В случае комплексного пространства $\mathfrak{H}$ можно рассуждать следующим образом. Положим для $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 2\pi$

$$T(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_r) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{n_r=-\infty}^{\infty} r^{|n_1|+\ldots+|n_r|} \times$$
$$\times e^{i(n_1\varphi_1+\ldots+n_r\varphi_r)} T^{(1)}_{n_1} \ldots T^{(r)}_{n_r} = \prod_{i=1}^{r} T^{(i)}(r, \varphi_i),$$

где множители в последнем члене имеют смысл, аналогичный (32). Поскольку эти множители, согласно (33), положительны и перестановочны между собой, их произведение тоже положительно. В частности,

$$(T(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_r) g(\varphi_1, \ldots, \varphi_r), \quad g(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)) \geqslant 0,$$

где

$$g(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{n_r=-\infty}^{\infty} e^{-i(n_1\varphi_1+\ldots+n_r\varphi_r)} g_{n_1, \ldots, n_r}.$$

Интегрируя по каждой переменной φ_i от 0 до 2π и устремляя затем r к 1, мы получим, что сумма (41) неотрицательна.

Тем самым неравенство (40) доказано для случая комплексного пространства. Случай действительного пространства может быть сведен к рассмотренному таким же образом, как при доказательстве теоремы III.

Теперь можно применить основную теорему. Чтобы получить теорему V, остается лишь заметить, что всякое представление $\{U_n\}$ группы Γ имеет вид

$$U_n = \prod_{\rho \in R} [U^{(\rho)}_{n^{(\rho)}}] \quad (n = \{n^{(\rho)}\}),$$

где $\{U^{(\rho)}\}_{\rho \in R}$ — система перестановочных унитарных операторов. Это следует из того, что n может быть записано в виде

$$n = \sum_{\rho \in R} n^{(\rho)} e_\rho,$$

где e_ρ обозначает ρ-й базисный вектор, т. е. вектор, у которого компонента с индексом ρ равна единице, а остальные — нулю; остается положить

$$U^{(\rho)} = U_{e_\rho}.$$

§ 10. Доказательство теоремы о нормальных продолжениях

Пусть теперь Γ — $*$-полугруппа, составленная из упорядоченных пар $\pi = \{i, j\}$ неотрицательных целых чисел. Операция полугруппы задается равенством

$$\pi + \pi' = \{i, j\} + \{i', j'\} = \{i + i', j + j'\},$$

а операция $*$ — равенством

$$\pi^* = \{i, j\}^* = \{j, i\};$$

„единичным" элементом является

$$\varepsilon = \{0, 0\}.$$

Пусть $\{D_\pi\}$ — представление полугруппы Г. Так как операция полугруппы коммутативна на Г, операторы D_π *нормальны* и дважды перестановочны друг с другом.

Полагая $\pi_0 = \{0, 1\}$, можно любой элемент $\pi = \{i, j\}$ записать в виде

$$\pi = i\pi_0^* + j\pi_0$$

и, следовательно,

$$D_\pi = N^{*i}N^j,$$

где

$$N = D_{\pi_0}.$$

Пусть T — линейный ограниченный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий условиям теоремы VI:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (T^i g_j, T^j g_i) \geqslant 0, \tag{42}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (T^{i+1} g_j, T^{j+1} g_i) \leqslant C^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (T^i g_j, T^j g_i) \quad (C > 0). \tag{43}$$

Покажем, что оператор

$$T_{\{i, j\}} = T^{*i}T^j,$$

рассматриваемый как функция, определенная на $*$-полугруппе Г, удовлетворяет условиям основной теоремы.

