Добавление 1

ПРОДОЛЖЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ С ВЫХОДОМ ИЗ ЭТОГО ПРОСТРАНСТВА

Б. Сёкефальви-Надь

*Фредерику Риссу
в день его 75-летия
22 января 1955 г.*

§ 1. Введение

Теорема о спектральном разложении нормальных и, в частности, самосопряженных и унитарных операторов в гильбертовом пространстве является естественным обобщением теоремы линейной алгебры о разложении оператора по главным осям, и поэтому структура этих операторов в основном известна. Однако до сих пор не удалось в достаточной степени широко перенести на случай гильбертова пространства жорданову каноническую форму и теорию элементарных делителей для матриц конечного порядка, поэтому о структуре линейных операторов общего вида (не являющихся нормальными) в гильбертовом пространстве известно сравнительно мало. Вот почему очень важно найти такие соотношения между нормальными операторами и операторами, не являющимися нормальными, которые позволили бы свести определенные задачи о линейных операторах общего вида к более удобному частному случаю нормальных операторов.

Наиболее простыми соотношениями такого типа являются:

$$T = A + iB, \quad T = VR,$$

где линейный ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ представляется соответственно в виде суммы двух самосопряженных операторов

$$A = \operatorname{Re} T = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad B = \operatorname{Im} T = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

или в виде $T = VR$ произведения положительного самосопряженного оператора

$$R = (T^*T)^{1/2}$$

и частично изометричного оператора V (который в определенных случаях, в частности если T — нормальный оператор или T переводит гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ взаимно однозначно на себя, может быть выбран унитарным) (см. п. 110). Применимость этих формул ограничена тем, что ни A и B, ни V и R не являются, вообще говоря, перестановочными и что между соответствующими представлениями итерированных операторов T, T^2, ... не существует простых соотношений.

Ниже речь будет идти о других соотношениях, а именно соотношениях, связанных с продолжениями данного оператора. При этом в отличие от обычных будут допускаться продолжения *с выходом из заданного пространства.*

Итак, под *продолжением* линейного оператора T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ мы будем понимать линейный оператор $\boldsymbol{T}$ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, содержащем $\mathfrak{H}$ как подпространство, такой, что его область определения $\mathfrak{D}_{\boldsymbol{T}}$ содержит область определения $\mathfrak{D}_T$ оператора T и $\boldsymbol{T}f = Tf$ для $f \in \mathfrak{D}_T$. Мы сохраним обозначение $\boldsymbol{T} \supseteq T$, используемое для обычных продолжений (в которых $\boldsymbol{H} = \mathfrak{H}$).

Оператор ортогонального проектирования в „расширенном" простраистве $\boldsymbol{H}$ на его подпространство $\mathfrak{H}$ будем обозначать $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{H}}$ или просто $\boldsymbol{P}$.

Среди продолжений линейного ограниченного оператора T в пространстве $\mathfrak{H}$ (с $\mathfrak{D}_T = \mathfrak{H}$) рассмотрим, в частности, продолжения вида $\boldsymbol{PS}$, где $\boldsymbol{S}$ — линейный ограниченный оператор в расширенном пространстве $\boldsymbol{H}$. В этом случае, т. е. если имеет место соотношение

$$T \subseteq \boldsymbol{PS},$$

будем говорить, что T есть *проекция* оператора $\boldsymbol{S}$ на $\mathfrak{H}$[1]):

$$T = \mathrm{pr}_{\mathfrak{H}}\, \boldsymbol{S} \text{ или просто } T = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{S}. \tag{1}$$

Очевидно, что из соотношений $T_i = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{S}_i$ $(i = 1,\ 2)$ следует

$$a_1 T_1 + a_2 T_2 = \mathrm{pr}\, (a_1 \boldsymbol{S}_1 + a_2 \boldsymbol{S}_2) \tag{2}$$

(разумеется, $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ являются операторами в одном и том же расширенном гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$).

Из соотношения (1) следует также, что

$$T^* = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{S}^* \text{ }^{2)}. \tag{3}$$

Наконец, из равномерной, сильной или слабой сходимости последовательности $\{\boldsymbol{S}_n\}$ вытекает сходимость того же типа последовательности $\{T_n\}$, где $T_n = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{S}_n$[3]).

