где Q_n — взаимно ортогональные (и, следовательно, перестановочные) операторы проектирования. Отсюда следует, что

$$T_n = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{S}_n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где

$$\boldsymbol{S}_n = m_n \boldsymbol{I} + 2^n (M_n - m_n + 1)\, \boldsymbol{Q}_n,$$

и операторы $\boldsymbol{S}_n$ — самосопряженные и перестановочные.

Общий случай можно свести к случаю самосопряженных операторов, заменяя в заданной последовательности каждый оператор T_n двумя самосопряженными операторами $\mathrm{Re}\, T_n$ и $\mathrm{Im}\, T_n$. Действительно, имеет место представление

$$\mathrm{Re}\, T_n = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{S}_{2n}, \quad \mathrm{Im}\, T_n = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{S}_{2n+1} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

с помощью самосопряженных ограниченных перестановочных друг с другом операторов $\boldsymbol{S}_i$; из него вытекает представление

$$T_n = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{N}_n \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots)$$

с помощью нормальных операторов $\boldsymbol{N}_n = \boldsymbol{S}_{2n} + i\boldsymbol{S}_{2n+1}$, дважды перестановочных друг с другом. Для самосопряженного T_n имеем $T_n = \mathrm{Re}\, T_n$ и поэтому можно выбрать $\boldsymbol{N}_n = \boldsymbol{S}_{2n}$.

§ 3. Моментные последовательности операторов

1. Следующая теорема также тесно связана с теоремой I.

Теорема II (С.-Надь [10]). *Пусть* $\{A_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — *последовательность самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

для всякого полинома

$$\left.\begin{array}{c} a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ \ldots\ + a_n\lambda^n \\ \text{с действительными коэффициентами, принимающего} \\ \text{неотрицательные значения на интервале} \\ -M \leqslant \lambda \leqslant M, \text{ справедливо неравенство} \\ a_0A_0 + a_1A_1 + a_2A_2 + \ \ldots\ + a_nA_n \geqslant O; \end{array}\right\} \quad (\alpha_M)$$

$$A_0 = I. \qquad (\beta)$$

Тогда в некотором более широком пространстве $\boldsymbol{H}$ *существует самосопряженный оператор* $\boldsymbol{A}$, *такой, что*

$$A_n = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{A}^n \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (7)$$

Можно, кроме того, потребовать, чтобы пространство $\boldsymbol{H}$ *было минимальным в том смысле, что в нем должны быть всюду плотны линейные комбинации элементов вида* $\boldsymbol{A}^n f$, *где* $f \in \mathfrak{H}$ *и* $n = 0, 1, \ldots$; *в этом случае структура* $\{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}, \mathfrak{H}\}$ *определена с точностью до* *изоморфизма, и*

$$\|A\| \leqslant M.$$

Заметим, что если $\{B_\lambda\}$ есть обобщенное спектральное семейство, заданное на интервале $[-M, M]$ (т. е. $B_\lambda = O$ при $\lambda < -M$ и $B_\lambda = I$ при $\lambda \geqslant M$), то операторы

$$A_n = \int_{-M-0}^{M} \lambda^n dB_\lambda \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{8}$$

удовлетворяет условиям (α_M) и (β). Обратно, если эти условия выполнены, то последовательность $\{A_n\}$ допускает интегральное представление вида (8) с семейством $\{B_\lambda\}$, заданным на $[-M, M]$. Это следует сразу из теоремы II, если воспользоваться спектральным разложением оператора A. Но этот факт можно доказать и непосредственно, без обращения к теореме II.

Действительно, соответствие между полиномами

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_n\lambda^n$$

с действительными коэффициентами и операторами

$$p(A) = a_0 I + a_1 A_1 + a_2 A_2 + \ldots + a_n A_n,$$

являющееся *однородным, аддитивным и положительного типа* по отношению к интервалу $-M \leqslant \lambda \leqslant M$, может быть при помощи предельных переходов в монотонных последовательностях полиномов продолжено с сохранением этих свойств на более широкий класс функций, включающий в себя, в частности, разрывные функции

$$e_\mu(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda \leqslant \mu, \\ 0 & \text{при } \lambda > \mu, \end{cases}$$

и формула (8) получается, если положить

$$B_\mu = e_\mu(A).$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно повторить слово в слово одно из обычных доказательств спектрального разложения ограниченного самосопряженного оператора A (см. пп. 106, 107), заменяя степени A^n операторами A_n. Единственное отличие состоит в том, что в нашем случае соответствие $p(\lambda) \to p(A)$ и его продолжение не мультипликативны, так что из $e_\mu^2(\lambda) \equiv e_\mu(\lambda)$ не следует, что $B_\mu^2 = B_\mu$, и поэтому оператор B_μ не является, вообще говоря, оператором проектирования.

Согласно теореме I, $\{B_\mu\}$ есть проекция обычного спектрального семейства $\{E_\lambda\}$, которое можно выбрать тоже заданным на $[-M, M]$, и тогда равенство (7) следует из (8), если положить

$$A = \int_{-M-0}^{M} \lambda \, dE_\lambda.$$

Позже (в § 8) мы вернемся к этой теореме и докажем ее (а также не рассмотренные здесь ее утверждения о минимальных расширенных пространствах и об изоморфизме) как следствие основной теоремы § 6.

