пространства H на H', при котором элементы общего подпространства $\mathfrak{H}$ остаются неизменными, а из $f \to f'$ следует $Sf \to S'f'$.

Если $\{S_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ и $\{S'_\omega\}_{\omega\in\Omega}$—два семейства линейных операторов соответственно в H и H', то изоморфизм структур $\{H, S_\omega, \mathfrak{H}\}_{\omega\in\Omega}$ и $\{H', S'_\omega, \mathfrak{H}\}_{\omega\in\Omega}$ определяется таким же образом, причем дополнительно требуется, чтобы из $f \to f'$ следовало $S_\omega f \to S'_\omega f'$ для всех $\omega \in \Omega$.

Продолжения операторов с выходом из $\mathfrak{H}$, порождающие изоморфные „структуры", естественно рассматривать как несущественно различные.

Говоря в дальнейшем о гильбертовых пространствах, мы будем иметь в виду одновременно как действительные, так и комплексные пространства. Если понадобится делать различие между ними, это будет особо оговорено. Разумеется, расширенное пространство H всегда того же типа (действительное или комплексное), что и пространство $\mathfrak{H}$, которому оно соответствует.

§ 2. Обобщенные спектральные семейства. Теорема Наймарка

Продолжения с выходом из заданного пространства были впервые рассмотрены М. А. Наймарком [3, 4]; он изучал, в частности, самосопряженные продолжения симметричных операторов. Если S—симметричный оператор в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (с областью определения $\mathfrak{D}_S$, плотной в $\mathfrak{H}$), то известно, что он может быть продолжен до самосопряженного без выхода из пространства $\mathfrak{H}$ только в том случае, когда индексы дефекта $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ оператора S равны между собой. Напротив, *если допускается возможность выхода из пространства $\mathfrak{H}$, то самосопряженные продолжения оператора S всегда существуют.*

Доказывается это очень просто. Выберем в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}'$ симметричный оператор S', индексы дефекта которого равны $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{m}$, т. е. индексам дефекта оператора S, взятым в обратном порядке. Можно положить, например, $\mathfrak{H}'=\mathfrak{H}$ и $S'=-S$. Рассмотрим теперь пространство $H=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}'$, т. е. прямую сумму пространств $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$, элементами которого являются пары $\{f, f'\}$ $(f\in\mathfrak{H},\ f'\in\mathfrak{H}')$ и в котором векторные операции и метрика определяются обычным образом:

$$c\{f, f'\}=\{cf, cf'\};\ \{f_1, f_1'\}+\{f_2, f_2'\}=\{f_1+f_2, f_1'+f_2'\};$$
$$(\{f_1, f_1'\}, \{f_2, f_2'\})=(f_1, f_2)+(f_1', f_2').$$

Отождествляя элемент f пространства $\mathfrak{H}$ с элементом $\{f, 0\}$ пространства H, мы погружаем пространство $\mathfrak{H}$ в H как подпространство последнего. Тогда

$$S\{f, f'\}=\{Sf, S'f'\}\quad (f\in\mathfrak{D}_S,\ f'\in\mathfrak{D}_{S'})$$

есть, как легко видеть, симметричный оператор с индексами дефекта $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}+\mathfrak{m}$. Следовательно, оператор $\boldsymbol{S}$ может быть продолжен без выхода из пространства $\boldsymbol{H}$ до самосопряженного оператора $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{H}$. Поскольку

$$S \subseteq \boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{A}$$

(где первое продолжение выводит из $\mathfrak{H}$ в $\boldsymbol{H}$), мы получили самосопряженное расширение A оператора S.

