Добавление 2

# УНИТАРНЫЕ ДИЛАТАЦИИ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ[1])

*Б. Сёкефальви-Надь*

Это добавление представляет собой обработанный курс лекций, прочитанный автором 7—11 июня 1971 г. в Нью-хемпширском университете на региональной конференции, проводившейся Советом по математическим наукам при поддержке Национального научного фонда.

Предметом изучения являются унитарные дилатации операторов сжатия и функциональные модели таких операторов. Основной результат в этой области, а именно существование и единственность минимальной унитарной дилатации для оператора сжатия, был доказан автором в 1953 г. и явился отправной точкой для разнообразных далеко идущих исследований структуры и свойств операторов в гильбертовом пространстве. Это направление остается плодотворным и по сей день. Бо́льшая часть исследований в этой области проведена автором в тесном и продолжительном сотрудничестве с Чиприаном Фояшем. Наша с ним книга „Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве“ содержит подробное изложение как полученных нами результатов, так и значительной части результатов, полученных в этой области многими другими математиками.

Для своих лекций я выбрал и подробно изложил лишь некоторые разделы теории; остальные либо вовсе не упомянуты, либо упомянуты вскользь. Я постарался особенно подробно остановиться на геометрических (или чисто теоретико-операторных) аспектах теории, подготавливая тем самым надежную почву для естественного и быстрого введения характеристических функций и функциональных моделей операторов на основе „представлений Фурье“. Особое внимание уделено разъяснению связи между задачей нахождения инвариантных подпространств и проблемой факторизации характеристической функции. Однако затронуть такие приложения, как достаточно полная спектральная теория слабых сжатий, возможности не было. Я включил в лекции элементы функционального исчисления для сжатий и элементы

---

[1]) Sz.-Nagy Béla. Unitary dilations of Hilbert space operators and related topics.—Conference Board of the Mathematical Sciences. Regional conference series in mathematics, № 19. Published by the American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1974. Expository Lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of New Hampshire, June 7—11, 1971.

теории операторов класса $C_0$ и привел основные результаты теории жордановых моделей для таких операторов. За чертой остались однопараметрические полугруппы и методы перехода от сжатий к необязательно ограниченным диссипативным и аккретивным операторам. Я уделил внимание «теореме о лифтинге» решений операторных уравнений, которая оказывается весьма полезным инструментом во многих исследованиях, но даже не упомянул о приложениях нашей теории к теории рассеяния, теории прогнозирования и т. д. В лекциях дана постановка задачи и приведены наиболее интересные результаты из теории унитарных дилатаций коммутативных семейств сжатий, но ни слова не говорится о дилатациях представлений функциональных алгебр или об унитарных $\rho$-дилатациях.

Короче, я не пытался объять необъятную область теории операторов, связанную с понятием дилатации, а постарался дать по возможности ясную картину устройства некоторых основных ее частей. Надеюсь, что некоторые из читателей найдут предмет интересным и перспективным и продолжат его изучение как по нашей с Ч. Фояшем книге, так и по текущей литературе.

## § 1. Изометричные и унитарные дилатации оператора сжатия

1. Рассматриваемые в первых двух параграфах гильбертовы пространства либо все одновременно действительны, либо все комплексны. Они могут быть как сепарабельными, так и несепарабельными. Все операторы предполагаются линейными и ограниченными.

Пусть $A$ и $B$ — операторы в гильбертовых пространствах $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно. Оператор $B$ будем называть *дилатацией* оператора $A$, если $\mathfrak{A}$ является подпространством $\mathfrak{B}$ и

$$A^n = P_{\mathfrak{A}} B^n | \mathfrak{A} \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{1.1.1}$$

где $P_{\mathfrak{A}}$ — оператор ортогонального проектирования из $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{A}$.

Условие (1.1.1) эквивалентно требованию

$$(A^n h_1, h_2) = (B^n h_1, h_2) \quad (h_1, h_2 \in \mathfrak{A};\ n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.1.2}$$

Отсюда следует, что если $B$ — дилатация $A$, то $B^*$ является дилатацией $A^*$.

