Точно так же для фиксированного $\pi_0 = \{i_0, j_0\}$, воспользовавшись $i_0 + j_0$ раз неравенством (43), получим, что

$$\sum_{\pi}\sum_{\pi'}\left(T_{\pi^* + \pi_0^* + \pi_0 + \pi'} g_{\pi'}, g_\pi\right) = \sum_{i}\sum_{i'}(T^{i_0 + j_0 + i} h_{i'}, T^{i_0 + j_0 + i'} h_i) \leqslant$$

$$\leqslant C^{2(i_0 + j_0)} \sum_{i}\sum_{i'}(T^i h_{i'}, T^{i'} h_i) = C^{2(i_0 + j_0)} \sum_{\pi}\sum_{\pi'}(T_{\pi^* + \pi'} g_{\pi'}, g_\pi).$$

Условия а) — в) основной теоремы оказываются, таким образом, выполненными. Применяя эту теорему, мы получим, что в более широком пространстве H существует нормальный ограниченный оператор N (с $\|N\| \leqslant C$), такой, что

$$T^{*i} T^j = \mathrm{pr}\, N^{*i} N^j \quad (i, j = 0, 1, \ldots),$$

или, что то же самое, что

$$T \subseteq N$$

(см. § 5). Если пространство H минимально в том смысле, что в нем всюду плотны линейные комбинации элементов вида $N^{*i} N^j f$ $(f \in \mathfrak{H})$, то это будет верно и для элементов $N^{*i} f$, так как $N^j f \in \mathfrak{H}$ при $f \in \mathfrak{H}$.

Этим завершается доказательство теоремы VI.

ДОПОЛНЕНИЕ

Это добавление было написано в августе 1954 г. и в сокращенной форме доложено на римановской юбилейной сессии 14 октября 1954 г. в Берлине. С тех пор автору стали известны некоторые результаты, о которых здесь следует упомянуть.

1. Жюлиа [1—3] еще в 1944 г. доказал следующее. Для всякого сжатия T гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ существует гильбертово пространство H, содержащее $\mathfrak{H}$, и изометричное отображение V пространства $\mathfrak{H}$ на некоторое подпространство $\mathfrak{K} = V\mathfrak{H}$ пространства H, такие, что для любого $f \in \mathfrak{H}$ справедливо равенство $Tf = P_{\mathfrak{H}} V f$. Для доказательства достаточно построить пространство $H = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ и положить

$$V\{f, 0\} = \{Tf, (I - T^*T)^{1/2} f\}.$$

Действительно, тогда $P_{\mathfrak{H}} V\{f, 0\} = \{Tf, 0\}$ и

$$\|V\{f, 0\}\|^2 = \|Tf\|^2 + \|(I - T^*T)^{1/2} f\|^2 = (T^*Tf, f) + ((I - T^*T) f, f) =$$
$$= (f, f) = \|\{f, 0\}\|^2.$$

От этой теоремы легко перейти к представлению $T = \mathrm{pr}\, U$ с унитарным U. Действительно, если ортогональные дополнения $H_1 = H \ominus \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{K}_1 = H \ominus \mathfrak{K}$ имеют одинаковую размерность, то выберем какое-нибудь изометричное отображение W подпространства H_1 на $\mathfrak{K}_1$ (например, с помощью двух полных ортонормальных систем); операторы V и W определяют изометричное отображение U пространства H на себя, т. е. унитарный оператор. Оператор U удовлетворяет, очевидно, соотношению $T = \operatorname{pr} U$. Если же размерности H_1 и $\mathfrak{K}_1$ различны, то можно заменить H расширенным пространством H', таким, чтобы подпространства $H' \ominus \mathfrak{H}$ и $H' \ominus \mathfrak{K}$ имели одинаковую размерность, и свести этот случай к предыдущему.

2. В § 4 мы построили унитарный оператор U с помощью матричной конструкции таким образом, что равенство $T^n = \operatorname{pr} U^n$ выполнялось для заданного числа степеней сжатия T. Шефферу [1] удалось с помощью аналогичной матричной конструкции получить подобное представление для всех степеней $n = 0, 1, 2, \ldots$ (см. теорему III). Рассмотрим для этого пространство

$$H = \ldots \oplus \mathfrak{H}_{-1} \oplus \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1 \oplus \ldots,$$

