торые почти все равны нулю, то

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(A_{i+k}g_k, g_i)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-M-0}^{M}\lambda^{i+k}d(B_\lambda g_k, g_i)=$$
$$=\int_{-M-0}^{M}(B(d\lambda)g(\lambda), g(\lambda))\geqslant 0,$$

где мы положили

$$g(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i g_i$$

и где $B(\Delta)$ означает положительную и аддитивную функцию интервала, порожденную семейством B_λ, т. е. $B(\Delta)=B_b-B_a$ для $\Delta=(a, b]$. Далее, для $r=0, 1, \ldots$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(A_{i+2r+k}g_k, g_i)=\int_{-M-0}^{M}\lambda^{2r}(B(d\lambda)g(\lambda), g(\lambda))\leqslant$$
$$\leqslant M^{2r}\int_{-M-0}^{M}(B(d\lambda)g(\lambda), g(\lambda))=M^{2r}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(A_{i+k}g_k, g_i).$$

Таким образом, условия б) и в) тоже выполнены, так что можно применить основную теорему, что и дает доказательство теоремы II.

§ 9. Доказательство теорем о сжатиях

Доказательство теоремы III. Пусть Γ — аддитивная группа всех целых чисел n. Тогда всякое представление Γ имеет вид $\{U^n\}$, где U — унитарный оператор.

Пусть T — сжатие пространства $\mathfrak{H}$. Положим

$$T_n=\begin{cases} T^n \text{ при } n=0, 1, \ldots \\ T^{*|n|} \text{ при } n=-1, -2, \ldots; \end{cases} \tag{30}$$

очевидно, $T_0=I$ и $T_{-n}=T_n^*$. Покажем, что T_n, рассматриваемая как функция, определенная иа группе Γ, является положительно определенной, т. е. что

$$\sum_m\sum_n(T_{n-m}g_n, g_m)\geqslant 0 \tag{31}$$

для любой последовательиости $\{g_n\}_{-\infty}^{\infty}$ элементов пространства $g_n\in\mathfrak{H}$, которые почти все равны нулю.

Рассмотрим сначала случай *комплексного* пространства $\mathfrak{H}$. Положим при $0\leqslant r<1$ и $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$

$$T(r, \varphi)=\sum_{-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{in\varphi}T_n; \tag{32}$$

в силу условия $\|T_n\| \leqslant 1$ этот ряд сходится по норме. Полагая $z = re^{i\varphi}$, мы получим, что

$$T(r, \varphi) = \left(\frac{1}{2} I + \sum_1^\infty z^n T^n\right) + \left(\frac{1}{2} I + \sum_1^\infty \bar{z}^n T^{*n}\right) =$$
$$= 2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} I + \sum_1^\infty z^n T^n\right) = \operatorname{Re}(I + zT)(I - zT)^{-1}.$$

Следовательно, для $f \in \mathfrak{H}$ и $g = (I - zT)^{-1} f$

$$\begin{aligned}(T(r, \varphi) f, f) &= \operatorname{Re}((I + zT)(I - zT)^{-1} f, f) = \\ &= \operatorname{Re}((I + zT) g, (I - zT) g) = \operatorname{Re}[(g, g) + z(Tg, g) - \\ &\quad - \bar{z}(g, Tg) - z\bar{z}(Tg, Tg)] = \|g\|^2 - |z|^2 \|Tg\|^2 \geqslant 0, \end{aligned} \qquad (33)$$

поскольку $|z| < 1$, $\|T\| \leqslant 1$. Это справедливо для любого $f \in \mathfrak{H}$, в частности, имеет место неравенство

$$p(r, \varphi) = (T(r, \varphi) f(\varphi), f(\varphi)) \geqslant 0, \qquad (34)$$

где

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\varphi} g_n,$$

а $\{g_n\}$ — последовательность, фигурирующая в неравенстве (31). Подставляя в формулу (34) вместо $T(r, \varphi)$ и $f(\varphi)$ их разложения в ряды, мы получаем, что

$$p(r, \varphi) = \sum_{k, m, n} r^{|k|} e^{i(k+m-n)\varphi} (T_k g_n, g_m) =$$
$$= \sum_l e^{il\varphi} \sum_{m, n} r^{|l+n-m|} (T_{l+n-m} g_n, g_m) \geqslant 0,$$

откуда

$$\sum_{m, n} r^{|n-m|} (T_{n-m} g_n, g_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \varphi)\, d\varphi \geqslant 0.$$

Неравенство (31) получается отсюда, если устремить r к единице.

