Если это выполняется для всех $f \in \mathfrak{H}$, то

$$\mathbf{A}^2 f = \mathbf{A}(\mathbf{A}f) = \mathbf{A}(A_1 f) = A_1(A_1 f) = A_1^2 f,$$
$$\mathbf{A}^3 f = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2 f) = \mathbf{A}(A_1^2 f) = A_1(A_1^2 f) = A_1^3 f \text{ и т. д.},$$

т. е.

$$A_n f = \mathbf{P}\mathbf{A}^n f = A_1^n f \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда получается следующий результат:

Если последовательность $A_0, A_1, A_2, \ldots$ самосопряженных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ удовлетворяет условиям (α_M) и (β'), то справедливо неравенство

$$A_1^2 \leqslant A_2, \tag{9}$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$A_n = A_1^n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Неравенство (9) принадлежит Кадисону [1], который доказал его иначе и применил его в своих исследованиях алгебраических инвариантов алгебр операторов.

Впрочем, можно отказаться и от условия (β'), и тогда мы получим неравенство

$$A_1^2 \leqslant \| A_0 \| A_2; \tag{10}$$

действительно, достаточно применить неравенство (9) к последовательности $\{\| A_0 \|^{-1} A_n\}$.

§ 4. Сжатия в гильбертовом пространстве

1. В то время как проекции ограниченных самосопряженных операторов являются также самосопряженными, проекции унитарных операторов[1] являются уже операторами более общего типа. Если $T = \operatorname{pr} \mathbf{U}$, где $\mathbf{U}$ унитарен, то при любом $f \in \mathfrak{H}$

$$\| Tf \| = \| \mathbf{P}\mathbf{U}f \| \leqslant \| \mathbf{U}f \| = \| f \|,$$

или

$$\| T \| \leqslant 1,$$

т. е. оператор T должен быть сжатием.

Однако это условие не только необходимо, но также и достаточно.

[1]) Об *унитарных* операторах говорят обычно только в случае комплексного гильбертова пространства, в то время как их аналоги в случае действительного гильбертова пространства называются *ортогональными*. Для удобства речи мы условимся говорить „унитарный оператор" в каждом из этих двух случаев. Таким образом, линейный оператор T в гильбертовом пространстве *унитарен*, если он осуществляет изометричное отображение пространства $\mathfrak{H}$ на все пространство $\mathfrak{H}$ или, что то же самое, если $T^*T = TT^* = I$.

Теорема. *Всякое сжатие T гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ может быть представлено как проекция унитарного оператора U в более широком пространстве H.*

Эта теорема, как и следующее простое построение оператора U, принадлежит Халмошу [2]. Рассмотрим снова пространство $H = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ и следующий оператор в пространстве H:

$$U = \begin{bmatrix} T & S \\ -Z & T^* \end{bmatrix}, \quad \text{где } S = (I - TT^*)^{1/2}, \quad Z = (I - T^*T)^{1/2}\text{[1]}). \tag{11}$$

Соотношение $T = \operatorname{pr} U$ очевидно. Покажем, что оператор U унитарен, или, что то же, что произведения U^*U и UU^* равны тождественному оператору I в пространстве H. Поскольку S и Z — самосопряженные операторы, имеем

$$U^*U = \begin{bmatrix} T^* & -Z \\ S & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & S \\ -Z & T^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^*T + Z^2 & T^*S - ZT^* \\ ST - TZ & S^2 + TT^* \end{bmatrix},$$

$$UU^* = \begin{bmatrix} T & S \\ -Z & T^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^* & -Z \\ S & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TT^* + S^2 & -TZ + ST \\ -ZT^* + T^*S & Z^2 + T^*T \end{bmatrix}.$$

Так как $Z^2 = I - T^*T$ и $S^2 = I - TT^*$, то элементы, расположенные на диагонали матриц-произведений, равны I. Остается показать, что остальные элементы равны O, т. е. что

$$ST = TZ \tag{12}$$

(отсюда уже следует, что $T^*S = (ST)^* = (TZ)^* = ZT^*$).