где $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}$ для всех n, состоящее из последовательностей $f = \{f_n\}$, $f_n \in \mathfrak{H}_n$, для которых $\|f\|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} \|f_n\|^2 < \infty$; H—гильбертово пространство, в которое можно погрузить $\mathfrak{H}$ как подпространство, отождествив его с $\mathfrak{H}_0$. Всякий ограниченный линейный оператор T в H можно представить с помощью матрицы $\{T_{ik}\}$ $(-\infty < i, k < \infty)$, и соотношение $T = \operatorname{pr} T$ имеет место тогда и только тогда, когда $T_{00} = T$. Рассмотрим теперь оператор $U = \{U_{ik}\}$, где $U_{00} = T$, $U_{01} = S$, $U_{-1,0} = -Z$, $U_{-1,1} = T^*$, $U_{n,n+1} = I$ $(n \neq -1, 0)$, а для остальных i, k $U_{ik} = O$; операторы S и Z здесь те же, что в § 4. Вычисляя матричные произведения U^*U и UU^* и учитывая равенство (12), можно убедиться, что оператор U унитарен. Элемент матрицы U^n с индексами $\{0, 0\}$ равен T^n: это просто следует из того, что у матрицы оператора U под диагональю стоят одни нули. Тем самым все доказано; разумеется, полученное таким образом расширенное пространство не обязательно минимально.

Заметим, что приведенная конструкция обладает еще одним свойством. Если каждому сжатию T пространства $\mathfrak{H}$ поставить в соответствие построенный с ее помощью унитарный оператор $U = U_T$ в фиксированном пространстве H, то соотношение $T = \operatorname{pr} U_T$ оказывается мультипликативным в том смысле, что для любых (не обязательно различных) сжатий T_i справедливо равенство

$$T_1^{n_1} T_2^{n_2} \ldots T_r^{n_r} = \operatorname{pr} U_{T_1}^{n_1} U_{T_2}^{n_2} \ldots U_{T_r}^{n_r} \quad (n_i \geqslant 0);$$

это опять следует из того, что под главной диагональю матриц U_{T_i} стоят нули. Однако операторы U_{T_1} и U_{T_2} не обязательно перестановочны даже в том случае, когда T_1 и T_2 дважды перестановочны.

3. В теореме VI и § 5 были приведены условия (15) и (16) того, что линейный ограниченный оператор T в гильбертовом

пространстве $\mathfrak{H}$ имеет нормальное продолжение $\boldsymbol{N}$. Браму [1] удалось доказать, что условие (15) следует из (16). Для доказательства он воспользовался частным случаем теоремы Лёвнера и Хайнца о монотонных операторных функциях, а именно теоремой о том, что для двух ограниченных положительных самосопряженных операторов A, B из $A^2 \geqslant B^2$ следует $A \geqslant B$ (см. Хайнц [1]).

Итак, пусть для оператора T выполнено условие (15). Без ограничения общности можно положить $\|T\| \leqslant 1$. Пусть $\boldsymbol{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \oplus \mathfrak{H}_1 \oplus \ldots$, где $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}$ для всех n. Рассмотрим линейные операторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в пространстве $\boldsymbol{H}$ с матрицами $\{A_{ik}\}$, $\{B_{ik}\}$, $A_{ik} = T^{*k}T^i$, $B_{ik} = T^{*(k+1)}T^{i+1}$ (i, $k = 0, 1, \ldots$). Из условия $\|T\| < 1$ легко следует, что $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ ограничены; их самосопряженность следует непосредственно из определения, а условие (15) означает, что $\boldsymbol{A} \geqslant 0$, $\boldsymbol{B} \geqslant 0$. Для $\boldsymbol{f} = \{f_k\} \in \mathfrak{H}$ имеем

$$\|\boldsymbol{B}\boldsymbol{f}\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} B_{ik} f_k \right\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} T^{*(k+1)} T^{i+1} f_k \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|T^*\|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} T^{*k} T^j f_k \right\|^2 \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} T^{*k} T^j f_k \right\|^2 = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}\|^2;$$

таким образом, $\boldsymbol{B}^2 \leqslant \boldsymbol{A}^2$ и, следовательно, $\boldsymbol{B} \leqslant \boldsymbol{A}$. А это неравенство есть не что иное, как условие (16) (при $C = 1$).

4. Пусть Γ — $*$-полугруппа и $\{T_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ — семейство линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (см. § 6). Об этом семействе операторов сначала будем предполагать только, что $T_{\xi^*} = (T_\xi)^*$ и

$$\sum_{\xi, \eta \in \Gamma} (T_{\xi^*\eta} g_\eta, g_\xi) \geqslant 0$$

на каждом семействе $\{g_\xi\}_{\xi \in \Gamma}$ элементов пространства $\mathfrak{H}$ „с конечным носителем" (т. е. $g_\xi = 0$ для почти всех $\xi \in \Gamma$). Такие семейства элементов образуют линейное пространство и

$$\langle \{g\}, \{g'\} \rangle = \sum_{\xi, \eta \in \Gamma} (T_{\xi^*\eta} g_\eta, g'_\xi) \tag{44}$$

