спектральное разложе́ние вида

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE_\lambda.$$

Аналогичные теоремы могли бы быть сформулированы (при соответствующих условиях, обеспечивающих сходимость) для тригонометрических интегралов.

5. *Изометричные* преобразования гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ (в некоторое его подпространство) являются частным случаем сжатий. Если изометричный оператор T представить как проекцию унитарного оператора $\boldsymbol{U}$, то для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$\|f\| = \|Tf\| = \|\boldsymbol{PU}f\| \leqslant \|\boldsymbol{U}f\|,$$

а поскольку, с другой стороны, $\|\boldsymbol{U}f\| = \|f\|$, мы имеем с необходимостью, что $\boldsymbol{PU}f = \boldsymbol{U}f$, а следовательно, и $Tf = \boldsymbol{U}f$, т. е. оператор $\boldsymbol{U}$ является *продолжением* сжатия T.

Таким образом, из наших теорем о сжатиях следует, что *всякий изометричный оператор обладает унитарным продолжением* и что *для любой однопараметрической слабо непрерывной полугруппы изометричных операторов T_t существует однопараметрическая сильно непрерывная группа унитарных операторов $\boldsymbol{U}_t$, таких, что $\boldsymbol{U}_t \supseteq T_t$ $(t \geqslant 0)$.*

Эта последняя теорема была доказана ранее (другим способом) Купером [3].

§ 5. Нормальные продолжения

В § 2 было, в частности, доказано, что всякий линейный ограниченный оператор T в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ может быть представлен как проекция нормального оператора, заданного в более широком пространстве. Возникает вопрос, имеет ли оператор T нормальное *продолжение* $\boldsymbol{N}$.

Если существует нормальное продолжение $\boldsymbol{N}$ оператора T, то, в частности, $T = \operatorname{pr} \boldsymbol{N}$ и, следовательно, $T^* = \operatorname{pr} \boldsymbol{N}^*$, откуда вытекает, что

$$\|Tf\| = \|\boldsymbol{N}f\| = \|\boldsymbol{N}^*f\| \geqslant \|\boldsymbol{PN}^*f\| = \|T^*f\|$$

для вс́ех $f \in \mathfrak{H}$. Неравенство

$$\|Tf\| \geqslant \|T^*f\| \quad (\text{для всех } f \in \mathfrak{H})$$

является, таким образом, условием, необходимым для того, чтобы оператор T допускал нормальное продолжение. Легко построить примеры операторов T, не удовлетворяющих этому условию.

Другие менее простые необходимые условия получаются следующим образом. Пусть $\{g_i\}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ — последовательность элементов из $\mathfrak{H}$, которые почти все (т. е. кроме, быть может, конечного числа) равны элементу $0 \in \mathfrak{H}$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(T^i g_j,\ T^j g_i)=\sum_i\sum_j(N^i g_j,\ N^j g_i)=\sum_i\sum_j(N^{*j}N^i g_j,\ g_i)=$$
$$=\sum_i\sum_j(N^i N^{*j} g_j,\ g_i)=\sum_i\sum_j(N^{*j} g_j,\ N^{*i} g_i)=\left\|\sum_i N^{*i} g_i\right\|^2\geqslant 0,$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(T^{i+1} g_j,\ T^{j+1} g_i)=\left\|\sum_i (N^*)^{i+1} g_i\right\|^2\leqslant\|N^*\|^2\cdot\left\|\sum_i N^{*i} g_i\right\|^2,$$

откуда видно, что

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(T^i g_j,\ T^j g_i)\geqslant 0 \tag{15}$$

и

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(T^{i+1} g_i,\ T^{j+1} g_j)\leqslant C^2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(T^i g_j,\ T^j g_i), \tag{16}$$

где $C>0$ — некоторая постоянная. Эти два неравенства, таким образом, являются *необходимыми* условиями того, чтобы оператор T допускал нормальное продолжение.

Однако эти условия также и *достаточны*. Именно, справедлива

Теорема VI (Халмош [2]). *Всякий линейный ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий условиям* (15) *и* (16), *имеет в некотором более широком пространстве $\boldsymbol{H}$ нормальное продолжение $\boldsymbol{N}$. Можно даже потребовать, чтобы пространство $\boldsymbol{H}$ было минимальным в том смысле, что в нем всюду плотны линейные комбинации элементов вида $\boldsymbol{N}^{*k}f$, где $f\in\mathfrak{H}$ и $k=0, 1, \ldots$; в этом случае структура $\{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{N}, \mathfrak{H}\}$ определена с точностью до изоморфизма.*

Эту теорему мы выведем в § 10 как одно из следствий нашей основной теоремы (§ 6).

Теперь же ограничнмся замечанием, которое покажет связь задачи о продолжениях с задачами, рассмотренными до сих пор.

