так как $T^*T = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}$; с другой стороны, $\|Tf\| = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}f\|$, так как $T = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{T}$. Поэтому

$$\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}f\| = \|\boldsymbol{T}f\|,$$

что возможно лишь тогда, когда $\boldsymbol{T}f = \boldsymbol{P}\boldsymbol{T}f$, т. е. для любого $f \in \mathfrak{H}$ $\boldsymbol{T}f = Tf$; таким образом, $T \subseteq \boldsymbol{T}$.

§ 6. Основная теорема

Теоремы I—VI мы получим как следствия „основной теоремы", которая будет доказана в этом параграфе. Чтобы ее сформулировать, нам понадобится ввести некоторые определения и обозначения.

Под *$*$-полугруппой* мы будем понимать систему Γ элементов (которые будут обозначаться греческими буквами) с определенными в ней двумя операциями: „операцией полугруппы", т. е. ассоциативной операцией умножения $(\xi, \eta) \longrightarrow \xi\eta$, и „операцией $*$" $\xi \longrightarrow \xi^*$, удовлетворяющей следующим правилам:

$$\xi^{**} = \xi, \quad (\xi\eta)^* = \eta^*\xi^*.$$

Кроме того, мы предположим, что в Γ есть „единичный" элемент ε, такой, что

$$\varepsilon\xi = \xi\varepsilon = \xi \text{ для любого } \xi \in \Gamma \text{ и } \varepsilon^* = \varepsilon.$$

Всякую *группу* можно рассматривать как $*$-полугруппу, если в ней операцию $*$ определить как обращение $\xi^* = \xi^{-1}$. *В дальнейшем каждый раз, когда мы будем говорить о группе* Γ, *мы будем иметь в виду, что она обладает такой структурой $*$-полугруппы.*

Под *представлением* $*$-полугруппы Γ в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ мы будем понимать семейство $\{\boldsymbol{D}_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ линейных ограниченных операторов в $\boldsymbol{H}$, такое, что

$$\boldsymbol{D}_\varepsilon = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{D}_{\xi\eta} = \boldsymbol{D}_\xi \boldsymbol{D}_\eta, \quad \boldsymbol{D}_{\xi^*} = \boldsymbol{D}_\xi^* \quad \text{для любых } \xi, \eta \in \Gamma.$$

Очевидны следующие предложения: если для некоторого $\xi \in \Gamma$

(i) $\xi^*\xi = \xi\xi^*$, то $\boldsymbol{D}_\xi$ — *нормальный оператор,*

(ii) $\xi = \xi^*$, то $\boldsymbol{D}_\xi$ — *самосопряженный оператор*;

(iii) $\xi = \xi^* = \xi^2$, то $\boldsymbol{D}_\xi$ — *оператор (ортогонального) проектирования*;

(iv) $\xi^*\xi = \xi\xi^* = \varepsilon$, то $\boldsymbol{D}_\xi$ — *унитарный оператор.*

Пусть $\{\boldsymbol{D}_\xi\}$ — представление Γ в пространстве $\boldsymbol{H}$ и $\mathfrak{H}$ — подпространство в $\boldsymbol{H}$. Рассмотрим операторы

$$T_\xi = \mathrm{pr}_{\mathfrak{H}}\, \boldsymbol{D}_\xi.$$

Очевидно, что $T_\varepsilon = I$ (тождественный оператор в $\mathfrak{H}$) и $T_{\xi^*} = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{D}_{\xi^*} = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{D}_\xi^* = T_\xi^*$. Пусть $\{g_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ — семейство элементов из $\mathfrak{H}$, такое, что $g_\xi = 0$ для почти всех ξ[1]). Тогда, если положить $g = \sum_\xi D_\xi g_\xi$[2]),

$$\sum_\xi \sum_\eta (T_{\xi^*\eta} g_\eta, g_\xi) = \sum_\xi \sum_\eta (D_{\xi^*\eta} g_\eta, g_\xi) =$$

$$= \sum_\xi \sum_\eta (D_\xi^* D_\eta g_\eta, g_\xi) = (g, g) \geqslant 0$$

и для любого $\alpha \in \Gamma$

$$\sum_\xi \sum_\eta (T_{\xi^*\alpha^*\alpha\eta} g_\eta, g_\xi) = \sum_\xi \sum_\eta (D_{\xi^*\alpha^*\alpha\eta} g_\eta, g_\xi) =$$

$$= \sum_\xi \sum_\eta (D_\xi^* D_\alpha^* D_\alpha D_\eta g_\eta, g_\xi) = (D_\alpha g, D_\alpha g) \leqslant \| D_\alpha \|^2 (g, g).$$

Важным для нас будет тот факт, что имеет место и обратное утверждение.

