имеет место еще одно разложение пространства $\mathfrak{K}$:

$$\mathfrak{K} = M(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}. \tag{1.4.9}$$

Приведенные разложения пространств $\mathfrak{K}_+$ и $\mathfrak{K}$, а также соотношение (1.4.8) между T и U_+ будут использованы для построения функциональной модели оператора T.

§ 2. Дальнейшие свойства минимальной унитарной дилатации

1. Пусть T — оператор сжатия в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Для любого $h \in \mathfrak{H}$ последовательность $\|T^n h\|$ $(n = 0, 1, \ldots)$ не возрастает и, следовательно, сходится. Если U — унитарная дилатация оператора T в $\mathfrak{K}$, то при $n \geqslant m \to \infty$ имеем

$$\|U^{-m}T^m h - U^{-n}T^n h\|^2 = \|T^m h\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(U^{n-m}T^m h,\ T^n h) + \\ + \|T^n h\|^2 = \|T^m h\|^2 - \|T^n h\|^2 \to 0.$$

Таким образом, существует сильный предел

$$L = \lim_{n\to\infty} U^{-n}T^n, \tag{2.1.1}$$

являющийся оператором, действующим из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{K}$.

Докажем, что L есть *оператор ортогонального проектирования* из $\mathfrak{H}$ на ортогональное дополнение к $M(\mathfrak{L})$ в пространстве $\mathfrak{K}$.

Для этого заметим прежде всего, что для всех $h,\ h' \in \mathfrak{H}$, $n \geqslant 0$, $n \geqslant \nu$

$$(U^{-n}T^n h,\ U^{-\nu}(U - T)h') = (T^n h,\ U^{n-\nu+1}h' - U^{n-\nu}Th') = \\ = (T^n h,\ T^{n-\nu+1}h' - T^{n-\nu}Th') = 0.$$

Поэтому $Lh \perp U^{-\nu}\mathfrak{L}$ для всех ν, так что $Lh \perp M(\mathfrak{L})$. С другой стороны,

$$h - U^{-n}T^n h = \sum_{m=0}^{n-1} (U^{-m}T^m h - U^{-m-1}T^{m+1}h) = \\ = \sum_{m=0}^{n-1} U^{-m-1}(U - T)T^m h.$$

Устремив n к бесконечности, получаем

$$h - Lh = \sum_{m=0}^{\infty} U^{-m-1}(U - T)T^m h \in M(\mathfrak{L}). \tag{2.1.2}$$

Утверждение доказано.

Рассуждая аналогичным образом, получим, что предел

$$L_* = \lim_{n\to\infty} U^n T^{*n} \tag{2.1.3}$$

существует и является оператором ортогонального проектирования из $\mathfrak{H}$ на $M(\mathfrak{L}_*)^{\perp}$ — подпространство, совпадающее в силу (1.4.9) с $\mathfrak{R}$. Аналогично (2.1.2) имеем

$$h-L_*h=\sum_{m=0}^{\infty} U^m (I-UT^*) T^{*m}h. \tag{2.1.4}$$

Используя определения (2.1.1) и (2.1.3) операторов L и L_* и их свойства как проекторов, заключаем, что

$$\begin{aligned} T^n h \longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty) &\Leftrightarrow Lh=0 \Leftrightarrow h\in M(\mathfrak{L}),\\ T^{*n} h \longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty) &\Leftrightarrow L_*h=0 \Leftrightarrow h\in M(\mathfrak{L}_*). \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Введем классы операторов сжатия T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ в соответствии с их асимптотическим поведением при $n\longrightarrow\infty$:

$$\begin{aligned} C_{0\cdot}&=\{T\colon T^n h\longrightarrow 0 \text{ для } \textit{всех } h\in\mathfrak{H}\},\\ C_{\cdot 0}&=\{T\colon T^{*n} h\longrightarrow 0 \text{ для } \textit{всех } h\in\mathfrak{H}\},\\ C_{1\cdot}&=\{T\colon T^n h\longrightarrow 0 \textit{ только } \text{при } h=0\},\\ C_{\cdot 1}&=\{T\colon T^{*n} h\longrightarrow 0 \textit{ только } \text{при } h=0\}. \end{aligned}$$

Далее, полагаем

$$C_{\alpha\beta}=C_{\alpha\cdot}\cap C_{\cdot\beta}.$$

Тогда, в силу (2.1.5),

$$T\in C_{0\cdot} \Leftrightarrow \mathfrak{H}\subset M(\mathfrak{L}); \qquad T\in C_{\cdot 0} \Leftrightarrow \mathfrak{H}\subset M(\mathfrak{L}_*).$$