Рассмотрим равенство

$$S^2T = (I - TT^*)T = T - TT^*T = T(I - T^*T) = TZ^2.$$

Применяя его повторно, мы получим, что

$$S^{2n}T = TZ^{2n} \text{ для } n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Поэтому и

$$p(S^2)T = Tp(Z^2),$$

где $p(\lambda)$ — любой многочлен. Поскольку операторы S и Z суть положительные квадратные корни из операторов S^2 и Z^2, существует последовательность многочленов $p_n(\lambda)$, такая, что

$$p_n(S^2) \to S \text{ и } p_n(Z^2) \to Z$$

(см. п. 104). Из равенства

$$p_n(S^2)T = Tp_n(Z^2),$$

переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем (12), чем и завершается доказательство.

2. Соответствие между оператором S в расширенном по отношению к $\mathfrak{H}$ пространстве H и его проекцией $T = \operatorname{pr} S$ не является, вообще говоря, мультипликативным, т. е. из того, что

[1]) $\|T\| \leq 1$, поэтому $O \leq I - TT^* \leq I$ и $O \leq I - T^*T \leq I$.

$T_1 = \mathrm{pr}\, S_1$ и $T_2 = \mathrm{pr}\, S_2$ (где S_1, S_2 — операторы в одном и том же расширенном пространстве), не следует, вообще говоря, что $T_1 T_2 = \mathrm{pr}\, S_1 S_2$. Если взять, например, оператор U, построенный по формуле (11), то для него $\mathrm{pr}\, U^2 = T^2 - SZ$, что, вообще говоря, не равно T^2.

Возникает вопрос, существует ли в некотором расширенном пространстве такой унитарный оператор U, что все степени оператора T (тоже являющиеся сжатиями) равны проекциям на подпространство $\mathfrak{H}$ соответствующих степеней оператора U.

Если речь идет о конечном числе степеней

$$T, T^2, \ldots, T^k$$

(для нулевой степени $T^0 = I$ вопрос тривиален), то задача решается положительно довольно простым способом, являющимся обобщением только что проведенного построения.

Рассмотрим $(k+1)$-кратную прямую сумму пространства $\mathfrak{H}$

$$H = \mathfrak{H} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H},$$

элементами которой являются упорядоченные последовательности $\{f_1, \ldots, f_{k+1}\}$ элементов из $\mathfrak{H}$ и в которой векторные операции и метрика определяются обычным способом:

$$c\{f_1, \ldots, f_{k+1}\} = \{cf_1, \ldots, cf_{k+1}\},$$
$$\{f_1, \ldots, f_{k+1}\} + \{g_1, \ldots, g_{k+1}\} = \{f_1 + g_1, \ldots, f_{k+1} + g_{k+1}\},$$
$$(\{f_1, \ldots, f_{k+1}\}, \{g_1, \ldots, g_{k+1}\}) = (f_1, g_1) + \ldots + (f_{k+1}, g_{k+1}).$$

Отождествляя элемент $f \in \mathfrak{H}$ с элементом $\{f, 0, \ldots, 0\} \in \mathfrak{H}$, мы погружаем $\mathfrak{H}$ в H как подпространство последнего. Линейные ограниченные операторы T в H представляются квадратными матрицами $[T_{ij}]$ порядка $k+1$, все элементы T_{ij} которых суть линейные ограниченные операторы в пространстве $\mathfrak{H}$. Соотношение $T = \mathrm{pr}\, \mathbf{T}$ имеет место в том и только в том случае, когда $\mathbf{T}_{11} = T$.

Рассмотрим теперь в H оператор[1]:

$$U = \begin{bmatrix} T & S & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -I \\ -Z & T^* & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где S и Z — те же, что и в предыдущей конструкции[2]).

---

[1]) Следующее построение является модификацией построения, предложенного Эгервари [1] для случая конечномерного пространства.

[2]) Элементы $-I$ можно было бы заменить на $+I$, но выбор знака — дает следующее преимущество. Пусть $\mathfrak{H}$ — вещественное конечномерное пространство. Представим операторы T, T^*, S, Z, 0 и I их матрицами относительно орто-

Оператор U унитарен. Это доказывается так же, как и выше, путем непосредственного вычисления матриц U^*U и UU^*. Для доказательства соотношений

$$T^n = \operatorname{pr} U^n \quad (n = 1, 2, \ldots, k)$$

нужно вычислить элемент с индексами (1, 1) матрицы U^n и убедиться, что он равен T^n при $n = 1, \ldots, k$. Мы докажем даже нечто большее, а именно, что первая строка матрицы U^n имеет следующий вид ($n = 1, \ldots, k$):

$$[T^n, T^{n-1}, S, -T^{n-2}S, T^{n-3}S, -T^{n-4}S, \ldots, (-1)^{n-1}S, \overbrace{0, \ldots, 0}^{k-n}].$$