Пусть

$$\boldsymbol{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d\boldsymbol{E}_\lambda$$

есть спектральное представление оператора $\boldsymbol{A}$. Для $f \in \mathfrak{D}_S$, $g \in \mathfrak{H}$ имеем

$$(Sf, g) = (\boldsymbol{A}f, \boldsymbol{P}g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(\boldsymbol{E}_\lambda f, \boldsymbol{P}g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, d(\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda f, g),$$

$$\|Sf\|^2 = \|\boldsymbol{A}f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \, d(\boldsymbol{E}_\lambda f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \, d(\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_\lambda f, f).$$

Полагая

$$B_\lambda = \mathrm{pr}_{\mathfrak{H}} \boldsymbol{E}_\lambda, \tag{4}$$

мы получим семейство $\{B_\lambda\}_{-\infty<\lambda<\infty}$ самосопряженных ограниченных операторов в пространстве $\mathfrak{H}$, обладающее следующими свойствами:

а) $B_\lambda \geqslant B_\mu$ для $\lambda < \mu$;

б) $B_{\lambda+0} = B_\lambda$;

в) $B_\lambda \to O$ при $\lambda \to -\infty$; $B_\lambda \to I$ при $\lambda \to +\infty$.

Однопараметрическое семейство самосопряженных ограниченных операторов, обладающее этими свойствами, назовем *обобщенным спектральным семейством*. Если это семейство состоит из операторов проектирования [которые в силу свойства а) перестановочны между собой], то мы имеем дело с обычным спектральным семейством.

Согласно доказанному выше, мы можем каждому симметричному оператору S в пространстве $\mathfrak{H}$ поставить в соответствие обобщенное спектральное семейство $\{B_\lambda\}$, такое, что равенства

$$(Sf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d(B_\lambda f, g), \qquad \|Sf\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(B_\lambda f, f) \tag{5}$$

удовлетворяются для всех $f \in \mathfrak{D}_S$, $g \in \mathfrak{H}$ (однако интеграл во второй формуле может сходиться и для некоторых f, не принадлежащих $\mathfrak{D}_S$).

Возникает вопрос: всякое ли обобщенное спектральное семейство $\{B_\lambda\}$, соответствующее оператору S, т. е. удовлетворяющее соотношениям (5), может быть представлено как проекция спектрального семейства самосопряженного продолжения A оператора S? Ответ на него утвердителен, а именно справедлива следующая

Теорема I (Наймарк [4, 5]). *Всякое обобщенное спектральное семейство $\{B_\lambda\}$ может быть представлено в форме* (4) *как проекция обычного спектрального семейства $\{E_\lambda\}$. Можно даже потребовать, чтобы расширенное пространство H было минимальным в том смысле, чтобы в нем были всюду плотны линейные комбинации элементов вида $E_\lambda f$, где $f \in \mathfrak{H}$, $-\infty < \lambda < \infty$; в этом случае структура $\{H, E_\lambda, \mathfrak{H}\}_{-\infty<\lambda<\infty}$ определяется с точностью до изоморфизма.*

Мы получим эту теорему в § 7 как следствие основной теоремы в § 6.

Заметим, что если пространство H минимально, то всякий интервал постоянства семейства B_λ является интервалом постоянства и для E_λ. Действительно, пусть $a \leqslant \lambda < b$ — интервал постоянства для B_λ. Тогда для $f \in \mathfrak{H}$, $a \leqslant \lambda < b$ и для любого вещественного μ имеем

$$\begin{aligned}\|(E_\lambda - E_a) E_\mu f\|^2 &= \|(E_{\min\{\lambda,\mu\}} - E_{\min\{a,\mu\}}) f\|^2 = \\ &= ((E_{\min\{\lambda,\mu\}} - E_{\min\{a,\mu\}}) f, f) = \\ &= (P(E_{\min\{\lambda,\mu\}} - E_{\min\{a,\mu\}}) f, f) = \\ &= ((B_{\min\{\lambda,\mu\}} - B_{\min\{a,\mu\}}) f, f) = 0,\end{aligned}$$

так что

$$(E_\lambda - E_a) g = 0$$

для любого элемента g вида $E_\mu f$ $(f \in \mathfrak{H})$. Поскольку линейные комбинации таких элементов g всюду плотны в H, отсюда следует, что $E_\lambda - E_a = O$, $E_\lambda = E_a$, что и требовалось доказать.