Прежде всего, очевидно, $T_\varepsilon = I$, $T_{\pi^*} = T_\pi^*$. Докажем, что T_π — положительно определенная функция на Г. Пусть $\{g_\pi\}$ — семейство элементов из $\mathfrak{H}$, которые почти все равны нулю; рассмотрим сумму

$$s = \sum_\pi \sum_{\pi'} (T_{\pi^* + \pi'} g_{\pi'}, g_\pi),$$

где $\pi = \{i, j\}$ и $\pi' = \{i', j'\}$ пробегают элементы полугруппы Г. Легко видеть, что

$$s = \sum_\pi \sum_{\pi'} ((T^*)^{i'+j} T^{i+j'} g_{\pi'}, g_\pi) = \sum_i \sum_{i'} (T^i h_{i'}, T^{i'} h_i),$$

где

$$h_i = \sum_j T^j g_{\{i, j\}}.$$

В силу (42) отсюда следует, что $s \geqslant 0$, так что T_π является положительно определенной функцией π.

Точно так же для фиксированного $\pi_0=\{i_0, j_0\}$, воспользовавшись i_0+j_0 раз неравенством (43), получим, что

$$\sum_{\pi}\sum_{\pi'}\left(T_{\pi^*+\pi_0^*+\pi_0+\pi'}g_{\pi'}, g_{\pi}\right)=\sum_{i}\sum_{i'}(T^{i_0+j_0+i}h_{i'}, T^{i_0+j_0+i'}h_i)\leqslant$$
$$\leqslant C^{2(i_0+j_0)}\sum_{i}\sum_{i'}(T^ih_{i'}, T^{i'}h_i)=C^{2(i_0+j_0)}\sum_{\pi}\sum_{\pi'}(T_{\pi^*+\pi'}g_{\pi'}, g_{\pi}).$$

Условия а)—в) основной теоремы оказываются, таким образом, выполненными. Применяя эту теорему, мы получим, что в более широком пространстве H существует нормальный ограниченный оператор N (с $\|N\|\leqslant C$), такой, что

$$T^{*i}T^j=\operatorname{pr}N^{*i}N^j \quad (i,\ j=0,\ 1,\ \ldots),$$

или, что то же самое, что

$$T\subseteq N$$

(см. § 5). Если пространство H минимально в том смысле, что в нем всюду плотны линейные комбинации элементов вида $N^{*i}N^jf$ $(f\in\mathfrak{H})$, то это будет верно и для элементов $N^{*i}f$, так как $N^jf\in\mathfrak{H}$ при $f\in\mathfrak{H}$.

Этим завершается доказательство теоремы VI.

ДОПОЛНЕНИЕ

Это добавление было написано в августе 1954 г. и в сокращенной форме доложено на римановской юбилейной сессии 14 октября 1954 г. в Берлине. С тех пор автору стали известны некоторые результаты, о которых здесь следует упомянуть.

1. Жюлиа [1—3] еще в 1944 г. доказал следующее. Для всякого сжатия T гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ существует гильбертово пространство H, содержащее $\mathfrak{H}$, и изометричное отображение V пространства $\mathfrak{H}$ на некоторое подпространство $\mathfrak{K}=V\mathfrak{H}$ пространства H, такие, что для любого $f\in\mathfrak{H}$ справедливо равенство $Tf=P_{\mathfrak{H}}Vf$. Для доказательства достаточно построить пространство $H=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$ и положить

$$V\{f,\ 0\}=\{Tf,\ (I-T^*T)^{1/2}f\}.$$

Действительно, тогда $P_{\mathfrak{H}}V\{f,\ 0\}=\{Tf,\ 0\}$ и

$$\|V\{f,\ 0\}\|^2=\|Tf\|^2+\|(I-T^*T)^{1/2}f\|^2=(T^*Tf,\ f)+((I-T^*T)f,\ f)=$$
$$=(f,\ f)=\|\{f,\ 0\}\|^2.$$

От этой теоремы легко перейти к представлению $T=\operatorname{pr}U$ с унитарным U. Действительно, если ортогональные дополнения $H_1=H\ominus\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{K}_1=H\ominus\mathfrak{K}$ имеют одинаковую размерность, то выберем какое-нибудь изометричное отображение W подпространства H_1 на $\mathfrak{K}_1$ (например, с помощью двух полных ортонормальных систем); операторы V и W определяют изометричное