Это предложение очевидно для $n = 1$, и его можно доказать по индукции от n к $n+1$ (для $n \leqslant k-1$), вычисляя матрицу U^{n+1} как произведение матриц U^nU. Итак, мы доказали следующее предложение:

Теорема. *Если T — сжатие в гильбертовом пространстве H, то для любого заданного натурального k существует унитарный оператор U в расширенном пространстве H, такой, что*

$$T^n = \operatorname{pr} U^n$$

для $n = 0, 1, \ldots, k$. В качестве пространства H можно взять $(k+1)$-кратную сумму $\mathfrak{H} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}$.

Последнее утверждение представляет интерес только в случае конечномерного пространства $\mathfrak{H}$.

3. В проведенном построении был существенно использован тот факт, что число k рассматриваемых степеней конечно. Тем не менее справедлива

Теорема III (С.-Надь [11, 12]). *Для всякого сжатия T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ существует унитарный оператор U в расширенном пространстве H, такой, что соотношение*

$$T^n = \operatorname{pr} U^n$$

выполняется для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Можно, кроме того, потребовать, чтобы пространство H было минимальным в том смысле, что в нем всюду плотны линейные комбинации элементов вида

нормированного базиса в $\mathfrak{H}$. Тогда U будет обычной блочной матрицей, элементами которой являются вещественные числа. Благодаря знакам — определитель $\det U$ равен определителю d матрицы $\begin{bmatrix} T & S \\ -Z & T^* \end{bmatrix}$. Поскольку эта матрица ортогональна, $d = \pm 1$. Величина d зависит от T непрерывно, а так как сжатия образуют выпуклое (и, следовательно, связное) множество и при $T = I$, $d = +1$, то $d = +1$ для всех сжатий T. Таким образом, U есть ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию пространства, т. е. вращение.

$U^n f$, где $f \in \mathfrak{H}$ и $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; в этом случае структура $\{\boldsymbol{H}, U, \mathfrak{H}\}$ определена с точностью до изоморфизма.

Аналогичная теорема верна для *однопараметрических групп и полугрупп* сжатий, т. е. для семейств $\{T_t\}$ сжатий (где соответственно $-\infty < t < \infty$ или $0 \leqslant t < \infty$), таких, что

$$T_0 = I, \quad T_{t_1} T_{t_2} = T_{t_1 + t_2}$$

и T_t (сильно или слабо) непрерывно зависит от t; слабая непрерывность означает, что $(T_t f, g)$ при любой паре f, g элементов пространства $\mathfrak{H}$ является непрерывной числовой функцией параметра t. В этом случае теорема формулируется так:

Теорема IV (С.-Надь [11, 12]). *Для всякой однопараметрической слабо непрерывной полугруппы сжатий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ в некотором расширенном пространстве $\boldsymbol{H}$ существует однопараметрическая группа $\{U_t\}_{-\infty < t < \infty}$ унитарных операторов, такая, что*

$$T_t = \operatorname{pr} U_t \quad \text{для} \quad t \geqslant 0.$$

Можно, кроме того, потребовать, чтобы пространство $\boldsymbol{H}$ было минимальным в том смысле, что в нем всюду плотны линейные комбинации элементов вида $U_t f$, где $f \in \mathfrak{H}$ и $-\infty < t < \infty$; в этом случае группа $\{U_t\}$ сильно непрерывна и структура $\{\boldsymbol{H}, U_t, \mathfrak{H}\}_{-\infty < t < \infty}$ определена с точностью до изоморфизма.

Эти две теоремы могут быть распространены на дискретные или непрерывные полугруппы с несколькими производящими операторами. Мы сформулируем лишь следующее обобщение теоремы III.