Случай действительного пространства $\mathfrak{H}$ может быть сведен к случаю комплексного пространства, если ввести пространство $\mathfrak{H}_c$ пар $\{g, h\}$, $g, h \in \mathfrak{H}$, в котором основные операции определены следующим образом:

$$\{g, h\} + \{g', h'\} = \{g + g', h + h'\},$$
$$(a + ib)\{g, h\} = \{ag - bh, bg + ah\}$$

(a и b — действительные числа),

$$(\{g, h\}, \{g', h'\}) = (g, g') + (h, h') + i(h, g') - i(g, h'),$$
$$\|\{g, h\}\|^2 = (\{g, h\}, \{g, h\}) = \|g\|^2 + \|h\|^2;$$

легко проверить, что при этом определении основных операций $\mathfrak{H}_c$ — комплексное гильбертово пространство. Оператор

$$\overline{T}\{g, h\} = \{Tg, Th\}$$

есть сжатие в пространстве $\mathfrak{H}_c$; действительно, он, с одной стороны, линеен:

$$\overline{T}\{g+g', h+h'\} = \{T(g+g'), T(h+h')\} =$$
$$= \{Tg, Th\} + \{Tg', Th'\} = \overline{T}\{g, h\} + \overline{T}\{g', h'\},$$
$$\overline{T}(a+ib)\{g, h\} = \overline{T}\{ag-bh, bg+ah\} =$$
$$= \{aTg-bTh, bTg+aTh\} = (a+ib)\{Tg, Th\} = (a+ib)\overline{T}\{g, h\},$$

а, с другой стороны,

$$\|\overline{T}\{g, h\}\|^2 = \|\{Tg, Th\}\|^2 = \|Tg\|^2 + \|Th\|^2 \leqslant \|g\|^2 + \|h\|^2 = \|\{g, h\}\|^2.$$

Легко также видеть, что

$$\overline{T}^*\{g, h\} = \{T^*g, T^*h\}.$$

Отсюда следует, что

$$\overline{T}^n\{g, h\} = \{T^n g, T^n h\} \quad \text{и} \quad \overline{T}^{*n}\{g, h\} = \{T^{*n} g, T^{*n} h\}$$

при $n = 0, 1, 2, \ldots$, т. е.

$$\overline{T}_n\{g, h\} = \{T_n g, T_n h\}$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Поскольку неравенство (31) уже доказано для комплексных пространств, имеем

$$\sum_m \sum_n (\overline{T}_{n-m}\varphi_n, \varphi_m) \geqslant 0 \tag{35}$$

для $\varphi_n = \{g_n, h_n\}$ (где $g_n = 0$ и $h_n = 0$ для почти всех n). Если положить теперь $h_n = 0$ *для всех* n, то

$$(\overline{T}_{n-m}\varphi_n, \varphi_m) = (T_{n-m}g_n, g_m)$$

и неравенство (35) сводится к неравенству (31), которое оказывается, таким образом, доказанным и в случае действительного пространства $\mathfrak{H}$.

Теперь можно применить основную теорему, и теорема III доказана.

Доказательство теоремы IV. Пусть теперь Г — аддитивная группа всех действительных чисел t. Тогда представлениями Г являются однопараметрические группы $\{U_t\}$ унитарных операторов.