Основная теорема. *Пусть Γ — $*$-полугруппа и $\{T_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ — семейство линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

а) $$T_\varepsilon = I, \quad T_{\xi^*} = T_\xi^* \text{ [3]);}$$

б) *T_ξ — положительно определенная функция от ξ на Γ, т. е. для каждого семейства $\{g_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ элементов из $\mathfrak{H}$, такого, что $g_\xi = 0$ для почти всех ξ, выполняется неравенство*

$$\sum_\xi \sum_\eta (T_{\xi^*\eta} g_\eta, g_\xi) \geqslant 0; \tag{17}$$

в) *для каждого такого семейства $\{g_\xi\}$ и для любого $\alpha \in \Gamma$ выполняется неравенство*

$$\sum_\xi \sum_\eta (T_{\xi^*\alpha^*\alpha\eta} g_\eta, g_\xi) \leqslant C_\alpha^2 \sum_\xi \sum_\eta (T_{\xi^*\eta} g_\eta, g_\xi) \text{ [4]),} \tag{18}$$

где C_α — некоторая положительная постоянная.

Тогда в некотором более широком пространстве $\boldsymbol{H} \supseteq \mathfrak{H}$ существует представление $\{D_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ полугруппы Γ, такое, что

$$T_\xi = \operatorname{pr} D_\xi.$$

Можно, кроме того, потребовать, чтобы пространство $\boldsymbol{H}$ было минимальным в том смысле, что в нем всюду плотны линейные

---

[1]) То есть для всех индексов, кроме, быть может, конечного числа их. Мы будем и в дальнейшем пользоваться этим выражением.

[2]) Если не оговорено противное, сумма распространяется на все элементы Γ.

[3]) В случае комплексного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ это равенство является следствием условия б).

[4]) В частности, левая часть действительна. Это можно было бы вывести и из других условий, а именно из того, что функция T положительно определена.

комбинации элементов вида $\boldsymbol{D}_\xi f$, *где* $f \in \mathfrak{H}$ *и* $\xi \in \Gamma$. *В этом случае структура* $\{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{D}_\xi, \mathfrak{H}\}_{\xi \in \Gamma}$ *определена с точностью до изоморфизма и справедливы следующие утверждения:*

1) $$\|\boldsymbol{D}_\alpha\| \leqslant C_\alpha;$$

2) *если для некоторых* α, β, $\gamma \in \Gamma$ *и любых* ξ, $\eta \in \Gamma$ *выполняется равенство* $T_{\xi\alpha\eta} = T_{\xi\beta\eta} + T_{\xi\gamma\eta}$, *то*

$$\boldsymbol{D}_\alpha = \boldsymbol{D}_\beta + \boldsymbol{D}_\gamma;$$

3) *если для некоторых* α_n *и* α *и для всех* ξ *и* η

$$T_{\xi\alpha_n\eta} \longrightarrow T_{\xi\alpha\eta} \quad (n \longrightarrow \infty)$$

и если, кроме того, $\limsup C_{\alpha_n} < \infty$, *то*

$$\boldsymbol{D}_{\alpha_n} \longrightarrow \boldsymbol{D}_\alpha \quad (n \longrightarrow \infty).$$

Замечания. Если Γ есть группа, т. е. $\xi^* = \xi^{-1}$, $\xi^*\xi = \xi\xi^* = \varepsilon$, то условие в) удовлетворяется очевидным образом и представление $\{\boldsymbol{D}_\xi\}$ состоит из унитарных операторов[1]).

В случае, когда Γ — топологическая группа, а $\mathfrak{H}$ — одномерное комплексное пространство, наша теорема сводится к теореме Гельфанда и Райкова[2]), в силу которой всякая комплекснозначная непрерывная положительно определенная функция $p(\xi)$ на Γ (см. п. 140) может быть записана в виде

$$p(\xi) = (U_\xi f_0, f_0),$$

где $\{U_\xi\}$ — слабо (а следовательно, и сильно) непрерывное[3]) унитарное представление группы Γ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а f_0 — некоторый фиксированный элемент пространства $\mathfrak{H}$, такой, что линейные комбинации его образов $U_\xi f_0$ ($\xi \in \Gamma$) всюду плотны в $\mathfrak{H}$; при этих условиях структура $\{\mathfrak{H}, U_\xi, f_0\}$ определена с точностью до изоморфизма[4]).