Теорема V. *Пусть $\{T^{(\rho)}\}_{\rho \in R}$ — система сжатий гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, дважды перестановочных между собой. Тогда в некотором расширенном пространстве $\boldsymbol{H}$ существует система $\{U^{(\rho)}\}_{\rho \in R}$ дважды перестановочных между собой унитарных операторов, такая, что*

$$\prod_{i=1}^{r} [T^{(\rho_i)}]^{n_i} = \operatorname{pr} \prod_{i=1}^{r} [U^{(\rho_i)}]^{n_i},$$

каковы бы ни были $\rho_i \in R$ и целые n_i, при условии что при $n_i < 0$ множитель $[T^{(\rho_i)}]^{n_i}$ заменяется на $[T^{(\rho_i)*}]^{-n_i}$. Можно, кроме того, потребовать, чтобы пространство $\boldsymbol{H}$ было минимальным в том смысле, что в нем всюду плотны линейные комбинации элементов вида $\prod_{i=1}^{r} [U^{(\rho_i)}]^{n_i} f$, где $f \in \mathfrak{H}$; в этом случае структура $\{\boldsymbol{H}, U^{(\rho)}, \mathfrak{H}\}_{\rho \in R}$ определена с точностью до изоморфизма.

Мы докажем теоремы III—V несколько позднее, в § 9.

4. Приведем некоторые приложения этих теорем; при этом T всегда будет обозначать сжатие, а $\{T_t\}$ — слабо непрерывную однопараметрическую полугруппу сжатий комплексного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$.

а) Инвариантные элементы. *Если элемент f инвариантен относительно T, то он инвариантен также и относительно T^** (см. п. 144).

Доказательство. Воспользуемся представлениями $T = \operatorname{pr} \boldsymbol{U}$, $T^* = \operatorname{pr} \boldsymbol{U}^* = \operatorname{pr} \boldsymbol{U}^{-1}$, где $\boldsymbol{U}$ — унитарный оператор. Из равенств $f = Tf = \boldsymbol{PU}f$, $\|\boldsymbol{U}f\| = \|f\|$ следует, что $\boldsymbol{U}f = f$. Поэтому $f = \boldsymbol{U}^{-1}f = \boldsymbol{PU}^{-1}f = T^*f$, что и требовалось доказать.

б) Эргодические теоремы. *Для любого $f \in \mathfrak{H}$ пределы*

$$\lim_{\substack{n > m \geqslant 0 \\ n - m \to \infty}} \frac{1}{n-m} \sum_{k=m}^{n-1} T^k f \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{\nu > \mu \geqslant 0 \\ \nu - \mu \to \infty}} \frac{1}{\nu - \mu} \int_{\mu}^{\nu} T_t f\, dt$$

существуют в смысле сильной сходимости элементов, причем интеграл определяется как сильный предел сумм типа Римана (см. п. 144).

Доказательство. Согласно теоремам III и IV, $T^k = \operatorname{pr} \boldsymbol{U}^k$ ($k = 0, 1, \ldots$) и $T_t = \operatorname{pr} \boldsymbol{U}_t$ ($t \geqslant 0$), где $\{\boldsymbol{U}_t\}$ — сильно непрерывная группа; полугруппа $\{T_t\}$, следовательно, тоже сильно непрерывна. Для $f \in \mathfrak{H}$ имеем соответственно

$$\sum_{m}^{n-1} T^k f = \boldsymbol{P} \sum_{m}^{n-1} \boldsymbol{U}^k f \quad \text{и} \quad \int_{\mu}^{\nu} T_t f\, dt = \boldsymbol{P} \int_{\mu}^{\nu} \boldsymbol{U}_t f\, dt,$$

и доказательство следует из эргодических теорем И. Неймана для *унитарных* операторов.

Заметим, что эргодическую теорему Данфорда для нескольких перестановочных сжатий (см. п. 145) можно аналогичным образом свести к частному случаю унитарных операторов, используя теорему V, но только при дополнительном условии, что сжатия *дважды* перестановочны.

в) Теоремы И. Неймана и Хайнца[1]. *Пусть*

$$u(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

— степенной ряд переменной z, где

$$|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_n| + \ldots < \infty. \tag{13}$$

Положим

$$u(T) = c_0 I + c_1 T + \ldots + c_n T^n + \ldots\ ^{2)}.$$

Если функция $u(z)$ удовлетворяет при $|z| \leqslant 1$ одному из нера-

[1]) См: п. 153; здесь они приведены в несколько более общем виде. Эти теоремы справедливы в комплексном гильбертовом пространстве.

[2]) В силу условия (13) этот ряд сходится по норме.

