Мы знаем, что $T \in C_{\cdot 0}$ тогда и только тогда, когда Θ_T является *внутренней* функцией, т. е. $\Delta_T(e^{it}) = 0$ почти всюду. Таким образом, в этом случае *функциональная модель упрощается*, принимая вид

$$\begin{aligned} &\mathfrak{H}(\Theta) = H^2(\mathfrak{A}_*) \ominus \Theta H^2(\mathfrak{A}), \\ &S(\Theta)\, u_* = P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(\chi u_*), \\ &S(\Theta)^* u_* = \bar{\chi}(u_* - u_*(0)), \end{aligned} \qquad (u_* \in \mathfrak{H}(\Theta)),$$

где $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$ — некоторая внутренняя функция.

4. Нетрудно показать, что всякая сжимающая аналитическая функция $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$ является прямой суммой некоторой чистой сжимающей аналитической функции $\{\mathfrak{A}^\circ, \mathfrak{A}_*^\circ, \Theta^\circ(\lambda)\}$ и постоянной (не зависящей от λ) унитарной функции $\{\mathfrak{A}', \mathfrak{A}_*', \Theta'(\lambda)\}$, так что

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}^\circ \oplus \mathfrak{A}', & \mathfrak{A}_* &= \mathfrak{A}_*^\circ \oplus \mathfrak{A}_*', \\ \Theta^\circ(\lambda) &= \Theta(\lambda) \,|\, \mathfrak{A}^\circ, & \Theta'(\lambda) &= \Theta(\lambda) \,|\, \mathfrak{A}'. \end{aligned}$$

Такое разложение единственно. Отметим, что одно из слагаемых в прямой сумме может быть тривиальным ($\mathfrak{A}^\circ = \{0\}$ или $\mathfrak{A}' = \{0\}$).

Таким образом, оператор $S(\Theta)$ можно определить теми же формулами и в общем случае, т. е. когда $\Theta(\lambda)$ не является чистой сжимающей. И в этом случае $S(\Theta)$ оказывается вполне неунитарным оператором сжатия. Его характеристическая функция совпадает с чистой сжимающей частью $\Theta^\circ(\lambda)$ функции $\Theta(\lambda)$.

В частности, пространство $\mathfrak{H}(\Theta) = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $\Theta(\lambda)$ является постоянной унитарной функцией.

§ 4. Дальнейшие свойства характеристической функции $\Theta_T(\lambda)$

1. Характеристическая функция была определена как сумма степенного ряда

$$\Theta_T(\lambda) = \left[-T + \sum_1^\infty \lambda^m D_* T^{*m-1} D \right] \Big| \mathfrak{D}. \tag{4.1.1}$$

Как само определение, так и тот факт, что $\Theta_T(\lambda)$ является сжимающей, вытекали из теории дилатаций.

Функции $\Theta_T(\lambda)$ можно придать компактную форму, если умножить ее справа на D. Поскольку $D\mathfrak{H}$ плотно в $\mathfrak{D}$, то, задав $\Theta_T(\lambda)D$, мы тем самым определим и $\Theta_T(\lambda)$. Компактный вид характеристической функции следующий:

$$\Theta_T(\lambda) D = D_* (I - \lambda T^*)^{-1} (\lambda I - T) \qquad (|\lambda| < 1). \tag{4.1.2}$$

Прямыми вычислениями и переходом к замыканию получаем отсюда

$$\|f\|^2 - \|\Theta_T(\lambda) f\|^2 = (1 - |\lambda|^2) \|(I - \lambda T^*)^{-1} D f\|^2 \qquad (f \in \mathfrak{D}). \tag{4.1.3}$$

Это соотношение показывает, что функция $\Theta_T(\lambda)$ сжимающая. Отметим также, что $\Theta_T(\lambda)$ является дробно-линейной функцией λ с коэффициентами T и T^*.

Как из (4.1.1), так и из (4.1.2) легко следует соотношение

$$\Theta_{T^*}(\lambda) = \Theta_T^{\sim}(\lambda) \tag{4.1.4}$$

(здесь и далее под $A^{\sim}(\lambda)$ мы понимаем $A(\bar{\lambda})^*$).

Воспользовавшись снова формулой (4.1.1), получаем $\Theta_T(0) = -T\,|\,\mathfrak{D}$. Легко проверить, что $Z = T\,|\,\mathfrak{D}^{\perp}$ является унитарным оператором из $\mathfrak{D}^{\perp}$ в $\mathfrak{D}_*^{\perp}$. Таким образом,

$$T = -\Theta_T(0) \oplus Z. \tag{4.1.5}$$

Элементарные вычисления показывают, что для любого сжатия T и любого $|a| < 1$ оператор

$$T_a = (T - aI)(I - \bar{a}T)^{-1} \tag{4.1.6}$$

является сжатием, причем вполне неунитарным, если вполне неунитарен оператор T. Более того, используя (4.1.2), можно показать, что

$$\Theta_{T_a}(\lambda) \quad \textit{совпадает с} \quad \Theta_T\left(\frac{\lambda + a}{1 + \bar{a}\lambda}\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что существуют унитарные операторы V_a и W_a, такие, что

$$\Theta_{T_a}(0) = V_a \Theta_T(a) W_a.$$

Применяя (4.1.5) к T_a, получим

$$T_a = -V_a \Theta_T(a) W_a \oplus Z_a, \tag{4.1.7}$$

где Z_a — некоторый унитарный оператор.