2. Если условие (β) заменить более слабым

$$A_0 \leqslant I, \qquad (\beta')$$

то представление (7) последовательности $\{A_n\}$ будет все же возможно, но *начиная лишь с* $n=1$ [1]). Для этого достаточно показать, что если последовательность

$$\{A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\}$$

удовлетворяет условиям (α_M) и (β'), то последовательность

$$\{I,\ A_1,\ A_2,\ \ldots\}$$

удовлетворяет условию (α_M). Убедиться в этом можно следующим образом: если $p(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ \ldots\ +a_n\lambda^n \geqslant 0$ на $[-M,\ M]$, то, в частности, $p(0)=a_0 \geqslant 0$. По предположению $a_0A_0+a_1A_1+\ldots$ $\ldots\ +a_nA_n \geqslant O$ и $(I-A_0) \geqslant O$, поэтому

$$a_0I+a_1A_1+\ldots+a_nA_n=a_0(I-A_0)+a_0A_0+a_1A_1+\ldots+a_nA_n \geqslant O.$$

Одним из наиболее интересных следствий представления

$$A_n=\operatorname{pr}\boldsymbol{A}^n \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

является следующее. Для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$(A_2f,\ f)=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^2f,\ f)=(\boldsymbol{A}^2f,\ f)=\|\boldsymbol{A}f\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}f\|^2=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}f,\ f)=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}f,\ f)=(A_1^2f,\ f),$$

причем равенство имеет место в том и только том случае, когда

$$\boldsymbol{A}f=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}f=A_1f.$$

---

[1]) Формула (7) теоремы II может быть тоже изменена так, что она окажется справедливой при единственном условии (α_M) для $n=0,\ 1,\ \ldots$. Именно, всегда имеет место представление вида

$$A_nf=A_0^{1/2}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}^nA_0^{1/2}f \qquad (f\in\mathfrak{H};\ n=0,\ 1,\ \ldots),$$

где $\boldsymbol{A}$ — самосопряженный оператор в соответствующем более широком пространстве и $\|\boldsymbol{A}\| \leqslant M$. (Неравеиство $A_0 \geqslant 0$ а следовательно, и существование квадратного корня $A_0^{1/2} \geqslant 0$, следуют из условия (α_M), примененного к функции $p(\lambda)\equiv 1$.) В этом можно убедиться сразу, если оператор A_0 имеет положительную нижнюю грань, так как в этом случае последовательность операторов

$$\tilde{A}_n=A_0^{-1/2}A_nA_0^{-1/2} \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots)$$

удовлетворяет условиям (α_M) и (β). Случай, когда нижняя граиь оператора A_0 равна нулю, требует более тонких рассуждений (см. С.-Надь [10]).

Если это выполняется для всех $f \in \mathfrak{H}$, то

$$A^2 f = A(Af) = A(A_1 f) = A_1(A_1 f) = A_1^2 f,$$
$$A^3 f = A(A^2 f) = A(A_1^2 f) = A_1(A_1^2 f) = A_1^3 f \text{ и т. д.,}$$

т. е.

$$A_n f = PA^n f = A_1^n f \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда получается следующий результат:

Если последовательность $A_0, A_1, A_2, \ldots$ самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ удовлетворяет условиям (α_M) и (β'), то справедливо неравенство

$$A_1^2 \leqslant A_2, \tag{9}$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$A_n = A_1^n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Неравенство (9) принадлежит Кадисону [1], который доказал его иначе и применил его в своих исследованиях алгебраических инвариантов алгебр операторов.

Впрочем, можно отказаться и от условия (β'), и тогда мы получим неравенство

$$A_1^2 \leqslant \| A_0 \| A_2; \tag{10}$$

действительно, достаточно применить неравенство (9) к последовательности $\{\| A_0 \|^{-1} A_n\}$.

§ 4. Сжатия в гильбертовом пространстве

1. В то время как проекции ограниченных самосопряженных операторов являются также самосопряженными, проекции унитарных операторов[1]) являются уже операторами более общего типа. Если $T = \mathrm{pr}\, U$, где U унитарен, то при любом $f \in \mathfrak{H}$

$$\| Tf \| = \| PUf \| \leqslant \| Uf \| = \| f \|,$$

или

$$\| T \| \leqslant 1,$$

т. е. оператор T должен быть сжатием.

Однако это условие не только необходимо, но также и достаточно.

---

[1]) Об *унитарных* операторах говорят обычно только в случае комплексного гильбертова пространства, в то время как их аналоги в случае действительного гильбертова пространства называются *ортогональными*. Для удобства речи мы условимся говорить „унитарный оператор" в каждом из этих двух случаев. Таким образом, линейный оператор T в гильбертовом пространстве *унитарен*, если он осуществляет изометричное отображение пространства $\mathfrak{H}$ на все пространство $\mathfrak{H}$ или, что то же самое, если $T^*T = TT^* = I$.