Следовательно,

$$Q(U-T)h = -(I-UT^*)Th + \sum_{1}^{\infty} U^m (I-UT^*) T^{*m-1} D^2 h \quad (2.3.6)$$

(здесь учтено, что L_* является оператором проектирования из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{R}$, а само подпространство $\mathfrak{R}$ инвариантно относительно U, так что $UL_*h - L_*Th \in \mathfrak{R}$).

Формула (2.3.6) окажется полезной в дальнейшем.

Отметим еще несколько фактов, связанных с оператором Q. Первым непосредственным следствием определения Q как проектора является следующее: Q — изометрия тогда и только тогда, когда $M(\mathfrak{L}) \subset M(\mathfrak{L}_*)$. Если T является вполне неунитарным сжатием, то в силу (2.2.3) последнее включение эквивалентно равенству $\mathfrak{K} = M(\mathfrak{L}_*)$, которое в соответствии с (2.2.1) эквивалентно условию $T \in C_{\cdot 0}$. Таким образом, для вполне неунитарного сжатия T имеем

$$Q \text{ является изометрией} \Leftrightarrow T \in C_{\cdot 0}. \quad (2.3.7)$$

Второй факт касается ортогонального дополнения к $QM_+(\mathfrak{L})$ в $M_+(\mathfrak{L}_*)$. Пусть $l_* \in M_+(\mathfrak{L}_*)$. Тогда

$$l_* \perp QM_+(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow l_* \perp M_+(\mathfrak{L}) \Leftrightarrow l_* \in \mathfrak{H}$$

(см. (1.4.4)). Поскольку для вектора $h \in \mathfrak{H}$ включения $h \in M_+(\mathfrak{L}_*)$ и $h \in M(\mathfrak{L}_*)$ в силу (1.2.8) эквивалентны, а последнее включение (см. (2.1.5)) эквивалентно соотношению $T^{*n}h \to 0$, то

$$M_+(\mathfrak{L}_*) \ominus \overline{QM_+(\mathfrak{L})} = \{h:\ h \in \mathfrak{H},\ T^{*n}h \to 0\ (n \to \infty)\}. \quad (2.3.8)$$

В частности,

$$\overline{QM_+(\mathfrak{L})} = M_+(\mathfrak{L}_*) \Leftrightarrow T \in C_{\cdot 1}. \quad (2.3.9)$$

§ 3. Характеристическая функция и функциональная модель

1. Напомним некоторые результаты из § 1 и 2, касающиеся оператора сжатия T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, его минимальной унитарной дилатации U в $\mathfrak{K}$ и минимальной изометричной дилатации U_+ в $\mathfrak{K}_+$.

а) Подпространства $\mathfrak{L} = \overline{(U-T)\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{L}_* = \overline{(I-UT^*)\mathfrak{H}}$ являются блуждающими как относительно оператора U, так и относительно U_+.

б) $\mathfrak{K}_+ = M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}$ и $\mathfrak{K} = M(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}$, где $\mathfrak{R}$ — подпространство, приводящее U_+ к унитарному оператору (см. (1.4.5), (1.4.9)).

в) $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}_+ \ominus M_+(\mathfrak{L})$ и $T^* = U_+^* | \mathfrak{H}$ (см. (1.4.4) и (1.4.8)).

Кроме того, оператор

$Q = P_{M(\mathfrak{L}_*)} | M(\mathfrak{L})$ (ортогональный проектор $M(\mathfrak{L}) \to M(\mathfrak{L}_*)$)

обладает следующими свойствами:

г) $UQl = QUl$ для $l \in M(\mathfrak{L})$.

д) $QM_+(\mathfrak{L}) \subset M_+(\mathfrak{L}_*)$ (см. (2.3.4)).

е) $Q(U-T)h = -(I-UT^*)Th + \sum_1^{\infty} U^m (I-UT^*) T^{*m-1} D^2 h \ (h \in \mathfrak{H})$ (см. (2.3.6)).

ж) Если T — вполне неунитарное сжатие, то Q является изометрией тогда и только тогда, когда $T \in C_{\cdot 0}$ (см. (2.3.7)).

з) $\overline{QM_+(\mathfrak{L})} = M_+(\mathfrak{L}_*)$ тогда и только тогда, когда $T \in C_{\cdot 1}$ (см. (2.3.9)).