Для двух линейных ограниченных операторов T в $\mathfrak{H}$ и $\boldsymbol{T}$ в $\boldsymbol{H}$ ($\supseteq\mathfrak{H}$) три следующих предложения равносильны:

а) $T\subseteq\boldsymbol{T}$;

б) $T=\mathrm{pr}\,\boldsymbol{T}$, $\quad T^*T=\mathrm{pr}\,\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}$;

в) $T^{*i}T^k=\mathrm{pr}\,\boldsymbol{T}^{*i}\boldsymbol{T}^k$ *для* $i, k=0, 1, \ldots$.

Доказательство. Имеем а) → в), так как для $f, g\in\mathfrak{H}$ $(T^{*j}T^k f,\ g)=(T^k f,\ T^i g)=(\boldsymbol{T}^k f,\ \boldsymbol{T}^i g)=(\boldsymbol{T}^{*i}\boldsymbol{T}^k f,\ g)=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}^{*i}\boldsymbol{T}^k f,\ g)$. в) → б) очевидно. б) → а) доказывается следующим образом: для $f\in\mathfrak{H}$

$$\|Tf\|^2=(T^*Tf,\ f)=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}f,\ f)=(\boldsymbol{T}f,\ \boldsymbol{T}f)=\|\boldsymbol{T}f\|^2,$$

так как $T^*T = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}$; с другой стороны, $\|Tf\| = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}f\|$, так как $T = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{T}$. Поэтому

$$\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}f\| = \|\boldsymbol{T}f\|,$$

что возможно лишь тогда, когда $\boldsymbol{T}f = \boldsymbol{P}\boldsymbol{T}f$, т. е. для любого $f \in \mathfrak{H}$ $\boldsymbol{T}f = Tf$; таким образом, $T \subseteq \boldsymbol{T}$.

§ 6. Основная теорема

Теоремы I—VI мы получим как следствия „основной теоремы", которая будет доказана в этом параграфе. Чтобы ее сформулировать, нам понадобится ввести некоторые определения и обозначения.

Под *$*$-полугруппой* мы будем понимать систему Γ элементов (которые будут обозначаться греческими буквами) с определенными в ней двумя операциями: „операцией полугруппы", т. е. ассоциативной операцией умножения $(\xi, \eta) \to \xi\eta$, и „операцией $*$" $\xi \to \xi^*$, удовлетворяющей следующим правилам:

$$\xi^{**} = \xi, \quad (\xi\eta)^* = \eta^*\xi^*.$$

Кроме того, мы предположим, что в Γ есть „единичный" элемент ε, такой, что

$$\varepsilon\xi = \xi\varepsilon = \xi \text{ для любого } \xi \in \Gamma \text{ и } \varepsilon^* = \varepsilon.$$

Всякую *группу* можно рассматривать как $*$-полугруппу, если в ней операцию $*$ определить как обращение $\xi^* = \xi^{-1}$. *В дальнейшем каждый раз, когда мы будем говорить о группе* Γ, *мы будем иметь в виду, что она обладает такой структурой $*$-полугруппы.*

Под *представлением* $*$-полугруппы Γ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ мы будем понимать семейство $\{\boldsymbol{D}_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ линейных ограниченных операторов в $\boldsymbol{H}$, такое, что

$$\boldsymbol{D}_\varepsilon = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{D}_{\xi\eta} = \boldsymbol{D}_\xi \boldsymbol{D}_\eta, \quad \boldsymbol{D}_{\xi^*} = \boldsymbol{D}_\xi^* \quad \text{для любых } \xi, \eta \in \Gamma.$$

Очевидны следующие предложения: если для некоторого $\xi \in \Gamma$

(i) $\xi^*\xi = \xi\xi^*$, то $\boldsymbol{D}_\xi$ — *нормальный оператор*,

(ii) $\xi = \xi^*$, то $\boldsymbol{D}_\xi$ — *самосопряженный оператор*;

(iii) $\xi = \xi^* = \xi^2$, то $\boldsymbol{D}_\xi$ — *оператор (ортогонального) проектирования*;

(iv) $\xi^*\xi = \xi\xi^* = \varepsilon$, то $\boldsymbol{D}_\xi$ — *унитарный оператор*.

Пусть $\{\boldsymbol{D}_\xi\}$ — представление Γ в пространстве $\boldsymbol{H}$ и $\mathfrak{H}$ — подпространство в $\boldsymbol{H}$. Рассмотрим операторы

$$T_\xi = \mathrm{pr}_{\mathfrak{H}}\, \boldsymbol{D}_\xi.$$

Очевидно, что $T_\varepsilon = I$ (тождественный оператор в $\mathfrak{H}$) и $T_{\xi^*} = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{D}_{\xi^*} = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{D}_\xi^* = T_\xi^*$. Пусть $\{g_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ — семейство элементов из $\mathfrak{H}$,