инвариантным при этом соответствии. Для любого $\alpha \in \Gamma$

$$D'_\alpha \sum_\xi D'_\xi g_\xi = \sum_\xi D'_{\alpha\xi} g_\xi = \sum_\zeta D'_\zeta g^\alpha_\zeta \leftrightarrow \sum_\zeta D''_\zeta g^\alpha_\zeta = \sum_\xi D''_{\alpha\xi} g_\xi = D''_\alpha \sum_\xi D''_\xi g_\xi$$

(см. Шеффер [1]), откуда видно, что $f' \leftrightarrow f''$ влечет за собой $D'_\alpha f' \leftrightarrow D''_\alpha f''$ для любых f', f'' вида (26), а следовательно, в силу непрерывности операторов D'_α, D''_α, и для любых $f' \in H'$ и $f'' \in H''$.

Следовательно, структуры $\{H', D'_\xi, \mathfrak{H}\}$ и $\{H'', D''_\xi, \mathfrak{H}\}$ *изоморфны.*

Это завершает доказательство теоремы.

§ 7. Доказательство теоремы Наймарка

Пусть $\{B_\lambda\}_{-\infty < \lambda < \infty}$ — обобщенное спектральное семейство в пространстве $\mathfrak{H}$. Положим $B_\infty = \lim\limits_{\lambda \to \infty} B_\lambda = I$ и $B_{-\infty} = \lim\limits_{\lambda \to -\infty} B_\lambda = 0$. Каждому полуоткрытому интервалу $\Delta = (a, b]$ (где $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$) поставим в соответствие оператор

$$B_\Delta = B_b - B_a,$$

а каждому множеству ω, состоящему из конечного числа непересекающихся интервалов Δ_i, — оператор

$$B_\omega = \sum_i B_{\Delta_i};$$

это определение не зависит, очевидно, от выбора разбиения множества ω. Для $\Omega = (-\infty, +\infty]$ имеем $B_\Omega = I$, а для пустого множества имеем $B_\varnothing = 0$. Семейство K всех таких множеств ω, включающее в себя также Ω и $\varnothing$, очевидно, замкнуто относительно операций вычитания двух множеств и объединения и пересечения конечного числа множеств. B_ω есть положительная и аддитивная функция множества, определенная на K; более точно, B_ω есть для каждого $\omega \in K$ самосопряженный оператор, такой, что

$$0 \leqslant B_\omega \leqslant I, \quad B_\varnothing = 0, \quad B_\Omega = I,$$
$$B_{\omega_1 \cup \omega_2} = B_{\omega_1} + B_{\omega_2}, \text{ если } \omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing.$$

Рассмотрим семейство K как $*$-полугруппу, полагая

$$\omega_1\omega_2 = \omega_1 \cap \omega_2, \quad \omega^* = \omega, \quad \varepsilon = \Omega.$$

Покажем, что B_ω, рассматриваемая как функция, определенная на этой $*$-полугруппе, удовлетворяет условиям основной теоремы.

Условие а) удовлетворяется очевидным образом. Условие б) означает, что для любых $\omega_1, \ldots, \omega_n \in K$ и $g_1, \ldots, g_n \in \mathfrak{H}$

$$s = \sum_i \sum_j (B_{\omega_i \cap \omega_j} g_i, g_j) \geqslant 0.$$

Чтобы доказать это неравенство, рассмотрим сначала пересечения

$$\pi = \omega_1^{\pm} \cap \omega_2^{\pm} \cap \ldots \cap \omega_n^{\pm} \ (\in K),$$

где можно каждый раз произвольно выбирать один из знаков $+$ или $-$, причем ω^+ означает само множество ω, а ω^- — его дополнение $\Omega \diagdown \omega$. Два пересечения π, соответствующие различным наборам знаков, очевидно, не имеют общих элементов. Каждое множество $\omega_i \cap \omega_j$ $(i \gtrless j)$ есть объединение некоторых π, а именно всех тех, которые получаются, если выбрать знак $+$ при ω_i и ω_j, т. е. тех, которые содержатся в $\omega_i \cap \omega_j$. В силу аддитивности B_ω как функции множества сумма s разлагается при этом в сумму слагаемых вида

$$(B_\pi g_j, g_i).$$

Объединим слагаемые, соответствующие *одному и тому же* π, в частичную сумму s_π; она распространяется на все пары индексов (i, j), для которых $\omega_i \cap \omega_j \supseteq \pi$, т. е. для которых одновременно $\omega_i \supseteq \pi$ и $\omega_j \supseteq \pi$. Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_r$ — те значения индекса i, при которых ω_i содержит фиксированное множество π; тогда

$$s_\pi = \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} (B_\pi g_{i_k}, g_{i_h}) = (B_\pi g, g), \quad \text{где } g = \sum_{h=1}^{r} g_{i_h}$$