— эрмитово-симметричная, положительно полуопределенная форма в этом пространстве. Следовательно, справедливо неравенство типа неравенства Шварца

$$|\langle \{g\}, \{g'\} \rangle|^2 \leqslant \langle \{g\}, \{g\} \rangle \langle \{g'\}, \{g'\} \rangle. \tag{45}$$

Зафиксируем некоторый самосопряженный элемент $\omega \in \Gamma$ (т. е. такой, что $\omega^* = \omega$) и каждому $\{g\}$ поставим в соответствие семейство $\{g^\omega\}$ элементов (также с конечным носителем)

$$g_\xi^\omega = \sum_{\omega\eta = \xi} g_\eta \quad (\xi \in \Gamma).$$

Тогда на основании (44) и (45)

$$\Big|\sum_{\xi,\eta\in\Gamma}(T_{\xi^*\omega\eta}g_\eta,\ g_\xi)\Big|^2=\Big|\sum_{\sigma,\tau\in\Gamma}(T_{\sigma^*\tau}g^\omega_\tau,\ g_\sigma)\Big|^2\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{\sigma,\tau\in\Gamma}(T_{\sigma^*\tau}g_\tau,\ g_\sigma)\sum_{\sigma,\tau\in\Gamma}(T_{\sigma^*\tau}g^\omega_\tau,\ g^\omega_\sigma)=$$
$$=\sum_{\xi,\eta\in\Gamma}(T_{\xi^*\eta}g_\eta,\ g_\xi)\sum_{\xi,\eta\in\Gamma}(T_{(\omega\xi)^*\omega\eta}g_\eta,\ g_\xi).$$

Поскольку $(\omega\xi)^*\omega\eta=\xi^*\omega^*\omega\eta=\xi^*\omega^2\eta$, то, пользуясь обозначением

$$p_g(\alpha)=\sum_{\xi,\eta\in\Gamma}(T_{\xi^*\alpha\eta}g_\eta,\ g_\xi), \tag{46}$$

получаем

$$|p_g(\omega)|^2\leqslant p_g(\varepsilon)\cdot p_g(\omega^2).$$

Последовательное применение этого неравенства дает

$$|p_g(\omega)|\leqslant p_g(\varepsilon)^{2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-n}}(p_g(\omega^{2^n}))^{2^{-n}}$$

для каждого целого числа $n\geqslant 0$, и при $n\to\infty$ получаем

$$|p_g(\omega)|\leqslant p_g(\varepsilon)\cdot\liminf_{n\to\infty}(p_g(\omega^{2^n}))^{2^{-n}}. \tag{47}$$

Будем теперь дополнительно предполагать, что семейство операторов $\{T_\xi\}_{\xi\in\Gamma}$ ограниченно в следующем смысле:

$$\|T_\xi\|\leqslant Kc_\xi\quad(\xi\in\Gamma), \tag{48а}$$

где K — постоянная, а c_ξ — положительная функция на Γ, такая что

$$c_{\xi^*}=c_\xi,\qquad c_{\xi\eta}\leqslant c_\xi c_\eta\quad(\xi,\ \eta\in\Gamma). \tag{48б}$$

Тогда на основании (46) и (48а, б)

$$p_g(\omega^{2^n})\leqslant K\sum_{\xi,\eta\in\Gamma}c_{\xi^*}c_\omega^{2^n}c_\eta\|g_\eta\|\|g_\xi\|=Kc_\omega^{2^n}\Big(\sum_{\xi\in\Gamma}c_\xi\|g_\xi\|\Big)^2,$$

откуда

$$\liminf_{n\to\infty}p_g(\omega^{2^n})^{2^{-n}}\leqslant c_\omega$$

и в силу (47)

$$|p_g(\omega)|\leqslant p_g(\varepsilon)\,c_\omega.$$

Это показывает, что совокупность условий а) и б) основной теоремы (§ 6) и (48а, б) влечет за собой выполнение условия в) этой теоремы с постоянной $C_\alpha=(c_{\alpha^*\alpha})^{1/2}$.

Условия (48а, б) выполняются, в частности, когда

$$\|T_\xi\|\leqslant K\quad(\xi\in\Gamma). \tag{49}$$

Тогда можно взять $c_\xi\equiv 1$ и получим $C_\alpha\equiv 1$.

В случае $*$-полугруппы Γ, фигурирующей в § 10, порождаемое линейным оператором T семейство $T_\pi=T_{\{i,j\}}=T^{*i}T^j$ удовлетворяет условиям (48а, б), если положить $K=1$ и $c_{\{i,j\}}=\|T\|^{i+j}$, а в случае $\|T\|\leqslant 1$ — также и условию (49) с $K=1$. Заслуживает внимания то, что это доказательство не использует даже теорему Лёвнера и Хайнца.