Наконец, если T — вполне неунитарное сжатие, то

и) $\mathfrak{R} = \overline{(I-Q)M(\mathfrak{L})}$ (см. (2.3.2)).

2. Используя соответствующие представления Фурье и указанные свойства, мы построим функциональную модель сжатия T (по крайней мере для случая, когда T — *вполне неунитарный* оператор в *сепарабельном* пространстве $\mathfrak{H}$). Все рассматриваемые далее пространства предполагаем *комплексными*.

Заметим прежде всего, что по определению дилатации

$$\|(U-T)h\| = \|Dh\| \text{ и } \|(I-UT^*)h\| = \|D_*h\| \quad (h \in \mathfrak{H}). \tag{3.2.1}$$

Отсюда следует, что преобразования

$$(U-T)h \mapsto Dh, \quad (I-UT^*)h \mapsto D_*h \quad (h \in \mathfrak{H}) \tag{3.2.2}$$

могут быть продолжены по непрерывности до *унитарных* отображений

$$\varphi\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{D} \text{ и } \varphi_*\colon \mathfrak{L}_* \to \mathfrak{D}_*. \tag{3.2.3}$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Обозначим $L^2(\mathfrak{A})$ пространство вектор-функций, определенных на единичной окружности с нормированной мерой Лебега, принимающих значения из $\mathfrak{A}$, измеримых и интегрируемых с квадратом. Символом $H^2(\mathfrak{A})$ обозначим подпространство Харди пространства $L^2(\mathfrak{A})$ (в скалярном случае, т. е. если $\dim \mathfrak{A} = 1$, будем писать просто H^2 и L^2). Пусть χ — функция

$$\chi(e^{it}) \equiv e^{it}.$$

Из формул (3.2.3) следует, что отображения

$$\Phi\colon \sum_m U^m l_m \mapsto \sum_m \chi^m (\varphi l_m), \quad \Phi_*\colon \sum_m U^m l_{*m} \mapsto \sum_m \chi^m (\varphi_* l_{*m}), \tag{3.2.4}$$

где $l_m \in \mathfrak{L}$, $l_{*m} \in \mathfrak{L}_*$, $\sum \|l_m\|^2 < \infty$, $\sum \|l_{*m}\|^2 < \infty$, являются унитарными отображениями

$$\Phi\colon M(\mathfrak{L}) \to L^2(\mathfrak{D}), \quad \Phi_*\colon M(\mathfrak{L}_*) \to L^2(\mathfrak{D}_*). \tag{3.2.5}$$

Заметим, что Φ отображает $M_+(\mathfrak{L})$ на $H^2(\mathfrak{D})$, а Φ_* отображает

$M_+(\mathfrak{L}_*)$ на $H^2(\mathfrak{D}_*)$. Более того, очевидно, что

$$\Phi U \mid M(\mathfrak{L}) = \chi \cdot \Phi, \quad \Phi_* U \mid M(\mathfrak{L}_*) = \chi \cdot \Phi_*. \tag{3.2.6}$$

Отображения Φ и Φ_* будем называть *представлениями Фурье* соответственно пространств $M(\mathfrak{L})$ и $M(\mathfrak{L}_*)$. Рассмотрим оператор

$$\Theta = \Phi_* Q \Phi^{-1},$$

являющийся сжатием из $L^2(\mathfrak{D})$ в $L^2(\mathfrak{D}_*)$ и отображающий, в силу свойства д) оператора Q, пространство $H^2(\mathfrak{D})$ в пространство $H^2(\mathfrak{D}_*)$. Из определения (3.2.4) и свойства г) оператора Q следует, что Θ перестановочен с оператором умножения на χ (а значит, перестановочен с оператором умножения на любую скалярную измеримую ограниченную функцию). Из этого свойства методами теории интеграла Лебега можно вывести, что Θ сам является оператором умножения, т. е.

$$(\Theta u)(e^{it}) = \Theta(e^{it}) u(e^{it}) \quad (u \in L^2(\mathfrak{D})),$$

где через $\Theta(e^{it})$ обозначен существующий почти всюду на единичной окружности радиальный предел (в сильной операторной топологии) сжимающей аналитической функции

$$\Theta(\lambda) = \Theta_0 + \lambda\Theta_1 + \lambda^2\Theta_2 + \ldots \quad (|\lambda| < 1),$$

значения которой $\Theta(\lambda)$ суть операторы сжатия из $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}_*$.