Для выполнения условия (1.1.1) достаточно, чтобы на $\mathfrak{B}$ имело место равенство

$$AP_{\mathfrak{A}} = P_{\mathfrak{A}} B. \tag{1.1.3}$$

Действительно, из (1.1.3) получаем $A^n P_{\mathfrak{A}} = P_{\mathfrak{A}} B^n$ для $n = 0, 1, \ldots$, и сужение обеих частей на $\mathfrak{A}$ приводит к (1.1.1). Обратно, из (1.1.1) вытекает, что

$$AP_{\mathfrak{A}}(B^n a) = AA^n a = A^{n+1} a = P_{\mathfrak{A}} B^{n+1} a = P_{\mathfrak{A}} B (B^n a)$$

для всех $a \in \mathfrak{A}$ и $n=0, 1, \ldots$. Следовательно, равенство (1.1.3) справедливо для сужения обеих его частей на подпространство[1] $\bigvee_{n=0}^{\infty} B^n\mathfrak{A}$ пространства $\mathfrak{B}$. Если это подпространство совпадает с $\mathfrak{B}$ (т. е. если в $\mathfrak{B}$ нет отличного от $\mathfrak{B}$ подпространства, содержащего $\mathfrak{A}$ и инвариантного относительно $B$), то условия (1.1.1) и (1.1.3) *эквивалентны*.

Важность введенного понятия дилатации заключается в том, что для операторов общего типа могут существовать дилатации, принадлежащие к некоторым специальным классам операторов, а это позволяет свести изучение самого оператора к изучению его дилатации, имеющей уже ряд новых свойств.

2. Пусть $T$ — оператор сжатия в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (т. е. $\|T\| \leqslant 1$). Будем называть операторы

$$D=(I-T^*T)^{1/2} \quad \text{и} \quad D_*=(I-TT^*)^{1/2}$$

*дефектными операторами*, пространства

$$\mathfrak{D}=\overline{D\mathfrak{H}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{D}_*=\overline{D_*\mathfrak{H}}$$

(где черта обозначает замыкание) *дефектными пространствами*, а кардинальные числа

$$\mathfrak{d}=\dim\mathfrak{D} \quad \text{и} \quad \mathfrak{d}_*=\dim\mathfrak{D}_*$$

— *индексами дефекта* сжатия $T$.

Из очевидного равенства $T(I-T^*T)=T-TT^*T=(I-TT^*)T$ имеем по индукции $Tp(D^2)=p(D_*^2)T$ для любого многочлена $p(\lambda)$, а следовательно, и для любой непрерывной на отрезке $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ функции $p(\lambda)$. Полагая $p(\lambda)=\lambda^{1/2}$, получаем

$$TD=D_*T, \quad DT^*=T^*D_*. \tag{1.2.1}$$

Отсюда

$$T\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}_*, \quad T^*\mathfrak{D}_* \subset \mathfrak{D}. \tag{1.2.2}$$

Теорема 1. *Всякое сжатие $T$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ обладает унитарной дилатацией $U$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{K}$. Если потребовать минимальности этой унитарной дилатации в том смысле, что*

$$\bigvee_{n=-\infty}^{+\infty} U^n\mathfrak{H}=\mathfrak{K}, \tag{1.2.3}$$

*то $T$ определяет $U$ однозначно* (т. е. с точностью до изометричного изоморфизма, оставляющего векторы $\mathfrak{H}$ без изменения).

[1]) Символом $\vee$ обозначается замкнутая линейная оболочка.

Доказательство. Образуем гильбертово пространство $\mathfrak{K}$ из векторов

$$k = \langle \ldots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, h_2, \ldots \rangle \tag{1.2.4}$$

с компонентами $h_0 \in \mathfrak{H}$, $h_n \in \mathfrak{D}$, $h_{-n} \in \mathfrak{D}_*$ при $n \geqslant 1$ и нормой

$$\|k\| = \left( \sum_{-\infty}^{+\infty} \|h_n\|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Вложим $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{K}$, отождествив каждый элемент $h \in \mathfrak{H}$ с элементом $\langle \ldots, 0, \boxed{h}, 0, \ldots \rangle \in \mathfrak{K}$. Тогда равенство $P_{\mathfrak{H}} k = \langle \ldots, 0, \boxed{h_0}, 0, \ldots \rangle = h_0$ определяет оператор ортогонального проектирования.