В простейшем случае, когда семейство $\{B_\lambda\}$ порождается самосопряженным оператором A, $O \leqslant A \leqslant I$, следующим образом:

$$B_\lambda = \begin{cases} O & \text{при } \lambda < a, \\ A & \text{при } a \leqslant \lambda < b, \\ I & \text{при } \lambda \geqslant b, \end{cases}$$

из теоремы Наймарка как следствие вытекает

Теорема. *Всякий самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, такой, что $O \leqslant A \leqslant I$, может быть представлен в виде*

$$A = \operatorname{pr} \mathbf{Q},$$

где $\mathbf{Q}$ — некоторый оператор проектирования в расширенном пространстве H. (Короче: оператор A есть проекция оператора проектирования.)

Эта теорема может быть доказана и непосредственно, без обращения к теореме Наймарка (см. Халмош [2]).

Рассмотрим пространство $\boldsymbol{H}=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$. Отождествляя элемент $f\in\mathfrak{H}$ с элементом $\{f, 0\}\in\boldsymbol{H}$, мы можем погрузить $\mathfrak{H}$ в пространство $\boldsymbol{H}$ как подпространство последнего. Если записывать элементы пространства $\boldsymbol{H}$ как одностолбцовые матрицы $\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$, то линейные ограниченные операторы $\boldsymbol{T}$ в $\boldsymbol{H}$ представляются матрицами

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

элементы T_{ik} которых суть линейные ограниченные операторы в пространстве $\mathfrak{H}$. Легко убедиться в том, что сложению и умножению операторов соответствует матричное сложение и умножение соответствующих им матриц. Далее, из соотношения (6) следует, что

$$\boldsymbol{T}^*=\begin{bmatrix} T_{11}^* & T_{21}^* \\ T_{12}^* & T_{22}^* \end{bmatrix}.$$

Наконец, равенство

$$T=\mathrm{pr}_{\mathfrak{H}}\boldsymbol{T}$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$T_{11}=T.$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} A & B \\ B & I-A \end{bmatrix}, \text{ где } B=[A(I-A)]^{1/2}.$$

Очевидно, что $\boldsymbol{Q}$ — самосопряженный оператор и $A=\mathrm{pr}\,\boldsymbol{Q}$. Остается только доказать, что $\boldsymbol{Q}^2=\boldsymbol{Q}$, а это легко сделать, вычисляя квадрат матрицы $\boldsymbol{Q}$.

Другим, менее специальным следствием теоремы Наймарка является

Теорема. *Всякая конечная или бесконечная последовательность $\{A_n\}$ самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, такая, что*

$$A_n\geqslant O, \quad \sum_n A_n=I,$$

может быть представлена в виде

$$A_n=\mathrm{pr}\,\boldsymbol{Q}_n \quad (n=1, 2, \ldots),$$

где $\{\boldsymbol{Q}_n\}$ — последовательность операторов проектирования в расширенном пространстве $\boldsymbol{H}$, такая, что

$$\boldsymbol{Q}_n\boldsymbol{Q}_m=\boldsymbol{O} \quad (m\neq n), \qquad \sum_n \boldsymbol{Q}_n=\boldsymbol{I}.$$

Действительно, достаточно применить теорему Наймарка к обобщенному спектральному семейству $\{B_\lambda\}$, определенному равенством

$$B_\lambda = \sum_{n \leqslant \lambda} A_n.$$

Если $\{\boldsymbol{E}_\lambda\}$ есть обычное спектральное семейство в минимальном расширенном пространстве, такое, что $B_\lambda = \operatorname{pr} \boldsymbol{E}_\lambda$, то $\boldsymbol{E}_\lambda$ как функция от λ возрастает только в точках n и скачки в этих точках суть

$$\boldsymbol{Q}_n = \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{E}_{n-0}.$$

Эти операторы $\boldsymbol{Q}_n$ удовлетворяют требованиям теоремы.