Пусть $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{H}'$ — два расширения одного и того же пространства $\mathfrak{H}$, а $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}'$ — линейные ограниченные операторы соответственно в $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{H}'$. Будем говорить, что „структуры" $\{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{S}, \mathfrak{H}\}$ и $\{\boldsymbol{H}', \boldsymbol{S}', \mathfrak{H}\}$ *изоморфны*, если существует изометричное отображение $f \longrightarrow f'$

---

[1]) Халмош [2] называет T „compression" оператора $\boldsymbol{S}$ в $\mathfrak{H}$, а $\boldsymbol{S}$ — „dilation" оператора T в $\boldsymbol{H}$.

[2]) Действительно, для $f,\ g \in \mathfrak{H}$ имеем

$$(f,\ T^*g) = (Tf,\ g) = (\boldsymbol{PS}\boldsymbol{P}f,\ g) = (f,\ \boldsymbol{PS}^*\boldsymbol{P}g) = (f,\ \boldsymbol{PS}^*g).$$

[3]) Действительно,

$$\|T_n - T_m\| \leqslant \|\boldsymbol{S}_n - \boldsymbol{S}_m\|,\quad \|(T_n - T_m)f\| \leqslant \|(\boldsymbol{S}_n - \boldsymbol{S}_m)f\| \text{ для } f \in \mathfrak{H}$$

и

$$((T_n - T_m)f,\ g) = ((\boldsymbol{S}_n - \boldsymbol{S}_m)f,\ g) \text{ для } f,\ g \in \mathfrak{H}.$$

пространства H на H', при котором элементы общего подпространства $\mathfrak{H}$ остаются неизменными, а из $f \to f'$ следует $Sf \to S'f'$.

Если $\{S_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ и $\{S'_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ — два семейства линейных операторов соответственно в H и H', то изоморфизм структур $\{H, S_\omega, \mathfrak{H}\}_{\omega \in \Omega}$ и $\{H', S'_\omega, \mathfrak{H}\}_{\omega \in \Omega}$ определяется таким же образом, причем дополнительно требуется, чтобы из $f \to f'$ следовало $S_\omega f \to S'_\omega f'$ для всех $\omega \in \Omega$.

Продолжения операторов с выходом из $\mathfrak{H}$, порождающие изоморфные „структуры", естественно рассматривать как несущественно различные.

Говоря в дальнейшем о гильбертовых пространствах, мы будем иметь в виду одновременно как действительные, так и комплексные пространства. Если понадобится делать различие между ними, это будет особо оговорено. Разумеется, расширенное пространство H всегда того же типа (действительное или комплексное), что и пространство $\mathfrak{H}$, которому оно соответствует.

§ 2. Обобщенные спектральные семейства. Теорема Наймарка

Продолжения с выходом из заданного пространства были впервые рассмотрены М. А. Наймарком [3, 4]; он изучал, в частности, самосопряженные продолжения симметричных операторов. Если S — симметричный оператор в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (с областью определения $\mathfrak{D}_S$, плотной в $\mathfrak{H}$), то известно, что он может быть продолжен до самосопряженного без выхода из пространства $\mathfrak{H}$ только в том случае, когда индексы дефекта $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ оператора S равны между собой. Напротив, *если допускается возможность выхода из пространства $\mathfrak{H}$, то самосопряженные продолжения оператора S всегда существуют.*

Доказывается это очень просто. Выберем в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}'$ симметричный оператор S', индексы дефекта которого равны $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$, т. е. индексам дефекта оператора S, взятым в обратном порядке. Можно положить, например, $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$ и $S' = -S$. Рассмотрим теперь пространство $H = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$, т. е. прямую сумму пространств $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$, элементами которого являются пары $\{f, f'\}$ $(f \in \mathfrak{H}, f' \in \mathfrak{H}')$ и в котором векторные операции и метрика определяются обычным образом:

$$c\{f, f'\} = \{cf, cf'\}; \ \{f_1, f_1'\} + \{f_2, f_2'\} = \{f_1 + f_2, f_1' + f_2'\};$$
$$(\{f_1, f_1'\}, \{f_2, f_2'\}) = (f_1, f_2) + (f_1', f_2').$$

Отождествляя элемент f пространства $\mathfrak{H}$ с элементом $\{f, 0\}$ пространства H, мы погружаем пространство $\mathfrak{H}$ в H как подпространство последнего. Тогда

$$S\{f, f'\} = \{Sf, S'f'\} \quad (f \in \mathfrak{D}_S, \ f' \in \mathfrak{D}_{S'})$$

есть, как легко видеть, симметричный оператор с индексами де-