2. Если дилатация U *минимальна*, то, очевидно,

$$\mathfrak{H}\subset M(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow \mathfrak{R}=M(\mathfrak{L}) \text{ и } \mathfrak{H}\subset M(\mathfrak{L}_*) \Leftrightarrow \mathfrak{R}=M(\mathfrak{L}_*).$$

Таким образом, в этом случае

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}&=M(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow T\in C_{0\cdot},\\ \mathfrak{R}&=M(\mathfrak{L}_*) \Leftrightarrow T\in C_{\cdot 0}. \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Предполагая по-прежнему дилатацию U оператора T минимальной, рассмотрим подпространство $M(\mathfrak{L})\vee M(\mathfrak{L}_*)$ и его ортогональное дополнение $\mathfrak{H}_0=M(\mathfrak{L})^\perp\cap M(\mathfrak{L}_*)^\perp$. Поскольку $\mathfrak{H}_0$, в частности, ортогонально к $U^n\mathfrak{L}$ и к $U^{-n}\mathfrak{L}^*$ $(n=0, 1, \ldots)$, из разложения (1.2.8) пространства $\mathfrak{R}$ следует включение $\mathfrak{H}_0\subset\mathfrak{H}$. Но для того, чтобы вектор $h\in\mathfrak{H}$ принадлежал $\mathfrak{H}_0$, необходимо и достаточно, чтобы он был ортогонален как к $U^{-n}(U-T)\mathfrak{H}$, так и к $U^n(U^*-T^*)\mathfrak{H}$ для всех $n=1, 2, \ldots$, т. е. ортогонален к $(U^{*m}-U^{*m+1}T)\mathfrak{H}$ и к $(U^m-U^{m+1}T^*)\mathfrak{H}$ для всех $m=0, 1, \ldots$, что эквивалентно, в силу определения дилатации, соотношениям $\|T^m h\|=\|T^{m+1}h\|$ и $\|T^{*m}h\|=\|T^{*m+1}h\|$ $(m=0, 1, \ldots)$.

Таким образом, подпространство $\mathfrak{H}_0$ состоит из тех и только тех векторов h из $\mathfrak{H}$, для которых

$$\ldots=\|T^{*2}h\|=\|T^*h\|=\|h\|=\|Th\|=\|T^2h\|=\ldots\ . \tag{2.2.2}$$

Как следует из теоремы Лангера и Фояша, условия (2.2.2) определяют максимальное подпространство в $\mathfrak{H}$, приводящее сжатие T к унитарному оператору. Если это подпространство равно $\{0\}$, то оператор T называется *вполне неунитарным*. Таким образом, если T является вполне неунитарным, то $\mathfrak{H}_0=\{0\}$ и, значит,

$$\mathfrak{K}=M(\mathfrak{L})\vee M(\mathfrak{L}_*). \tag{2.2.3}$$

3. В дальнейшем оператор T предполагается вполне неунитарным, в связи с чем справедливо (2.2.3).

Из равенства $\mathfrak{K}=M(\mathfrak{L}_*)\oplus\mathfrak{R}$ (см. (1.4.9)) и формулы (2.2.3) получаем, используя ортогональность $\mathfrak{R}$ к $M(\mathfrak{L}_*)$,

$$\mathfrak{R}=P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{K}=P_{\mathfrak{R}}[M(\mathfrak{L})\vee M(\mathfrak{L}_*)]=\overline{P_{\mathfrak{R}}M(\mathfrak{L})}.$$

Положим

$$Q=P_{M(\mathfrak{L}_*)}\,|\,M(\mathfrak{L}), \tag{2.3.1}$$

т. е. Q есть оператор ортогонального проектирования из $M(\mathfrak{L})$ в $M(\mathfrak{L}_*)$. Тогда

$$\mathfrak{R}=\overline{(I-Q)\,M(\mathfrak{L})}. \tag{2.3.2}$$

Оператор Q удовлетворяет следующему операторному равенству:

$$Q\,(U\,|\,M(\mathfrak{L}))=(U\,|\,M(\mathfrak{L}_*))\,Q, \tag{2.3.3}$$

являющемуся следствием того, что разложение $\mathfrak{K}=M(\mathfrak{L}_*)\oplus\mathfrak{R}$ приводит U. В самом деле, если $l=l_*+r$ — соответствующее разложение вектора $l\in M(\mathfrak{L})$, то, очевидно, $Ul=Ul_*+Ur$ является разложением вектора Ul, а это и означает, что $QUl=UQl$.

Заметим, далее, что

$$QM_+(\mathfrak{L})\subset M_+(\mathfrak{L}_*). \tag{2.3.4}$$

Действительно, как следует из разложения (1.2.8) для $\mathfrak{K}$, подпространство $M_+(\mathfrak{L})$ ортогонально к $U^{-n}\mathfrak{L}^*$ $(n=0,\ 1,\ \ldots)$, а значит, и к $U^{-m}\mathfrak{L}_*$ $(m=1,\ 2,\ \ldots)$.