Определим в $\mathfrak{K}$ операторы $U$ и $U'$ формулами

$$Uk = \langle \ldots, h_{-3}, h_{-2}, \boxed{D_* h_{-1} + Th_0}, -T^* h_{-1} + Dh_0, h_1, h_2, \ldots \rangle, \tag{1.2.5}$$

$$U'k = \langle \ldots, h_{-1}, D_* h_0 - Th_1, \boxed{T^* h_0 + Dh_1}, h_2, h_3, \ldots \rangle. \tag{1.2.6}$$

Корректиость этих определений следует из (1.2.2). Непосредственными вычислениями, основанными на соотношениях (1.2.1), убеждаемся, что оператор $U$ изометричен и $UU' = I_{\mathfrak{K}}$. Отсюда заключаем, что $U$ — *унитарный* оператор и $U' = U^{-1} = U^*$.

Из (1.2.5) сразу вытекает, что

$$U^n h = \langle \ldots, 0, \boxed{T^n h}, DT^{n-1} h, \ldots, Dh, 0, \ldots \rangle$$

и, следовательно,

$$T^n h = P_{\mathfrak{H}} U^n h \text{ для всех } h \in \mathfrak{H} \text{ и } n = 0, 1, \ldots .$$

Таким образом, $U$ — унитарная дилатация оператора $T$.

Заметим далее, что для любого $h \in \mathfrak{H}$

$$Uh - Th = U\langle \ldots, 0, \boxed{h}, 0, \ldots \rangle - \langle \ldots, 0, \boxed{Th}, 0, \ldots \rangle =$$
$$= \langle \ldots, 0, \boxed{Th}, Dh, 0, \ldots \rangle - \langle \ldots, 0, \boxed{Th}, 0, \ldots \rangle =$$
$$= \langle \ldots, 0, \boxed{0}, Dh, 0, \ldots \rangle,$$

и аналогично

$$U^* h - T^* h = \langle \ldots, 0, D_* h, \boxed{0}, 0, \ldots \rangle.$$

Таким образом, подпространства[1])

$$\mathfrak{L} = \overline{(U - T)\mathfrak{H}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{L}^* = \overline{(U^* - T^*)\mathfrak{H}} \tag{1.2.7}$$

[1]) Отметим, что звездочка у $\mathfrak{L}^*$ не означает, что это сопряженное пространство; она используется здесь лишь для того, чтобы подчеркнуть аналогию в определениях $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^*$.

состоят соответственно из векторов $\langle \ldots, 0, \boxed{0}, d, 0, \ldots \rangle$ с произвольным $d \in \mathfrak{D}$ и векторов $\langle \ldots, 0, d_*, \boxed{0}, 0, \ldots \rangle$ с произвольным $d_* \in \mathfrak{D}_*$. Далее, для любого $n \geqslant 0$

$$U^n \mathfrak{L} = \{\langle \ldots, 0, \boxed{0}, \overset{1}{0}, \ldots, 0, \overbrace{d}^{n+1}, 0, \ldots \rangle : d \in \mathfrak{D}\}$$

и

$$U^{*n} \mathfrak{L}^* = \{\langle \ldots, 0, \overbrace{d_*}^{-n-1}, 0, \ldots, \overbrace{0}^{-1}, \boxed{0}, 0, \ldots \rangle : d_* \in \mathfrak{D}_*\}.$$

Учитывая способ вложения $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{K}$, получаем, что $\mathfrak{K}$ имеет следующее ортогональное разложение:

$$\mathfrak{K} = \ldots \oplus U^{-2}\mathfrak{L}^* \oplus U^{-1}\mathfrak{L}^* \oplus \mathfrak{L}^* \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L} \oplus U\mathfrak{L} \oplus U^2\mathfrak{L} \oplus \ldots \quad (1.2.8)$$

Из (1.2.7) и (1.2.8) следует, что условие минимальности (1.2.3) также выполнено.