Отсюда в свою очередь вытекает следующая

Теорема. *Всякая конечная или бесконечная последовательность $\{T_n\}$ линейных ограниченных операторов в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ может быть представлена в виде*

$$T_n = \operatorname{pr} \boldsymbol{N}_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

с помощью последовательности $\{\boldsymbol{N}_n\}$ нормальных ограниченных операторов в расширенном пространстве $\boldsymbol{H}$, дважды перестановочных друг с другом[1]. *Если некоторые из операторов T_n являются самосопряженными, то соответствующие $\boldsymbol{N}_n$ могут также быть выбраны самосопряженными.*

Рассмотрим вначале случай, когда все T_n — самосопряженные операторы. Пусть m_n и M_n — соответственно нижняя и верхняя грани оператора T_n; положим

$$A_n = \frac{1}{2^n (M_n - m_n + 1)} (T_n - m_n I) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Тогда, очевидно,

$$A_n \geqslant O, \quad \sum_n A_n \leqslant I.$$

Добавив сюда оператор

$$A = I - \sum_n A_n,$$

мы получим последовательность $A, A_1, A_2, \ldots$ операторов, удовлетворяющую условиям предыдущей теоремы. Она может быть, следовательно, представлена в виде

$$A_n = \operatorname{pr} \boldsymbol{Q}_n \ (n = 1, 2, \ldots),$$

[1]) Мы будем называть два линейных ограниченных оператора T_1, T_2 *дважды перестановочными*, если T_1 перестановочен с T_2 и с T_2^* (и, следовательно, T_2 перестановочен с T_1 и с T_1^*). Для двух *нормальных* операторов простая перестановочность влечет за собой двойную; достаточно даже предположить нормальность только одного из двух операторов (Фуледе [1], см. также Халмош [3]).

где Q_n — взаимно ортогональные (и, следовательно, перестановочные) операторы проектирования. Отсюда следует, что

$$T_n = \operatorname{pr} S_n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$S_n = m_n I + 2^n (M_n - m_n + 1)\, Q_n,$$

и операторы S_n — самосопряженные и перестановочные.

Общий случай можно свести к случаю самосопряженных операторов, заменяя в заданной последовательности каждый оператор T_n двумя самосопряженными операторами $\operatorname{Re} T_n$ и $\operatorname{Im} T_n$. Действительно, имеет место представление

$$\operatorname{Re} T_n = \operatorname{pr} S_{2n},\quad \operatorname{Im} T_n = \operatorname{pr} S_{2n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

с помощью самосопряженных ограниченных перестановочных друг с другом операторов S_i; из него вытекает представление

$$T_n = \operatorname{pr} N_n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

с помощью нормальных операторов $N_n = S_{2n} + i S_{2n+1}$, дважды перестановочных друг с другом. Для самосопряженного T_n имеем $T_n = \operatorname{Re} T_n$ и поэтому можно выбрать $N_n = S_{2n}$.

§ 3. Моментные последовательности операторов

1. Следующая теорема также тесно связана с теоремой I.

Теорема II (С.-Надь [10]). *Пусть $\{A_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — последовательность самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

для всякого полинома

$$\left.\begin{array}{c} a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ \ldots\ + a_n\lambda^n \\ \text{с действительными коэффициентами, принимающего} \\ \text{неотрицательные значения на интервале} \\ -M \leqslant \lambda \leqslant M, \text{ справедливо неравенство} \\ a_0A_0 + a_1A_1 + a_2A_2 + \ \ldots\ + a_nA_n \geqslant O; \end{array}\right\} \quad (\alpha_M)$$

$$A_0 = I. \qquad (\beta)$$

Тогда в некотором более широком пространстве $\boldsymbol{H}$ существует самосопряженный оператор $\boldsymbol{A}$, такой, что

$$A_n = \operatorname{pr} \boldsymbol{A}^n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (7)$$

Можно, кроме того, потребовать, чтобы пространство $\boldsymbol{H}$ было минимальным в том смысле, что в нем должны быть всюду плотны линейные комбинации элементов вида $\boldsymbol{A}^n f$, где $f \in \mathfrak{H}$ и $n = 0, 1, \ldots$; в этом случае структура $\{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}, \mathfrak{H}\}$ определена с точностью до