Доказательство. 1) *Расширенное пространство.* Обозначим $\boldsymbol{V}$ множество всех семейств $\boldsymbol{v} = \{v_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ элементов $v_\xi \in \mathfrak{H}$;

---

[1]) Для групп основная теорема была впервые доказана в работе Наймарка [2].

[2]) Гельфанд и Райков [1]. См. также Годеман [2], в частности стр. 21—22. Эта теорема играет важную роль в построенной этими авторами теории неприводимых унитарных представлений локально бикомпактных групп.

[3]) Поскольку U_ξ — унитарный оператор, то для любых ξ, $\eta \in \Gamma$ и $f \in \mathfrak{H}$

$$\|U_\xi f - U_\eta f\|^2 = 2\|f\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(U_\xi f, U_\eta f) = 2\mathrm{Re}\,(U_\eta f - U_\xi f, U_\eta f),$$

откуда следует, что слабая непрерывность U_ξ влечет за собой сильную.

[4]) Это означает, что если $\{\mathfrak{H}', U'_\xi, f'_0\}$ — другая структура, обладающая этими же свойствами, то $\mathfrak{H}$ может быть отображено на $\mathfrak{H}'$ линейно и изометрично таким образом, что $f_0 \longrightarrow f'_0$ и из $f \longrightarrow f'$ следует $U_\xi f \longrightarrow U'_\xi f'$ для любого $\xi \in \Gamma$.

$\boldsymbol{v}$ можно рассматривать как вектор, у которого „компонента с индексом ξ" есть v_ξ, обозначая это

$$(\boldsymbol{v})_\xi = v_\xi.$$

Сложение этих векторов и умножение их на числа (действительные или комплексные, в зависимости от того действительно или комплексно пространство $\mathfrak{H}$) определяются, как обычно, с помощью соответствующих операций над их компонентами; $\boldsymbol{v}=0$ означает, что все компоненты $\boldsymbol{v}$ равны нулю.

Рассмотрим, в частности, в V два линейных множества $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{F}$. Множество $\mathfrak{G}$ составлено из векторов, у которых почти все элементы равны 0; эти векторы будут обозначаться буквой $\boldsymbol{g}$. Множество $\mathfrak{F}$ состоит из векторов $\boldsymbol{f}=\{f_\xi\}$ [1]), для которых существует такой вектор $\boldsymbol{g}=\{g_\xi\}$, что

$$f_\xi = \sum_\eta T_{\xi * \eta} g_\eta$$

для всех $\xi \in \Gamma$; это соотношение между $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{g}$ будет обозначаться так:

$$\boldsymbol{f} = \hat{\boldsymbol{g}}.$$

В пространстве $\mathfrak{F}$ определим следующим образом бинарную форму $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}']$. Если $\boldsymbol{f}=\hat{\boldsymbol{g}}$, $\boldsymbol{f}'=\hat{\boldsymbol{g}}'$, то

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}'] &= \sum_\xi (f_\xi, g'_\xi) = \sum_\xi\sum_\eta (T_{\xi*\eta} g_\eta, g'_\xi) = \\ &= \sum_\xi\sum_\eta (g_\eta, T_{\eta*\xi} g'_\xi) = \sum_\eta (g_\eta, f'_\eta).\end{aligned} \tag{19}$$

(Здесь мы воспользовались тем, что $T^*_{\xi*\eta} = T_{(\xi*\eta)*} = T_{\eta*\xi}$.) Из (19) следует, что это определение не зависит от выбора $\boldsymbol{g}$ в представлении вектора $\boldsymbol{f}$ и что оно не зависит также от выбора $\boldsymbol{g}'$ и, следовательно, форма $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}']$ определяется своими аргументами $\boldsymbol{f}$ и $\boldsymbol{f}'$ однозначно. Она, очевидно, линейна по $\boldsymbol{f}$, и $[\boldsymbol{f}', \boldsymbol{f}] = \overline{[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}']}$. Из условия б) следует, что

$$[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}] = \sum_\xi\sum_\eta (T_{\xi*\eta} g_\eta, g_\xi) \geqslant 0.$$

Покажем еще, что $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}]=0$ только при $\boldsymbol{f}=0$. Из уже доказанного вытекает справедливость неравенства Шварца для формы $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}']$:

$$|[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}']|^2 \leqslant [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}][\boldsymbol{f}', \boldsymbol{f}'].$$

Поэтому если $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}]=0$ для некоторого $\boldsymbol{f}$, то $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}']=0$ для всех $\boldsymbol{f}' \in \mathfrak{F}$, и из формулы (19) следует, что это возможно, только если $\boldsymbol{f}=0$.