Остается доказать единственность. Пусть $U'$ и $U''$ — две минимальные унитарные дилатации оператора $T$, скажем в $\mathfrak{K}'$ и $\mathfrak{K}''$. Заметим сначала, что при $n \geqslant m$

$$(U'^n h_1, U'^m h_2) = (U'^{n-m} h_1, h_2) = (T^{n-m} h_1, h_2) =$$
$$= (U''^{n-m} h_1, h_2) = (U''^n h_1, U''^m h_2)$$

для всех $h_1, h_2 \in \mathfrak{H}$. Из симметрии скалярного произведения следует, что крайние члены этого равенства равны также и при $n \leqslant m$. Отсюда выводим, что отображение

$$\sum_{-\infty}^{\infty} U'^n h_n \longmapsto \sum_{-\infty}^{\infty} U''^n h_n$$

$$(h_n \in \mathfrak{H};\ h_n = 0 \text{ для всех достаточно больших } |n|)$$

является изометрией, которая продолжается по непрерывности до изометрии $\varphi$ из $\mathfrak{K}'$ на $\mathfrak{K}''$. Эта изометрия оставляет векторы из $\mathfrak{H}$ без изменения и переводит $U'$ в $U''$, т. е. $\varphi U' = U'' \varphi$. Если не принимать во внимание такие изометричные изоморфизмы $\varphi$, то минимальная унитарная дилатация оператора $T$ единственна.

В дальнейшем можно (но не обязательно) понимать под $U$ некоторую специальную реализацию минимальной унитарной дилатации оператора $T$. Подпространства $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^*$, определяемые формулами (1.2.7), являются *блуждающими*[1]) относительно опе-

[1]) Подпространство $\mathfrak{A}$ пространства $\mathfrak{B}$ с изометрией $V$ называется *блуждающим*, если подпространства $\mathfrak{A}$, $V\mathfrak{A}$, $V^2\mathfrak{A}$, ... попарно ортогональны. В этом случае ортогональная сумма $\bigoplus_0^\infty V^n \mathfrak{A}$ обозначается $M_+(V; \mathfrak{A})$ или, если не предвидится разночтений, $M_+(\mathfrak{A})$. Если $V = U$ — унитарный оператор, то для $\bigoplus_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{A}$ используется обозначение $M(U; \mathfrak{A})$ или $M(\mathfrak{A})$. Если $M_+(V; \mathfrak{A}) = \mathfrak{B}$, то $V$ называется *односторонним сдвигом в* $\mathfrak{B}$ *с порождающим блуждающим подпространством* $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \ominus V\mathfrak{B}$. *Кратностью* одностороннего сдвига назы-

ратора $U$, так что разложение (1.2.8) имеет место независимо от конкретной реализации $\mathfrak{K}$ и $U$.

3. Отметим следующее важное свойство:

$$\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{L}=U\mathfrak{H}\oplus U\mathfrak{L}^*. \qquad (1.3.1)$$

Для доказательства (1.3.1) достаточно установить, что

$$\mathfrak{H}\oplus(U-T)\mathfrak{H}=U\mathfrak{H}\oplus(I-UT^*)\mathfrak{H}. \qquad (1.3.2)$$

Ортогональность $U\mathfrak{H}$ и $U\mathfrak{L}^*$ следует из ортогональности $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{L}^*$ (см. (1.2.8)), а само равенство (1.3.2) вытекает из того обстоятельства, что для всякого вектора $k\in\mathfrak{K}$ представимость в виде

$$k=h'+(U-T)h'' \quad (h',\ h''\in\mathfrak{H})$$

эквивалентна представимости в виде

$$k=Uh_1+(I-UT^*)h_2 \quad (h_1,\ h_2\in\mathfrak{H}).$$

В самом деле, достаточно положить

$$h_1=T^*h'+(I-T^*T)h'',\ h_2=h'-Th'',$$

и, обратно,

$$h'=Th_1+(I-TT^*)h_2, \quad h''=h_1-T^*h_2.$$

4. Из соотношения (1.3.1) следует, в частности, что $U\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{L}$. Отсюда $U^n\mathfrak{H}\subset\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{L}\oplus\ldots\oplus U^{n-1}\mathfrak{L}$ $(n=1, 2, \ldots)$. С другой стороны, ясно, что $\mathfrak{L}\subset\mathfrak{H}\vee U\mathfrak{H}$, так что $U^n\mathfrak{L}\subset U^n\mathfrak{H}\vee U^{n+1}\mathfrak{H}$ $(n=0, 1, \ldots)$. Таким образом, подпространства $\mathfrak{H}\oplus M_+(U;\ \mathfrak{L})$ и $\bigvee_0^\infty U^n\mathfrak{H}$ (последнее подпространство обозначим $\mathfrak{K}_+$) пространства $\mathfrak{K}$ совпадают. Положим $U_+=U\,|\,\mathfrak{K}_+$. Ясно, что $U_+$ является *изометричной* дилатацией оператора $T$, причем *минимальной* в том смысле, что