Коэффициенты Θ_k можно найти, используя свойство е) и определения (3.2.2)—(3.2.5). В самом деле, если $h \in \mathfrak{H}$, то

$$\begin{aligned}\Theta Dh &= \Phi_* Q \Phi^{-1} Dh = \Phi_* Q (U - T) h = \\ &= \Phi_* \left[-(I - UT^*) Th + \sum_1^\infty U^m (I - UT^*) T^{*\,m-1} D^2 h \right] = \\ &= -D_* Th + \sum_1^\infty \chi^m D_* T^{*m-1} D^2 h = \\ &= \left[-T + \sum_1^\infty \chi^m D_* T^{*m-1} D \right] Dh. \qquad \text{(см. (1.2.1))}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Theta(\lambda) = \left[-T + \sum_1^\infty \lambda^m D_* T^{*\,m-1} D \right] \Big| \mathfrak{D}. \tag{3.2.7}$$

Эта операторная функция ($\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}_*$) называется *характеристической функцией* оператора T и обозначается также $\Theta_T(\lambda)$. Заметим, что

$$\Theta_T(0) d = -Td \quad (d \in \mathfrak{D}), \tag{3.2.8}$$

и, следовательно, $\|\Theta_T(0) d\| < \|d\|$ для $d \in \mathfrak{D}$, $d \neq 0$.

Сжимающую аналитическую функцию $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, A(\lambda)\}$ назовем (i) *чистой*, если $\|A(0) a\| < \|a\|$ для всех $a \in \mathfrak{A}$, $a \neq 0$;

(ii) *внутренней*, если умножение на функцию $A(e^{it})$ является изометрией из $L^2(\mathfrak{A})$ в $L^2(\mathfrak{A}_*)$, или, что то же самое, если значения этой функции почти всюду на единичной окружности являются изометричными отображениями из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}_*$;

(iii) *внешней*, если умножение на функцию $A(e^{it})$ переводит $H^2(\mathfrak{A})$ в плотное линейное многообразие в $H^2(\mathfrak{A}_*)$, т. е. $\overline{AH^2(\mathfrak{A})} = H^2(\mathfrak{A}_*)$.

Теорема 1. *Характеристическая функция $\Theta_T(\lambda)$ вполне неунитарного оператора сжатия T является чистой сжимающей аналитической функцией. Эта функция является внутренней тогда и только тогда, когда $T \in C_{\cdot 0}$, и внешней тогда и только тогда, когда $T \in C_{\cdot 1}$.*

Доказательство основано на свойствах ж) и з) оператора Q.

3. Закончим построение функциональной модели вполне неунитарного оператора сжатия T, используя свойство и).

Для этого рассмотрим на единичной окружности самосопряженную операторную функцию

$$\Delta_T(e^{it}) = [I - \Theta_T(e^{it})^* \Theta_T(e^{it})]^{1/2} \quad (\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}).$$

Для $l \in M(\mathfrak{L})$ имеем

$$\begin{aligned}\|(I-Q)\,l\|^2 &= \|l\|^2 - \|Ql\|^2 = \|\Phi l\|^2 - \|\Phi_* Ql\|^2 = \\ &= \|\Phi l\|^2 - \|\Theta_T \Phi l\|^2 = \|\Delta_T \Phi l\|^2.\end{aligned}$$

Поэтому, взяв замыкание отображения

$$(I-Q)\,l \mapsto \Delta_T \Phi l \qquad (l \in M(\mathfrak{L})),$$

получим унитарный оператор

$$\Phi_{\mathfrak{R}}\colon\ \mathfrak{R} \to \overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D})}.$$

Следовательно, оператор $\Psi = \Phi_* \oplus \Phi_{\mathfrak{R}}$,

$$\Psi\colon\ \mathfrak{K} = M(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R} \to L^2(\mathfrak{D}_*) \oplus \overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D})} = \boldsymbol{K}$$