Из формулы (4.1.7) вытекает, что оператор $\Theta_T(a)$ имеет *обратный* тогда и только тогда, когда обратный оператор существует у оператора T_a или, что то же самое (см. (4.1.6), у оператора $T - aI$. При этом все три обратных оператора $\Theta_T(a)^{-1}$, T_a^{-1} и $(T - aI)^{-1}$ ограничены или не ограничены одновременно. В случае если они ограничены, имеем

$$\|\Theta_T(a)^{-1}\| = \|T_a^{-1}\| \begin{cases} \leqslant 1 + 2(1 - |a|)\,\|(T - aI)^{-1}\|, \\ \geqslant (1 - |a|)\,\|(T - aI)^{-1}\|. \end{cases} \tag{4.1.8}$$

Тем самым функция $\Theta_T(\lambda)$ определяет точки спектра и точки точечного спектра оператора T внутри единичной окружности.

С помощью этого же оператора описываются и точки спектра оператора T на самой единичной окружности. Именно, точка единичной окружности принадлежит резольвентному множеству оператора T (т. е. множеству, дополнительному к спектру) тогда и только тогда, когда эта точка расположена на некоторой открытой дуге единичной окружности, через которую $\Theta_T(\lambda)$ может быть аналитически продолжена и на которой значениями $\Theta_T(\lambda)$ являются унитарные операторы. В одну сторону это утверждение проверяется прямыми вычислениями, в другую — получается применением разновидности принципа отражения Шварца (подробности см. С.-Надь и Фояш [1], гл. VI.4).

2. Характеристическая функция $\Theta_T(\lambda)$ имеет еще одно интересное применение. С ее помощью можно сформулировать критерий *подобия* оператора сжатия T некоторому *унитарному* оператору V. Подобие означает, что существует оператор S, имеющий ограниченный обратный оператор и называемый *аффинитетом*, такой, что

$$T=S^{-1}VS. \tag{4.2.1}$$

Первая часть нашего рассуждения будет геометрической: она связана с минимальной изометричной дилатацией U_+ оператора T.

Пусть $\mathfrak{R}$ — подпространство, приводящее U_+ к унитарному оператору. Тогда, как следует из результатов § 2.1,

$$P_{\mathfrak{R}}h=\lim_{n\to\infty} U_+^n T^{*n}h \quad \text{для всех} \quad h\in\mathfrak{H}. \tag{4.2.2}$$

Отсюда

$$U_+^n P_{\mathfrak{R}} T^{*n}h=P_{\mathfrak{R}}h \quad \text{для всех} \quad h\in\mathfrak{H} \text{ и } n=0,\ 1,\ \ldots . \tag{4.2.3}$$

Предположим теперь, что выполнено (4.2.1). Тогда $T^{*n}=S^*V^{*n}S^{*-1}$ и, следовательно, в силу (4.2.2), существует такое $c>0$, что

$$\|P_{\mathfrak{R}}h\|\geqslant c\|h\| \quad \text{для всех} \quad h\in\mathfrak{H}. \tag{4.2.4}$$

Именно, $1/c=\|S^*\|\|S^{*-1}\|=\|S\|\|S^{-1}\|$. Более того, в этом случае $T^{*n}\mathfrak{H}=\mathfrak{H}$ при всех $n\geqslant 0$. Поэтому, используя (4.2.3) и перестановочность операторов U_+ и $P_{\mathfrak{R}}$, получаем

$$\mathfrak{R}=P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{K}_+=P_{\mathfrak{R}}\bigvee_{n=0}^{\infty}U_+^n\mathfrak{H}=\bigvee_{n=0}^{\infty}U_+^n P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{H}=$$
$$=\bigvee_{n=0}^{\infty}U_+^n P_{\mathfrak{R}}T^{*n}\mathfrak{H}=\overline{P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{H}}=P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{H}.$$

Последнее равенство в этой цепочке вытекает из (4.2.4). Таким образом, если T — оператор сжатия, подобный унитарному оператору, то существует такое $c>0$, что

$$\|P_{\mathfrak{R}}h\|\geqslant c\|h\| \quad \text{для всех} \quad h\in\mathfrak{H} \quad \text{и} \quad P_{\mathfrak{R}}\mathfrak{H}=\mathfrak{R}. \tag{*}$$

Обратно, пусть выполнены соотношения (*). Тогда $P_{\mathfrak{R}}|\mathfrak{H}$ является аффинитетом из $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{R}$ и, следовательно, сопряженный к нему оператор X является аффинитетом из $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{H}$. Из равенства (4.2.3) вытекает, что $R(P_{\mathfrak{R}}|\mathfrak{H})T^*=P_{\mathfrak{R}}|\mathfrak{H}$ и, значит, $TXR^*=X$, где через R обозначена унитарная часть U_+. Итак, при выполнении соотношений (*) оператор T подобен унитарному оператору R.