венств

$$|u(z)| \leqslant 1, \quad \operatorname{Re} u(z) \geqslant 0,$$

то соответственно

$$\|u(T)\| \leqslant 1 \quad \textit{или} \quad \operatorname{Re} u(T) \geqslant 0.$$

Доказательство. Согласно теореме III, имеет место представление $T^k = \operatorname{pr} \boldsymbol{U}^k$ $(k = 0, 1, \ldots)$, откуда следует, что

$$u(T) = \operatorname{pr} u(\boldsymbol{U}).$$

Пусть

$$\boldsymbol{U} = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda}\, d\boldsymbol{E}_\lambda$$

— спектральное представление унитарного оператора $\boldsymbol{U}$; тогда для $f \in \mathfrak{H}$

$$\|u(T) f\|^2 = \|\boldsymbol{P} u(\boldsymbol{U}) f\|^2 \leqslant \|u(\boldsymbol{U}) f\|^2 = \int_0^{2\pi} |u(e^{i\lambda})|^2\, d(\boldsymbol{E}_\lambda f, f),$$

$$\operatorname{Re}(u(T) f, f) = \operatorname{Re}(\boldsymbol{P} u(\boldsymbol{U}) f, f) = \operatorname{Re}(u(\boldsymbol{U}) f, f) = \\ = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} u(e^{i\lambda})\, d(\boldsymbol{E}_\lambda f, f).$$

Утверждения теоремы вытекают отсюда очевидным образом.

г) *Пусть*

$$p(\Theta) = \sum_k a_k e^{i t_k \Theta}$$

— *тригонометрический ряд с произвольными действительными* t_k *и такой, что*

$$\sum_k |a_k| < \infty. \tag{14}$$

Положим

$$p(T) = \sum_k a_k T_{t_k}\ ^{1)}.$$

Если функция $p(\Theta)$ *удовлетворяет при всех действительных* Θ *одному из неравенств*

$$|p(\Theta)| \leqslant 1, \quad \operatorname{Re} p(\Theta) \geqslant 0,$$

то соответственно

$$\|p(T)\| \leqslant 1 \quad \textit{или} \quad \operatorname{Re} p(T) \geqslant 0.$$

Доказательство такое же, как и для предложения в), с той разиницей, что здесь нужно воспользоваться теоремой IV и теоремой Стоуна, согласно которой группа $\{\boldsymbol{U}_t\}$ допускает

---

[1]) В силу условия (14) этот ряд сходится по норме.

спектральное разложение вида

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE_\lambda.$$

Аналогичные теоремы могли бы быть сформулированы (при соответствующих условиях, обеспечивающих сходимость) для тригонометрических интегралов.

5. *Изометричные* преобразования гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ (в некоторое его подпространство) являются частным случаем сжатий. Если изометричный оператор T представить как проекцию унитарного оператора U, то для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$\|f\| = \|Tf\| = \|PUf\| \leqslant \|Uf\|,$$

а поскольку, с другой стороны, $\|Uf\| = \|f\|$, мы имеем с необходимостью, что $PUf = Uf$, а следовательно, и $Tf = Uf$, т. е. оператор U является *продолжением* сжатия T.

Таким образом, из наших теорем о сжатиях следует, что *всякий изометричный оператор обладает унитарным продолжением* и что *для любой однопараметрической слабо непрерывной полугруппы изометричных операторов T_t существует однопараметрическая сильно непрерывная группа унитарных операторов U_t, таких, что $U_t \supseteq T_t$ $(t \geqslant 0)$.*

Эта последняя теорема была доказана ранее (другим способом) Купером [3].

§ 5. Нормальные продолжения

В § 2 было, в частности, доказано, что всякий линейный ограниченный оператор T в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ может быть представлен как проекция нормального оператора, заданного в более широком пространстве. Возникает вопрос, имеет ли оператор T нормальное *продолжение* N.

Если существует нормальное продолжение N оператора T, то, в частности, $T = \mathrm{pr}\, N$ и, следовательно, $T^* = \mathrm{pr}\, N^*$, откуда вытекает, что

$$\|Tf\| = \|Nf\| = \|N^*f\| \geqslant \|PN^*f\| = \|T^*f\|$$

для всех $f \in \mathfrak{H}$. Неравенство

$$\|Tf\| \geqslant \|T^*f\| \quad (\text{для всех } f \in \mathfrak{H})$$

является, таким образом, условием, необходимым для того, чтобы оператор T допускал нормальное продолжение. Легко построить примеры операторов T, не удовлетворяющих этому условию.

Другие менее простые необходимые условия получаются следующим образом. Пусть $\{g_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ — последовательность