является унитарным. Он отображает $\mathfrak{K}_+ = M_+(\mathfrak{D}_*) \oplus \mathfrak{R}$ на $H^2(\mathfrak{D}_*) \oplus \overline{\Delta_T L^2(\mathfrak{D})} = \boldsymbol{K}_+$, а $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}_+ \ominus \{Ql \oplus (I-Q)\,l\colon\ l \in M_+(\mathfrak{L})\}$ на $\boldsymbol{K}_+ \ominus \{\Theta_T u \oplus \Delta_T u\colon\ u \in H^2(\mathfrak{D})\} = \boldsymbol{H}$. Более того, Ψ преобразует U в унитарный оператор $\boldsymbol{U} = \Psi U \Psi^{-1}$ в $\boldsymbol{K}$, действующий по правилу $\boldsymbol{U}(u_* \oplus v) = \chi u_* \oplus \chi v$ $(u_* \oplus v \in \boldsymbol{K})$. Изометричная дилатация U_+ и сам оператор T преобразуются соответственно в операторы $\boldsymbol{U}_+ = \boldsymbol{U} \mid \boldsymbol{K}_+$ и $\boldsymbol{T}$, для которых

$$\boldsymbol{T} = P_{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{U}_+ \mid \boldsymbol{H} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{T}^* = \boldsymbol{U}_+^* \mid \boldsymbol{H}$$

(см. свойство в)).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *Всякий вполне неунитарный оператор сжатия T в сепарабельном гильбертовом пространстве унитарно эквива-*

лентен оператору $S(\Theta)$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}(\Theta)$, связанному с некоторой чистой сжимающей аналитической функцией $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$. Эта связь дается равенствами

$$\mathfrak{H}(\Theta)=[H^2(\mathfrak{A}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{A})}]\ominus\{\Theta u\oplus\Delta u\colon\ u\in H^2(\mathfrak{A})\},$$
$$S(\Theta)(u_*\oplus v)=P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(\chi u_*\oplus\chi v),$$
$$S(\Theta)^*(u_*\oplus v)=\bar{\chi}[u_*-u_*(0)]\oplus\bar{\chi}v\ (u_*\oplus v\in\mathfrak{H}(\Theta));$$
$$u_*(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u_*(e^{it})\,dt,$$

где $\Delta(e^{it})=[I-\Theta(e^{it})^*\Theta(e^{it})]^{1/2}$. В качестве $\Theta(\lambda)$ можно взять, в частности, характеристическую функцию $\{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}_*, \Theta_T(\lambda)\}$, определяемую формулой

$$\Theta_T(\lambda)=\left[-T+\sum_1^{\infty}\lambda^m D_* T^{*m-1}D\right]\Big|\,\mathfrak{D}.$$

Эта функция является внутренней тогда и только тогда, когда $T\in C_{\cdot 0}$, и внешней тогда и только тогда, когда $T\in C_{\cdot 1}$.

Эта теорема имеет важное обращение.

Теорема 3. *Для любой чистой сжимающей аналитической функции $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$ оператор $S(\Theta)$, связанный с ней в смысле предыдущей теоремы, является вполне неунитарным оператором сжатия, характеристическая функция которого совпадает с данной функцией $\Theta(\lambda)$.*

[Две операторные функции $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$ и $\{\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'_*, \Theta'(\lambda)\}$ считаются совпадающими, если существуют постоянные унитарные операторы $\alpha\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}'$, $\alpha_*\colon \mathfrak{A}_*\to\mathfrak{A}'_*$, такие, что $\Theta'(\lambda)\alpha=\alpha_*\Theta(\lambda)$.]

Опуская детали, наметим лишь схему доказательства. Сначала нужно показать, что $S(\Theta)$ является вполне неунитарным оператором сжатия и что оператор $U(\Theta)$, заданный на пространстве $K(\Theta)=L^2(\mathfrak{A}_*)\oplus\overline{\Delta L^2(\mathfrak{A})}$ формулой $U(\Theta)(u_*\oplus v)=\chi u_*\oplus\chi v$, является минимальной унитарной дилатацией оператора $S(\Theta)$. Затем определяются соответствующие блуждающие подпространства $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}_*$, которые, как оказывается, следующим образом связаны с $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_*$:

$$\mathfrak{L}=\{\Theta a\oplus\Delta a\colon\ a\in\mathfrak{A}\},\qquad \mathfrak{L}_*=\{a_*\oplus 0\colon\ a_*\in\mathfrak{A}_*\}.$$

Наконец, определяют соответствующий оператор Q, представления Фурье Φ и Φ_* и строят характеристическую функцию для $S(\Theta)$.