и, следовательно, $s_\pi \geqslant 0$. Поскольку это верно для всех π, отсюда вытекает, что $s = \sum_\pi s_\pi \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Перейдем к условию в). Пусть ω — фиксированный элемент семейства K. Положим

$$\omega_i' = \omega_i \cap \omega^+, \quad \omega_i'' = \omega_i \cap \omega^- \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Применяя только что доказанное неравенство $s \geqslant 0$ к ω_i' и ω_i'' вместо ω_i, получим

$$s' = \sum_i \sum_j (B_{\omega_i' \cap \omega_j'} g_j, g_i) \geqslant 0, \quad s'' = \sum_i \sum_j (B_{\omega_i'' \cap \omega_j''} g_j, g_i) \geqslant 0.$$

Поскольку $\omega_i' \cap \omega_j'$ и $\omega_i'' \cap \omega_j''$ содержатся в непересекающихся множествах ω^+ и ω^-, они сами тоже не пересекаются, а так как их объединение равно $\omega_i \cap \omega_j$, из аддитивности B_ω вытекает, что $s = s' + s''$. Следовательно, $0 \leqslant s' \leqslant s$, т. е.

$$0 \leqslant \sum_i \sum_j (B_{\omega_i \cap \omega \cap \omega \cap \omega_j} g_j, g_i) \leqslant \sum_i \sum_j (B_{\omega_i \cap \omega_j} g_j, g_i).$$

Таким образом, условие в) выполняется с $C_\omega = 1$.

Теперь мы можем применить основную теорему, согласно которой в минимальном расширенном пространстве $\boldsymbol{H}$ существует представление $\{\boldsymbol{E}_\omega\}$ $*$-полугруппы K, такое, что

$$B_\omega = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{E}_\omega;$$

минимальность означает, что в $\boldsymbol{H}$ всюду плотны линейные комбинации элементов вида $\boldsymbol{E}_\omega f$, где $f \in \mathfrak{H}$, $\omega \in K$. Из структуры K как $*$-полугруппы вытекает, что $\boldsymbol{E}_\omega$ есть проекционный оператор, $\boldsymbol{E}_\Omega = \boldsymbol{I}$ и

$$\boldsymbol{E}_{\omega_1 \cap \omega_2} = \boldsymbol{E}_{\omega_1} \boldsymbol{E}_{\omega_2}. \tag{27}$$

Кроме того,

$$\boldsymbol{E}_{\omega_1 \cup \omega_2} = \boldsymbol{E}_{\omega_1} + \boldsymbol{E}_{\omega_2}, \quad \text{если } \omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing; \tag{28}$$

в силу утверждения 2) основной теоремы это вытекает из того, что, поскольку B_ω есть аддитивная функция ω, для любого $\omega \in K$ выполняется равенство

$$B_{(\omega_1 \cup \omega_2) \cap \omega} = B_{\omega_1 \cap \omega} + B_{\omega_2 \cap \omega}.$$

В частности, $\boldsymbol{E}_\varnothing = \boldsymbol{E}_{\varnothing \cup \varnothing} = \boldsymbol{E}_\varnothing + \boldsymbol{E}_\varnothing$, следовательно, $\boldsymbol{E}_\varnothing = \boldsymbol{O}$. Положим $\boldsymbol{E}_\lambda = \boldsymbol{E}_{(-\infty, \lambda]}$ для $-\infty < \lambda < \infty$. Поскольку $B_{(-\infty, \lambda]} = B_\lambda - B_{-\infty} = B_\lambda$, то

$$B_\lambda = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{E}_\lambda, \tag{29}$$

а в силу равенств (27) или (28)

$$\boldsymbol{E}_\lambda \leqslant \boldsymbol{E}_\mu \quad \text{при } \lambda < \mu.$$

Наконец, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}_\lambda \to \boldsymbol{E}_\mu && \text{при } \lambda \to \mu + 0; \\ &\boldsymbol{E}_\lambda \to \boldsymbol{E} = \boldsymbol{O} && \text{при } \lambda \to -\infty; \\ &\boldsymbol{E}_\lambda \to \boldsymbol{E}_\Omega = \boldsymbol{I} && \text{при } \lambda \to \infty\,^{1}), \end{aligned}$$

вытекающие в силу минимальности $\boldsymbol{H}$ из соотношений

$$\begin{aligned} &B_{(-\infty, \lambda] \cap \omega} \to B_{(-\infty, \mu] \cap \omega} && \text{при } \lambda \to \mu + 0; \\ &B_{(-\infty, \lambda] \cap \omega} \to \boldsymbol{O} = B_{\varnothing \cap \omega} && \text{при } \lambda \to -\infty; \\ &B_{(-\infty, \lambda] \cap \omega} \to B_\omega = B_{\Omega \cap \omega} && \text{при } \lambda \to \infty, \end{aligned}$$

справедливых при любом $\omega \in K$.