Пусть $\{T_t\}_{t \geqslant 0}$ — однопараметрическая полугруппа сжатий, фигурирующая в теореме. Для $t < 0$ положим

$$T_{-t} = T_t^*.$$

Тогда T_t будет слабо непрерывной функцией t при $-\infty < t < \infty$ и

$$T_0 = I, \quad T_{-t} = T_t^* \text{ для } -\infty < t < \infty.$$

Покажем, что T_t — положительно определенная функция на Γ, т. е. что

$$\sum_s \sum_t (T_{t-s} h_t, h_s) \geqslant 0 \tag{36}$$

для любого семейства $\{h_t\}$ элементов из $\mathfrak{H}$, такого, что $h_t = 0$ для почти всех значений t.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_r$ — те значения t, для которых $h_t \neq 0$. Для каждого t_n $(n = 1, \ldots, r)$ выберем последовательность рациональных чисел $t_{n\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к t_n, таким образом, чтобы для любого фиксированного индекса ν числа $t_{n\nu}$ $(n = 1, 2, \ldots, r)$ были все различны. Поскольку T_t есть слабо непрерывная функция t, мы получим, полагая $f_n = h_{t_n}$ $(n = 1, 2, \ldots, r)$, что

$$\sum_s \sum_t (T_{t-s} h_t, h_s) = \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} (T_{t_n - t_m} f_n, f_m) =$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} (T_{t_{n\nu} - t_{m\nu}} f_n, f_m). \tag{37}$$

При любом фиксированном ν рациональные числа $t_{n\nu}$ $(n = 1, \ldots$ $\ldots, r)$ соизмеримы, т. е. их можно записать в виде

$$t_{n\nu} = \tau_{n\nu} d_\nu,$$

где $d_\nu > 0$, а $\tau_{n\nu}$ — попарно различные целые числа. Тогда

$$T_{t_{n\nu} - t_{m\nu}} = T_{(\tau_{n\nu} - \tau_{m\nu}) d_\nu} = \begin{cases} (T_{d_\nu})^{\tau_{n\nu} - \tau_{m\nu}}, & \text{если } \tau_{n\nu} \geqslant \tau_{m\nu}, \\ (T_{d_\nu}^*)^{\tau_{m\nu} - \tau_{n\nu}}, & \text{если } \tau_{n\nu} \leqslant \tau_{m\nu}, \end{cases}$$

так что

$$\sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} (T_{t_{n\nu} - t_{m\nu}} f_n, f_m) = \sum_{m=1}^{r} \sum_{n=1}^{r} (T^{(\nu)}_{\tau_{n\nu} - \tau_{m\nu}} f_n, f_m), \tag{38}$$

где $T_n^{(\nu)}$ определяется аналогично (30), исходя из оператора $T^{(\nu)} = T_{d_\nu}$. Поскольку этот оператор является сжатием, для него выполняется неравенство (31); выбирая в нем элементы g_n так, чтобы

$g_n = f_p$, если $n = \tau_{p\nu}$,

$g_n = 0$, если n не равно ни одному из $\tau_{q\nu}$ $(q = 1, 2, \ldots, r)$,

мы сделаем левую часть неравенства (31) равной правой части равенства (38), которая, следовательно, неотрицательна, причем это имеет место при любом фиксированном значении ν. В силу (37) отсюда следует неравенство (36).

Поэтому можно применить к $\{T_t\}$ основную теорему; мы получим, что

$$T_t = \mathrm{pr}\, \boldsymbol{U}_t,$$

и в случае, когда пространство $\boldsymbol{H}$ минимально, структура $\{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{U}_t, \mathfrak{H}\}$ определена с точностью до изоморфизма. В этом случае $\boldsymbol{U}_t$ является тоже слабо (а следовательно, и сильно) непрерывной функцией t. Это следует из утверждения 3) основной теоремы и того очевидного факта, что при любом фиксированном t_0 T_{t+t_0} есть слабо непрерывная функция t.

Этим завершается доказательство теоремы IV.

Доказательство теоремы V. В качестве Γ выберем теперь группу всех „векторов" $\boldsymbol{n} = \{n^{(\rho)}\}_{\rho \in R}$, компоненты которых целые числа, почти все равные нулю. Пусть $\{T^{(\rho)}\}_{\rho \in R}$ — заданная система дважды перестановочных друг с другом сжатий. Положим

$$T_{\boldsymbol{n}} = \prod_{\rho \in R} T^{(\rho)}_{n^{(\rho)}}, \tag{39}$$

где $T^{(\rho)}_n$ определяется по аналогии с (30). Поскольку $n^{(\rho)} = 0$ для почти всех ρ, почти все множители в произведении (39) равны I, так что это произведение имеет смысл и в том случае, когда множество R бесконечно. Существенно, что в силу двойной перестановочности операторов $T^{(\rho)}$ все множители в произведении (39) перестановочны между собой.