Из этих двух теорем можно сделать вывод, что *оператор $S(\Theta)$, связанный с чистой сжимающей аналитической функцией $\Theta(\lambda)$, представляет собой (с точностью до унитарной эквивалентности) общий вид вполне неунитарного оператора сжатия.*

Мы знаем, что $T \in C_{\cdot 0}$ тогда и только тогда, когда Θ_T является *внутренней* функцией, т. е. $\Delta_T(e^{it}) = 0$ почти всюду. Таким образом, в этом случае *функциональная модель упрощается*, принимая вид

$$\begin{gathered} \mathfrak{H}(\Theta) = H^2(\mathfrak{A}_*) \ominus \Theta H^2(\mathfrak{A}), \\ S(\Theta)\,u_* = P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(\chi u_*), \\ S(\Theta)^* u_* = \bar{\chi}(u_* - u_*(0)), \end{gathered} \qquad (u_* \in \mathfrak{H}(\Theta)),$$

где $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$ — некоторая внутренняя функция.

4. Нетрудно показать, что всякая сжимающая аналитическая функция $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$ является прямой суммой некоторой чистой сжимающей аналитической функции $\{\mathfrak{A}^\circ, \mathfrak{A}_*^\circ, \Theta^\circ(\lambda)\}$ и постоянной (не зависящей от λ) унитарной функции $\{\mathfrak{A}', \mathfrak{A}_*', \Theta'(\lambda)\}$, так что

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}^\circ \oplus \mathfrak{A}', & \mathfrak{A}_* &= \mathfrak{A}_*^\circ \oplus \mathfrak{A}_*', \\ \Theta^\circ(\lambda) &= \Theta(\lambda) \,|\, \mathfrak{A}^\circ, & \Theta'(\lambda) &= \Theta(\lambda) \,|\, \mathfrak{A}'. \end{aligned}$$

Такое разложение единственно. Отметим, что одно из слагаемых в прямой сумме может быть тривиальным ($\mathfrak{A}^\circ = \{0\}$ или $\mathfrak{A}' = \{0\}$).

Таким образом, оператор $S(\Theta)$ можно определить теми же формулами и в общем случае, т. е. когда $\Theta(\lambda)$ не является чистой сжимающей. И в этом случае $S(\Theta)$ оказывается вполне неунитарным оператором сжатия. Его характеристическая функция совпадает с чистой сжимающей частью $\Theta^\circ(\lambda)$ функции $\Theta(\lambda)$.

В частности, пространство $\mathfrak{H}(\Theta) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\Theta(\lambda)$ является постоянной унитарной функцией.

§ 4. Дальнейшие свойства характеристической функции $\Theta_T(\lambda)$

1. Характеристическая функция была определена как сумма степенного ряда

$$\Theta_T(\lambda) = \left[-T + \sum_{1}^{\infty} \lambda^m D_* T^{*m-1} D\right] \Big| \mathfrak{D}. \tag{4.1.1}$$

Как само определение, так и тот факт, что $\Theta_T(\lambda)$ является сжимающей, вытекали из теории дилатаций.

Функции $\Theta_T(\lambda)$ можно придать компактную форму, если умножить ее справа на D. Поскольку $D\mathfrak{H}$ плотно в $\mathfrak{D}$, то, задав $\Theta_T(\lambda) D$, мы тем самым определим и $\Theta_T(\lambda)$. Компактный вид характеристической функции следующий:

$$\Theta_T(\lambda)\, D = D_* (I - \lambda T^*)^{-1} (\lambda I - T) \qquad (|\lambda| < 1). \tag{4.1.2}$$

Прямыми вычислениями и переходом к замыканию получаем отсюда

$$\|f\|^2 - \|\Theta_T(\lambda) f\|^2 = (1 - |\lambda|^2) \|(I - \lambda T^*)^{-1} D f\|^2 \qquad (f \in \mathfrak{D}). \tag{4.1.3}$$