Форма $[\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}']$ обладает, таким образом, всеми свойствами скалярного произведения, и если в пространстве $\mathfrak{F}$ определить

[1]) Параметр семейства будет обозначаться ξ; таким образом, ξ пробегает все элементы из Γ.

скалярное произведение равенством

$$(f, f') = [f, f'],$$

то оно станет гильбертовым пространством, вообще говоря, *неполным*. Пусть H — *пополнение* пространства $\mathfrak{F}$.

Исходное пространство $\mathfrak{H}$ можно погрузить в H и даже в $\mathfrak{F}$ как подпространство, если отождествить элемент $f \in \mathfrak{H}$ с элементом

$$f_f = \{T_{\xi*}f\}$$

из $\mathfrak{F}$ (заметим, что $f_f = \hat{g}$, где $(g)_\varepsilon = f$ и $(g)_\xi = 0$ для $\xi \neq \varepsilon$). Это отождествление законно, поскольку, как легко видеть,

$$f_{cf} = cf_f, \quad f_{f+f'} = f_f + f_{f'}, \quad (f_f, f_{f'}) = [f_f, f_{f'}] = (f, f').$$

Вычислим ортогональную проекцию Pf элемента $f \in \mathfrak{F}$ на подпространство $\mathfrak{H}$. Для всех $h \in \mathfrak{H}$ должно быть

$$(Pf, h) = (f, h).$$

Из определения скалярного произведения в $\mathfrak{F}$ вытекает, что

$$(f, h) = ((f)_\varepsilon, h),$$

следовательно,

$$(Pf, h) = (f, f_h) = ((f)_\varepsilon, h).$$

Поскольку Pf и $(f)_\varepsilon$ принадлежат $\mathfrak{H}$, это равенство выполняется для всех $h \in \mathfrak{H}$ лишь тогда, когда

$$Pf = (f)_\varepsilon. \tag{20}$$

2) *Представление* $\{D_\xi\}$. Пусть $f = \hat{g}$, т. е.

$$f_\xi = \sum_\eta T_{\xi*\eta} g_\eta.$$

Тогда для $\alpha \in \Gamma$

$$f_{\alpha*\xi} = \sum_\eta T_{\xi*\alpha\eta} g_\eta = \sum_\zeta T_{\xi*\zeta} g_\zeta^\alpha,$$

где

$$g_\zeta^\alpha = \sum_{\alpha\eta=\zeta} g_\eta \tag{21}$$

(если нет ни одного η, такого, что $\alpha\eta = \zeta$, то сумма в правой части равенства (21) по определению равна нулю). Очевидно, что при заданном α $g_\zeta^\alpha = 0$ для почти всех ζ, так что

$$\{g_\xi^\alpha\} \in \mathfrak{S}, \quad \{f_{\alpha*\xi}\} \in \mathfrak{F}.$$

Следовательно, равенство

$$D_\alpha \{f_\xi\} = \{f_{\alpha*\xi}\}$$

определяет оператор (очевидно, линейный) из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим соотношениям:

$$D_\varepsilon \{f_\xi\} = \{f_{\varepsilon*\xi}\} = \{f_\xi\}, \tag{22}$$

$$D_\alpha D_\beta \{f_\xi\} = D_\alpha \{f_{\beta*\xi}\} = \{f_{\beta*\alpha*\xi}\} = \{f_{(\alpha\beta)*\xi}\} = D_{\alpha\beta} \{f_\xi\}, \tag{23}$$

и для $f=\hat{g}$, $f'=\hat{g}'$

$$(D_\alpha f,\ f')=\sum_\xi (f_{\alpha*\xi},\ g'_\xi)=\sum_\xi\sum_\eta (T_{\xi*\alpha\eta}g_\eta,\ g'_\xi)=$$
$$=\sum_\xi\sum_\eta (g_\eta,\ T_{\eta*\alpha*\xi}g'_\xi)=\sum_\eta (g_\eta,\ f'_{\alpha\eta})=(f,\ D_{\alpha*}f'). \qquad (24)$$