Очевидно, $T_{\boldsymbol{o}} = I$, $T_{-\boldsymbol{n}} = T^*_{\boldsymbol{n}}$, где $\boldsymbol{o}$ обозначает вектор со всеми нулевыми компонентами.

Остается показать, что $T_{\boldsymbol{n}}$, рассматриваемая как функция на группе Γ, является положительно определенной, т. е. что

$$\sum_{\boldsymbol{m}} \sum_{\boldsymbol{n}} (T_{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}} g_{\boldsymbol{n}}, g_{\boldsymbol{m}}) \geqslant 0 \tag{40}$$

для любого семейства $\{g_{\boldsymbol{n}}\}$ элементов из $\mathfrak{H}$, такого, что $g_{\boldsymbol{n}} = 0$, для почти всех $\boldsymbol{n} \in \Gamma$.

Если рассматривать только те векторы $\boldsymbol{n}$, для которых $g_{\boldsymbol{n}} \neq 0$, то существует конечное число индексов ρ, пусть это будут ρ_1, ρ_2, ..., ρ_r, таких, что все компоненты векторов $\boldsymbol{n}$, имеющие индекс, отличный от них, равны нулю. Поскольку в произведении (39) множители с $n^{(\rho)} = 0$ могут быть опущены, достаточно рассмотреть суммы вида

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_r=-\infty}^{\infty} (T^{(1)}_{n_1-m_1} \cdots T^{(r)}_{n_r-m_r} g_{n_1 \ldots n_r}, g_{m_1, \ldots, m_r}), \tag{41}$$

где для удобства записи $T^{(\rho_i)}$ обозначено через $T^{(i)}$, В случае комплексного пространства $\mathfrak{H}$ можно рассуждать следующим образом. Положим для $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 2\pi$

$$T(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_r) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_r=-\infty}^{\infty} r^{|n_1|+\ldots+|n_r|} \times$$
$$\times e^{i(n_1\varphi_1+\ldots+n_r\varphi_r)} T_{n_1}^{(1)} \ldots T_{n_r}^{(r)} = \prod_{i=1}^{r} T^{(i)}(r, \varphi_i),$$

где множители в последнем члене имеют смысл, аналогичный (32). Поскольку эти множители, согласно (33), положительны и перестановочны между собой, их произведение тоже положительно. В частности,

$$(T(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_r) g(\varphi_1, \ldots, \varphi_r), \quad g(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)) \geqslant 0,$$

где

$$g(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_r=-\infty}^{\infty} e^{-i(n_1\varphi_1+\ldots+n_r\varphi_r)} g_{n_1, \ldots, n_r}.$$

Интегрируя по каждой переменной φ_i от 0 до 2π и устремляя затем r к 1, мы получим, что сумма (41) неотрицательна.

Тем самым неравенство (40) доказано для случая комплексного пространства. Случай действительного пространства может быть сведен к рассмотренному таким же образом, как при доказательстве теоремы III.

Теперь можно применить основную теорему. Чтобы получить теорему V, остается лишь заметить, что всякое представление $\{U_n\}$ группы Γ имеет вид

$$U_n = \prod_{\rho \in R} [U_{n^{(\rho)}}^{(\rho)}] \quad (n = \{n^{(\rho)}\}),$$

где $\{U^{(\rho)}\}_{\rho \in R}$ — система перестановочных унитарных операторов. Это следует из того, что n может быть записано в виде

$$n = \sum_{\rho \in R} n^{(\rho)} e_\rho,$$

где e_ρ обозначает ρ-й базисный вектор, т. е. вектор, у которого компонента с индексом ρ равна единице, а остальные — нулю; остается положить

$$U^{(\rho)} = U_{e_\rho}.$$

§ 10. Доказательство теоремы о нормальных продолжениях

Пусть теперь Γ — $*$-полугруппа, составленная из упорядоченных пар $\pi = \{i, j\}$ неотрицательных целых чисел. Операция полугруппы задается равенством

$$\pi + \pi' = \{i, j\} + \{i', j'\} = \{i + i', j + j'\},$$