,[e^{i\theta}(Tf,\ f)]\geqslant 0.$$

155. Характеристика симметричных, унитарных и нормальных операторов в терминах спектральных множеств. Известно, что спектр нормального оператора T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ одновременно является спектральным множеством этого оператора. Таким образом, единичная окружность $|z|=1$ служит спектральным множеством любого унитарного оператора, а действительная ось — спектральным множеством любого (ограниченного) симметричного оператора. Мы покажем, что эти свойства характеризуют унитарные и симметричные операторы.

Пусть T — линейный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$, для которого единичная окружность является спектральным множеством. Замкнутые области

$$|z| \leqslant 1 \text{ и } |z| \geqslant 1$$

тем более являются спектральными множествами. Согласно второй теореме предыдущего пункта, существует обратный оператор, всюду определенный и ограниченный, причем

$$\|T\| \leqslant 1 \text{ и } \|T^{-1}\| \leqslant 1.$$

Тогда, каков бы ни был элемент f из $\mathfrak{H}$,

$$\|Tf\| \leqslant \|f\| = \|T^{-1}Tf\| \leqslant \|Tf\|,$$

откуда следует, что

$$\|Tf\| = \|f\|.$$

Таким образом, оператор T изометричен; кроме того, как его область определения, так и совокупность значений заполняют все пространство, поэтому T — *унитарный* оператор.

Теперь рассмотрим линейный оператор T в пространстве $\mathfrak{H}$, к числу спектральных множеств которого относится действительная ось. При этом полуплоскости

$$\operatorname{Re}(-iz) = \operatorname{Im} z \geqslant 0 \text{ и } \operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z \geqslant 0$$

также будут спектральными множествами, поэтому, в силу третьей теоремы предыдущего пункта,

$$\operatorname{Re}[\mp i(Tf, f)] \geqslant 0,$$

т. е. значения (Tf, f) действительны при любых f. Отсюда следует, что T — *симметричный* оператор.

Резюмируем полученные результаты:

Теорема. *Среди ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве унитарные и симметричные операторы характеризуются тем, что к числу их спектральных множеств принадлежат соответственно единичная окружность и действительная ось.*

Для общих нормальных операторов полной характеристикой такого рода мы еще не располагаем. Однако можно утверждать, что достаточно „разреженные" замкнутые множества в комплексной плоскости могут быть спектральными множествами лишь нормальных операторов. Речь идет о множествах Z, обладающих тем свойством, что любая функция, непрерывная в замкнутой комплексной плоскости, может быть равномерно приближена на Z рациональными функциями. Этим свойством обладает, в частности, любое конечное множество.

Итак, справедлива следующая

Теорема. *Конечное множество*

$$Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$$

комплексных чисел может быть спектральным множеством лишь нормального оператора.

Приведем доказательство этой теоремы. Пусть $l_k(z)$ — многочлен степени $n-1$, принимающий значение 1 в точке z_k и обращающийся в нуль в остальных точках z_i $(i \neq k)$. Так как

$$z = \sum_{k=1}^{n} z_k l_k(z),$$

то

$$T = \sum_{k=1}^{n} z_k l_k(T). \tag{44}$$

Спектральное множество $l_k(Z)$ оператора $l_k(T)$ состоит из точек 0 и 1. Согласно только что доказанной теореме, операторы $l_k(T)$ *симметричны*, а так как $l_k(T)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ перестановочны, то, в силу (44), T представляет собой *нормальный* оператор, что и требовалось доказать.

В конечномерном пространстве спектр линейного оператора всегда является конечным множеством. Поэтому из последней теоремы вытекает такое следствие:

Линейный оператор T в конечномерном пространстве $\mathfrak{H}$ нормален тогда и только тогда, когда спектр оператора T одновременно является его спектральным множеством.