Теорема. *Пусть K есть семейство подмножеств ω множества Ω, содержащее само множество Ω и пустое множество $\varnothing$, замкнутое относительно операций вычитания двух множеств и объединения и пересечения конечного числа множеств. Пусть каждому $\omega \in K$ поставлен в соответствие самосопряженный оператор B_ω в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, такой, что*

$$0 \leqslant B_\omega \leqslant I; \quad B_\varnothing = 0; \quad B_\Omega = I; \quad B_{\omega_1 \cup \omega_2} = B_{\omega_1} + B_{\omega_2}, \text{ если } \omega_1 \cap \omega_2 = \varnothing.$$

Тогда в некотором более широком пространстве $\boldsymbol{H}$ существует семейство $\{\boldsymbol{E}_\omega\}$ проекционных операторов, такое, что пространство $\boldsymbol{H}$ порождается элементами вида $\boldsymbol{E}_\omega f$ ($f \in \mathfrak{H}$, $\omega \in K$) и

$$B_\omega = \operatorname{pr} \boldsymbol{E}_\omega;$$
$$\boldsymbol{E}_\varnothing = \boldsymbol{O}; \quad \boldsymbol{E}_\Omega = \boldsymbol{I}; \quad \boldsymbol{E}_{\omega_1 \cap \omega_2} = \boldsymbol{E}_{\omega_1} \boldsymbol{E}_{\omega_2} \text{ для любых } \omega_1, \omega_2;$$
$$\boldsymbol{E}_{\omega_1 \cup \omega_2} = \boldsymbol{E}_{\omega_1} + \boldsymbol{E}_{\omega_2} \text{ для непересекающихся } \omega_1, \omega_2.$$

§ 8. Доказательство теоремы о моментных последовательностях

В § 3 мы видели, как теорема II может быть получена из теоремы I Наймарка (кроме последних предложений теоремы II, которые, впрочем, могут быть без труда доказаны непосредственно). Мы увидим сейчас, что эта теорема непосредственно вытекает из нашей основной теоремы.

Пусть Γ есть $*$-полугруппа всех неотрицательных целых чисел n со сложением в качестве „операции полугруппы“ и тождественной операцией $n^* = n$ в качестве „операции $*$“; „единичным“ элементом является, таким образом, число 0.

Всякое представление полугруппы Γ имеет, очевидно, вид $\{\boldsymbol{A}^n\}$, где $\boldsymbol{A}$ — некоторый ограниченный самосопряженный оператор.

Покажем, что последовательность $\{A_n\}$ ($n = 0, 1, \ldots$), фигурирующая в теореме II, если рассматривать ее как функцию переменного элемента n $*$-полугруппы Γ, удовлетворяет условиям основной теоремы. Относительно условия а) это очевидно, что же касается двух других, это можно доказать, воспользовавшись формулой

$$A_n = \int_{-M-0}^{M} \lambda^n \, dB_\lambda,$$

выведенной в § 3, где $\{B_\lambda\}$ — обобщенное спектральное семейство, заданное на интервале $[-M, M]$. Действительно, если $\{g_n\}$ ($n = 0, 1, \ldots$) — любая последовательность элементов из $\mathfrak{H}$, которые почти все равны нулю, то

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(A_{i+k}g_k,\ g_i)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-M-0}^{M}\lambda^{i+k}d\,(B_\lambda g_k,\ g_i)=$$

$$=\int_{-M-0}^{M}(B\,(d\lambda)\,g\,(\lambda),\ g\,(\lambda))\geqslant 0,$$

где мы положили

$$g\,(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i g_i$$

и где $B(\Delta)$ означает положительную и аддитивную функцию интервала, порожденную семейством B_λ, т. е. $B(\Delta)=B_b-B_a$ для $\Delta=(a,\ b]$. Далее, для $r=0,\ 1,\ \ldots$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(A_{i+2r+k}g_k,\ g_i)=\int_{-M-0}^{M}\lambda^{2r}\,(B\,(d\lambda)\,g\,(\lambda),\ g\,(\lambda))\leqslant$$

$$\leqslant M^{2r}\int_{-M-0}^{M}(B\,(d\lambda)g(\lambda),\ g(\lambda))=M^{2r}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(A_{i+k}g_k,\ g_i).$$

Таким образом, условия б) и в) тоже выполнены, так что можно применить основную теорему, что и дает доказательство теоремы II.

§ 9. Доказательство теорем о сжатиях

Доказательство теоремы III. Пусть Γ — аддитивная группа всех целых чисел n. Тогда всякое представление Γ имеет вид $\{U^n\}$, где U — унитарный оператор.

Пусть T — сжатие пространства $\mathfrak{H}$. Положим

$$T_n=\begin{cases}T^n \text{ при } n=0,\ 1,\ \ldots\\ T^{*|n|} \text{ при } n=-1,\ -2,\ \ldots;\end{cases}\tag{30}$$

очевидно, $T_0=I$ и $T_{-n}=T_n^*$. Покажем, что T_n, рассматриваемая как функция, определенная иа группе Γ, является положительно определенной, т. е. что

$$\sum_m\sum_n(T_{n-m}g_n,\ g_m)\geqslant 0\tag{31}$$

для любой последовательиости $\{g_n\}_{-\infty}^{\infty}$ элементов пространства $g_n\in\mathfrak{H}$, которые почти все равны нулю.

Рассмотрим сначала случай *комплексного* пространства $\mathfrak{H}$. Положим при $0\leqslant r<1$ и $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$

$$T\,(r,\ \varphi)=\sum_{-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in\varphi}T_n;\tag{32}$$