$$\mathfrak{K}_+=\bigvee_0^\infty U_+^n\mathfrak{H}. \qquad (1.4.1)$$

Учитывая (1.1.3), получаем

$$TP_+=P_+U_+, \qquad (1.4.2)$$

где $P_+$ — оператор ортогонального проектирования из $\mathfrak{K}_+$ на $\mathfrak{H}$.

По аналогии с унитарным случаем доказывается, что изометричные дилатации оператора $T$, удовлетворяющие условию минимальности (1.4.1), изометрически изоморфны, так что минимальная изометричная дилатация оператора $T$ *единственна* с точностью до изоморфизма.

---

вается $\dim\mathfrak{A}$. Если $M(U;\ \mathfrak{A})=\mathfrak{B}$, то $U$ называется *двусторонним сдвигом* в $\mathfrak{B}$. Его *порождающее блуждающее подпространство* $\mathfrak{A}$ не определяется однозначно унитарным оператором $U$, однако можно показать, что размерность $\mathfrak{A}$ определяется $U$ однозначно, что позволяет назвать ее *кратностью* двустороннего сдвига $U$.

Отметим, что если исходить из представлений $\mathfrak{K}$ и $U$ формулами (1.2.4) и (1.2.5), то $\mathfrak{K}_+$ состоит из векторов $k \in \mathfrak{K}$ с нулевыми компонентами $h_n$ $(n \leqslant -1)$. Таким образом, $\mathfrak{K}_+$ можно отождествить с пространством векторов

$$k = \langle h_0, h_1, h_2, \ldots \rangle,$$

$$\text{где } h_0 \in \mathfrak{H},\ h_n \in \mathfrak{D}\ (n \geqslant 1), \quad \|k\| = \left(\sum_0^\infty \|h_n\|^2\right)^{1/2} < \infty,$$

а $U_+$ задать равенством

$$U_+ k = \langle Th_0, Dh_0, h_1, h_2, \ldots \rangle. \tag{1.4.3}$$

Легко проверить непосредственно, что $U_+$ есть минимальная изометричная дилатация оператора $T$.

В дальнейшем мы не будем придерживаться какой-либо конкретной изометричной дилатации оператора $T$, а всегда будем понимать под $U_+$ сужение минимальной унитарной дилатации $U$. Поэтому

$$\mathfrak{K}_+ = \mathfrak{H} \oplus M_+(\mathfrak{L}). \tag{1.4.4}$$

Рассмотрим теперь так называемое разложение Вольда пространства $\mathfrak{K}_+$, соответствующее изометрии $U_+$, т. е. разложение

$$\mathfrak{K}_+ = M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}, \tag{1.4.5}$$

где

$$\mathfrak{L}_* = \mathfrak{K}_+ \ominus U_+\mathfrak{K}_+ \quad \text{и} \quad \mathfrak{R} = \bigcap_0^\infty U_+^n \mathfrak{K}_+. \tag{1.4.6}$$

Разложение Вольда (1.4.5) *приводит* оператор $U_+$: $U_+$ является односторонним сдвигом в $M_+(\mathfrak{L}_*)$ и унитарным оператором в $\mathfrak{R}$. Для блуждающего подпространства $\mathfrak{L}_*$, порождающего подпространство $M_+(\mathfrak{L}_*)$, приводящее $U_+$ к одностороннему сдвигу, получаем, используя равенства $\mathfrak{K}_+ = \mathfrak{H} \oplus M_+(\mathfrak{L}) = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L} \oplus U_+ M_+(\mathfrak{L})$ и $U_+\mathfrak{K}_+ = U_+(\mathfrak{H} \oplus M_+(\mathfrak{L})) = U_+\mathfrak{H} \oplus U_+ M_+(\mathfrak{L})$, представление

$$\mathfrak{L}_* = (\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L}) \ominus U_+\mathfrak{H}.$$