Таким образом, $\{\boldsymbol{E}_\lambda\}$ есть спектральное семейство в обычном смысле.

Поскольку каждый оператор $\boldsymbol{E}_\omega$ получается из $\boldsymbol{E}_\lambda$ взятием сумм и разностей или переходом к пределу ($\lambda \to \pm\infty$), пространство $\boldsymbol{H}$ минимально и относительно $\{\boldsymbol{E}_\lambda\}$ и структура $\{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}_\lambda, \mathfrak{H}\}$ определена с точностью до изоморфизма.

Этим завершается доказательство теоремы I. Аналогичным способом можно доказать следующую теорему, также принадлежащую Наймарку [2], [5]:

[1]) Для монотонной последовательности самосопряженных операторов слабый предел является в то же время и сильным, что вытекает из п. 104.

Теорема. *Пусть K есть семейство подмножеств ω множества Ω, содержащее само множество Ω и пустое множество $\varnothing$, замкнутое относительно операций вычитания двух множеств и объединения и пересечения конечного числа множеств. Пусть каждому $\omega \in K$ поставлен в соответствие самосопряженный оператор B_ω в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, такой, что*

$$0 \leqslant B_\omega \leqslant I;\quad B_\varnothing = 0;\quad B_\Omega = I;\quad B_{\omega_1 \cup \omega_2} = B_{\omega_1} + B_{\omega_2},\ \text{если } \omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing.$$

Тогда в некотором более широком пространстве $\boldsymbol{H}$ существует семейство $\{\boldsymbol{E}_\omega\}$ проекционных операторов, такое, что пространство $\boldsymbol{H}$ порождается элементами вида $\boldsymbol{E}_\omega f$ ($f \in \mathfrak{H}$, $\omega \in K$) и

$$B_\omega = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{E}_\omega;$$
$$\boldsymbol{E}_\varnothing = \boldsymbol{O};\quad \boldsymbol{E}_\Omega = \boldsymbol{I};\quad \boldsymbol{E}_{\omega_1 \cap \omega_2} = \boldsymbol{E}_{\omega_1} \boldsymbol{E}_{\omega_2}\ \text{для любых } \omega_1,\ \omega_2;$$
$$\boldsymbol{E}_{\omega_1 \cup \omega_2} = \boldsymbol{E}_{\omega_1} + \boldsymbol{E}_{\omega_2}\ \text{для непересекающихся } \omega_1,\ \omega_2.$$

§ 8. Доказательство теоремы о моментных последовательностях

В § 3 мы видели, как теорема II может быть получена из теоремы I Наймарка (кроме последних предложений теоремы II, которые, впрочем, могут быть без труда доказаны непосредственно). Мы увидим сейчас, что эта теорема непосредственно вытекает из нашей основной теоремы.

Пусть Г есть $*$-полугруппа всех неотрицательных целых чисел n со сложением в качестве „операции полугруппы" и тождественной операцией $n^* = n$ в качестве „операции $*$"; „единичным" элементом является, таким образом, число 0.

Всякое представление полугруппы Г имеет, очевидно, вид $\{\boldsymbol{A}^n\}$, где $\boldsymbol{A}$ — некоторый ограниченный самосопряженный оператор.

Покажем, что последовательность $\{A_n\}$ ($n = 0, 1, \ldots$), фигурирующая в теореме II, если рассматривать ее как функцию переменного элемента n $*$-полугруппы Г, удовлетворяет условиям основной теоремы. Относительно условия а) это очевидно, что же касается двух других, это можно доказать, воспользовавшись формулой

$$A_n = \int_{-M-0}^{M} \lambda^n \, dB_\lambda,$$

выведенной в § 3, где $\{B_\lambda\}$ — обобщенное спектральное семейство, заданное на интервале $[-M, M]$. Действительно, если $\{g_n\}$ ($n = 0, 1, \ldots$) — любая последовательность элементов из $\mathfrak{H}$, ко-