Наконец, из (24), (23) и условия в) теоремы следует, что

$$(D_\alpha f,\ D_\alpha f)=(D_{\alpha*}D_\alpha f,\ f)=(D_{\alpha*\alpha}f,\ f)=$$
$$=\sum_\xi\sum_\eta (T_{\xi*\alpha*\alpha\eta}g_\eta,\ g_\xi)\leqslant C_\alpha^2\sum_\xi\sum_\eta (T_{\xi*\eta}g_\eta,\ g_\xi)=C_\alpha^2(f,\ f).$$

Следовательно, оператор D_α ограничен в $\mathfrak{F}$, $\|D_\alpha\|\leqslant C_\alpha$, и может быть поэтому продолжен по непрерывности на все пространство H. Из равенств (22)—(24) следует, что продолженное таким образом семейство $\{D_\xi\}$ является представлением $*$-полугруппы Γ в пространстве H.

Рассмотрим, в частности, элемент f, принадлежащий $\mathfrak{H}$. Для него

$$D_\alpha f=D_\alpha f_f=D_\alpha\{T_{\xi*}f\}=\{T_{\xi*\alpha}f\} \qquad (25)$$

и в силу (20)

$$PD_\alpha f=(D_\alpha f)_e=T_\alpha f.$$

Это доказывает, что

$$T_\alpha=\operatorname{pr} D_\alpha.$$

Из (25) следует также, что для произвольного $f=\hat{g}\in\mathfrak{F}$

$$(f)_\xi=\sum_\eta T_{\xi*\eta}g_\eta=\sum_\eta (D_\eta g_\eta)_\xi=\Big(\sum_\eta D_\eta g_\eta\Big)_\xi,$$

откуда

$$f=\sum_\eta D_\eta g_\eta.$$

Это означает, что пространство $\mathfrak{F}$ составлено из конечных сумм элементов вида $D_\eta g$, где $g\in\mathfrak{H}$, $\eta\in\Gamma$ и, следовательно, линейные комбинации этих элементов всюду плотны в H, т. е. расширенное пространство H *минимально*.

Для построенного нами представления $\{D_\xi\}$ полугруппы Γ выполнены также утверждения 2) и 3) теоремы. Это следует из равенства

$$(D_\alpha f,\ f')=\sum_\xi\sum_\eta (T_{\xi*\alpha\eta}g_\eta,\ g'_\xi)$$

[см. формулу (24)], справедливого для любых $f=\hat{g}$, $f'=\hat{g}'\in\mathfrak{F}$, и из того очевидного факта, что если соотношение

$$(D_\alpha f,\ f')=(D_\beta f,\ f')+(D_\gamma f,\ f')$$

или соотношение

$$(D_{\alpha_n}f,\ f')\to(D_\alpha f,\ f')\quad (n\to\infty)$$

выполняется для $f, f' \in \mathfrak{F}$ и, кроме того, во втором случае

$$\limsup \|D_{\alpha_n}\| < \infty,$$

то то же соотношение выполняется для всех элементов $f, f' \in H$.

3) *Изоморфизм*. Нам осталось ответить на вопрос о том, в какой мере определена структура $\{H, D_\xi, \mathfrak{H}\}$. Для этого рассмотрим два представления полугруппы Γ: $\{D'_\xi\}$ в пространстве H' и $\{D''_\xi\}$ в пространстве H'', где H' и H'' — два расширения пространства $\mathfrak{H}$, и предположим, что

$$\operatorname{pr} D'_\xi = T_\xi, \quad \operatorname{pr} D''_\xi = T_\xi.$$

Мы предположим, кроме того, что каждое из этих расширенных пространств минимально, т. е. в H' всюду плотны линейные комбинации элементов вида $D'_\xi g$, а в H'' — вида $D''_\xi g$, где $g \in \mathfrak{H}$ и $\xi \in \Gamma$.