В силу (1.3.1) имеем тогда[1])

$$\mathfrak{L}_* = \overline{(I - UT^*)\mathfrak{H}}. \tag{1.4.7}$$

Поскольку $M_+(\mathfrak{L})$ инвариантно относительно $U_+$, его ортогональное дополнение в $\mathfrak{K}_+$, т. е. $\mathfrak{H}$, инвариантно относительно $U_+^*$. По определению дилатации $P_{\mathfrak{H}} U_+^* \mid \mathfrak{H} = T^*$. Отсюда получаем, что

$$T^* = U_+^* \mid \mathfrak{H}. \tag{1.4.8}$$

Заметим, что в соответствии с формулой (1.4.5) и равенством

$$\mathfrak{K} = \bigvee_{-\infty}^{\infty} U^n \mathfrak{H} = \bigvee_{-\infty}^{-1} U^n \mathfrak{K}_+$$

---

[1]) Из соотношения (1.4.7) следует, что $\mathfrak{L}_* = U\mathfrak{L}^*$, и тем самым оправдывается введенное в (1.4.6) обозначение $\mathfrak{L}_*$. В дальнейшем $\mathfrak{L}_*$ и $\mathfrak{L}^*$ не следует путать.

имеет место еще одно разложение пространства $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K} = M(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}. \tag{1.4.9}$$

Приведенные разложения пространств $\mathfrak{K}_+$ и $\mathfrak{K}$, а также соотношение (1.4.8) между $T$ и $U_+$ будут использованы для построения функциональной модели оператора $T$.

## § 2. Дальнейшие свойства минимальной унитарной дилатации

1. Пусть $T$ — оператор сжатия в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Для любого $h \in \mathfrak{H}$ последовательность $\|T^n h\|$ $(n = 0, 1, \ldots)$ не возрастает и, следовательно, сходится. Если $U$ — унитарная дилатация оператора $T$ в $\mathfrak{K}$, то при $n \geqslant m \longrightarrow \infty$ имеем

$$\|U^{-m}T^m h - U^{-n}T^n h\|^2 = \|T^m h\|^2 - 2\operatorname{Re}(U^{n-m}T^m h, T^n h) + \\ + \|T^n h\|^2 = \|T^m h\|^2 - \|T^n h\|^2 \longrightarrow 0.$$

Таким образом, существует сильный предел

$$L = \lim_{n\to\infty} U^{-n}T^n, \tag{2.1.1}$$

являющийся оператором, действующим из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{K}$.

Докажем, что $L$ есть *оператор ортогонального проектирования* из $\mathfrak{H}$ на ортогональное дополнение к $M(\mathfrak{L})$ в пространстве $\mathfrak{K}$.

Для этого заметим прежде всего, что для всех $h$, $h' \in \mathfrak{H}$, $n \geqslant 0$, $n \geqslant \nu$

$$(U^{-n}T^n h, U^{-\nu}(U - T)h') = (T^n h, U^{n-\nu+1}h' - U^{n-\nu}Th') = \\ = (T^n h, T^{n-\nu+1}h' - T^{n-\nu}Th') = 0.$$

Поэтому $Lh \perp U^{-\nu}\mathfrak{L}$ для всех $\nu$, так что $Lh \perp M(\mathfrak{L})$. С другой стороны,

$$h - U^{-n}T^n h = \sum_{m=0}^{n-1} (U^{-m}T^m h - U^{-m-1}T^{m+1}h) = \\ = \sum_{m=0}^{n-1} U^{-m-1}(U - T)T^m h.$$

Устремив $n$ к бесконечности, получаем

$$h - Lh = \sum_{m=0}^{\infty} U^{-m-1}(U - T)T^m h \in M(\mathfrak{L}). \tag{2.1.2}$$

Утверждение доказано.

Рассуждая аналогичным образом, получим, что предел

$$L_* = \lim_{n\to\infty} U^n T^{*n} \tag{2.1.3}$$

существует и является оператором ортогонального проектирования из $\mathfrak{H}$ на $M(\mathfrak{L}_*)^\perp$ — подпространство, совпадающее в силу (1.4.9)