Важно научиться вычислять Ql для векторов l вида $l=(U-T)h$ $(h\in\mathfrak{H})$, образующих плотное в $\mathfrak{L}$ множество, поскольку в силу (2.3.3) значения оператора Q на $\mathfrak{L}$ определяют его значения на всем $M(\mathfrak{L})$.

Из (2.1.4) вытекает, что

$$h=\sum_0^\infty U^m(I-UT^*)\,T^{*m}h+L_*h \text{ для любого } h\in\mathfrak{H}. \tag{2.3.5}$$

Применяя к этому равенству оператор U, получаем

$$Uh=\sum_0^\infty U^{m+1}(I-UT^*)\,T^{*m}h+UL_*h.$$

Заменив в формуле (2.3.5) вектор h на вектор Th, имеем

$$Th=\sum_0^\infty U^m(I-UT^*)\,T^{*m}Th+L_*Th.$$

Следовательно,

$$Q(U-T)h=-(I-UT^*)Th+\sum_1^\infty U^m(I-UT^*)T^{*m-1}D^2h \qquad (2.3.6)$$

(здесь учтено, что L_* является оператором проектирования из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{R}$, а само подпространство $\mathfrak{R}$ инвариантно относительно U, так что $UL_*h-L_*Th\in\mathfrak{R}$).

Формула (2.3.6) окажется полезной в дальнейшем.

Отметим еще несколько фактов, связанных с оператором Q. Первым непосредственным следствием определения Q как проектора является следующее: Q — изометрия тогда и только тогда, когда $M(\mathfrak{L})\subset M(\mathfrak{L}_*)$. Если T является вполне неунитарным сжатием, то в силу (2.2.3) последнее включение эквивалентно равенству $\mathfrak{K}=M(\mathfrak{L}_*)$, которое в соответствии с (2.2.1) эквивалентно условию $T\in C_{\cdot 0}$. Таким образом, для вполне неунитарного сжатия T имеем

$$Q \text{ является изометрией} \Leftrightarrow T\in C_{\cdot 0}. \qquad (2.3.7)$$

Второй факт касается ортогонального дополнения к $QM_+(\mathfrak{L})$ в $M_+(\mathfrak{L}_*)$. Пусть $l_*\in M_+(\mathfrak{L}_*)$. Тогда

$$l_*\perp QM_+(\mathfrak{L})\Leftrightarrow l_*\perp M_+(\mathfrak{L})\Leftrightarrow l_*\in\mathfrak{H}$$

(см. (1.4.4)). Поскольку для вектора $h\in\mathfrak{H}$ включения $h\in M_+(\mathfrak{L}_*)$ и $h\in M(\mathfrak{L}_*)$ в силу (1.2.8) эквивалентны, а последнее включение (см. (2.1.5)) эквивалентно соотношению $T^{*n}h\longrightarrow 0$, то

$$M_+(\mathfrak{L}_*)\ominus\overline{QM_+(\mathfrak{L})}=\{h\colon\ h\in\mathfrak{H},\ T^{*n}h\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)\}. \qquad (2.3.8)$$

В частности,

$$\overline{QM_+(\mathfrak{L})}=M_+(\mathfrak{L}_*)\Leftrightarrow T\in C_{\cdot 1}. \qquad (2.3.9)$$

§ 3. Характеристическая функция и функциональная модель

1. Напомним некоторые результаты из § 1 и 2, касающиеся оператора сжатия T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, его минимальной унитарной дилатации U в $\mathfrak{K}$ и минимальной изометричной дилатации U_+ в $\mathfrak{K}_+$.

а) Подпространства $\mathfrak{L}=\overline{(U-T)\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{L}_*=\overline{(I-UT^*)\mathfrak{H}}$ являются блуждающими как относительно оператора U, так и относительно U_+.

б) $\mathfrak{K}_+=M_+(\mathfrak{L}_*)\oplus\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{K}=M(\mathfrak{L}_*)\oplus\mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — подпространство, приводящее U_+ к унитарному оператору (см. (1.4.5), (1.4.9)).

в) $\mathfrak{H}=\mathfrak{K}_+\ominus M_+(\mathfrak{L})$ и $T^*=U_+^*\,|\,\mathfrak{H}$ (см. (1.4.4) и (1.4.8)).

Кроме того, оператор

$Q=P_{M(\mathfrak{L}_*)}\,|\,M(\mathfrak{L})$ **(ортогональный проектор** $M(\mathfrak{L})\longrightarrow M(\mathfrak{L}_*)$**)**