Пусть

$$f'_1 = \sum_\xi D'_\xi g_{1\xi}, \quad f'_2 = \sum_\xi D'_\xi g_{2\xi}$$

— два элемента из H' (с $\{g_{1\xi}\}$ и $\{g_{2\xi}\} \in \mathfrak{S}$), и пусть

$$f''_1 = \sum_\xi D''_\xi g_{1\xi}, \quad f''_2 = \sum_\xi D''_\xi g_{2\xi}.$$

Тогда

$$(f'_1, f'_2) = \sum_\xi \sum_\eta (D'_\eta g_{1\eta}, D'_\xi g_{2\xi}) =$$
$$= \sum_\xi \sum_\eta (D'_{\xi^*\eta} g_{1\eta}, g_{2\xi}) = \sum_\xi \sum_\eta (T_{\xi^*\eta} g_{1\eta}, g_{2\xi})$$

и аналогично

$$(f''_1, f''_2) = \sum_\xi \sum_\eta (T_{\xi^*\eta} g_{1\eta}, g_{2\xi}),$$

так что

$$(f'_1, f'_2) = (f''_1, f''_2).$$

Следовательно, если поставить в соответствие друг другу элементы

$$f' = \sum_\xi D'_\xi g_\xi \quad \text{и} \quad f'' = \sum_\xi D''_\xi g_\xi \tag{26}$$

с одним и тем же $\{g_\xi\} \in \mathfrak{S}$, то это соответствие $f' \leftrightarrow f''$ будет линейным и изометричным и его можно будет продолжить по непрерывности до линейного и изометричного соответствия между всеми элементами H' и H''.

Полагая, в частности, $g_\varepsilon = g$ и $g_\xi = 0$ для $\xi \neq \varepsilon$, мы видим, что каждый элемент g из общего подпространства $\mathfrak{H}$ остается инвариантным при этом соответствии. Для любого $\alpha \in \Gamma$

$$D'_\alpha \sum_\xi D'_\xi g_\xi = \sum_\xi D'_{\alpha\xi} g_\xi = \sum_\zeta D'_\zeta g^\alpha_\zeta \leftrightarrow \sum_\zeta D''_\zeta g^\alpha_\zeta = \sum_\xi D''_{\alpha\xi} g_\xi = D''_\alpha \sum_\xi D''_\xi g_\xi$$

(см. Шеффер [1]), откуда видно, что $f' \leftrightarrow f''$ влечет за собой $D'_\alpha f' \leftrightarrow D''_\alpha f''$ для любых f', f'' вида (26), а следовательно, в силу непрерывности операторов D'_α, D''_α, и для любых $f' \in H'$ и $f'' \in H''$.

Следовательно, структуры $\{H', D'_\xi, \mathfrak{H}\}$ и $\{H'', D''_\xi, \mathfrak{H}\}$ *изоморфны.*

Это завершает доказательство теоремы.

§ 7. Доказательство теоремы Наймарка

Пусть $\{B_\lambda\}_{-\infty < \lambda < \infty}$ — обобщенное спектральное семейство в пространстве $\mathfrak{H}$. Положим $B_\infty = \lim_{\lambda \to \infty} B_\lambda = I$ и $B_{-\infty} = \lim_{\lambda \to -\infty} B_\lambda = 0$. Каждому полуоткрытому интервалу $\Delta = (a, b]$ (где $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$) поставим в соответствие оператор

$$B_\Delta = B_b - B_a,$$

а каждому множеству ω, состоящему из конечного числа непересекающихся интервалов Δ_i, — оператор

$$B_\omega = \sum_i B_{\Delta_i};$$

это определение не зависит, очевидно, от выбора разбиения множества ω. Для $\Omega = (-\infty, +\infty]$ имеем $B_\Omega = I$, а для пустого множества имеем $B_\varnothing = 0$. Семейство K всех таких множеств ω, включающее в себя также Ω и $\varnothing$, очевидно, замкнуто относительно операций вычитания двух множеств и объединения и пересечения конечного числа множеств. B_ω есть положительная и аддитивная функция множества, определенная на K; более точно, B_ω есть для каждого $\omega \in K$ самосопряженный оператор, такой, что

$$0 \leqslant B_\omega \leqslant I, \quad B_\varnothing = 0, \quad B_\Omega = I,$$
$$B_{\omega_1 \cup \omega_2} = B_{\omega_1} + B_{\omega_2}, \text{ если } \omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing.$$

Рассмотрим семейство K как $*$-полугруппу, полагая

$$\omega_1\omega_2 = \omega_1 \cap \omega_2, \quad \omega^* = \omega, \quad \varepsilon = \Omega.$$

Покажем, что B_ω, рассматриваемая как функция, определенная на этой $*$-полугруппе, удовлетворяет условиям основной теоремы.