Таким образом, условие (*) необходимо и достаточно для того, чтобы оператор сжатия T был подобен унитарному оператору.

Используя два разложения пространства $\mathfrak{K}_+$:

$$\mathfrak{K}_+ = \mathfrak{H} \oplus M_+(\mathfrak{L}), \quad \mathfrak{K}_+ = M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R}$$

(см. (1.4.4) и (1.4.5)) и обозначая через Q_+ оператор ортогонального проектирования из $M_+(\mathfrak{L})$ в $M_+(\mathfrak{L}_*)$, нетрудно показать, что условие (*) эквивалентно условию

$$\|Q_+l\| \geqslant c\|l\| \text{ для всех } l \in M_+(\mathfrak{L}) \text{ и } Q_+M_+(\mathfrak{L}) = M_+(\mathfrak{L}_*) \qquad (**)$$

с той же самой константой $c > 0$. (Рис. 1.)

Поскольку Q_+ является сужением на $M_+(\mathfrak{L})$ оператора Q, рассмотренного в § 2, то, применяя представления Фурье Φ и

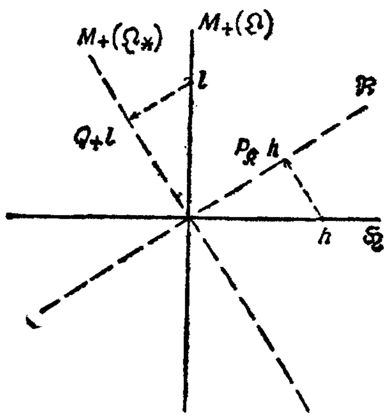

Рис. 1

Φ_*, введенные в § 3.2, или, точнее, их сужения на $M_+(\mathfrak{L})$ и $M_+(\mathfrak{L}_*)$, приходим к выводу, что условие (**) имеет место тогда и только тогда, когда оператор Θ_T: $H^2(\mathfrak{D}) \to H^2(\mathfrak{D}_*)$ является отображением на и имеет ограниченный обратный оператор. А это условие в свою очередь эквивалентно тому, что значения характеристической функции $\Theta_T(\lambda)$ ($|\lambda| < 1$) как операторы из $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}_*$ являются отображениями на и имеют ограниченные обратные, причем $\|\Theta_T(\lambda)^{-1}\| \leqslant 1/c$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. *Оператор сжатия T подобен унитарному оператору тогда и только тогда, когда*

$$\|\Theta_T(\lambda)^{-1}\| \leqslant C \quad (|\lambda| < 1)$$

с некоторой константой C, не зависящей от λ.

Используя оценки (4.1.8), можно записать этот критерий (см. С.-Надь и Фояш [1], гл. IX.1) в эквивалентной форме (Гохберг и Крейн):

Оператор сжатия T подобен унитарному оператору тогда и только тогда, когда существует такая постоянная C', что

$$\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leqslant C'(1-|\lambda|)^{-1} \quad \text{для всех} \quad |\lambda|<1.$$

Примечательно, что, хотя в последней формулировке не содержатся такие понятия, как характеристическая функция и унитарная дилатация, прямого доказательства этой теоремы пока не получено.

§ 5. Инвариантные подпространства и факторизации характеристической функции

1. Как мы уже выяснили, общий вид (с точностью до унитарной эквивалентности) оператора сжатия класса $C_{\cdot 0}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве дается оператором $S(\Theta)$, определенным на пространстве $\mathfrak{H}(\Theta)$, соответствующем чистой сжимающей *внутренней* функции $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$. Именно,

$$\mathfrak{H}(\Theta) = H^2(\mathfrak{A}_*) \ominus \Theta H^2(\mathfrak{A}),$$

$$S(\Theta) = P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(\chi u_*), \qquad S(\Theta)^* u_* = \bar{\chi}(u_* - u_*(0)) \text{ для } u_* \in \mathfrak{H}(\Theta).$$

Пусть $\Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ — факторизация (разложение в произведение) функции $\Theta(\lambda)$ с сомножителями внутреннего типа $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Theta_1(\lambda)\}$ и $\{\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_*, \Theta_2(\lambda)\}$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[rr, "\Theta(\lambda)"] \arrow[dr, "\Theta_1(\lambda)"'] & & \mathfrak{A}_* \\ & \mathfrak{B} \arrow[ur, "\Theta_2(\lambda)"'] & \end{tikzcd}$$

Эта факторизация порождает следующее ортогональное разложение пространства $\mathfrak{H}(\Theta)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}(\Theta) &= H^2(\mathfrak{A}_*) \ominus \Theta_2\Theta_1 H^2(\mathfrak{A}) = \\ &= \Theta_2(H^2(\mathfrak{B}) \ominus \Theta_1 H^2(\mathfrak{A})) \oplus (H^2(\mathfrak{A}_*) \ominus \Theta_2 H^2(\mathfrak{B})) = \\ &= \Theta_2\mathfrak{H}(\Theta_1) \oplus \mathfrak{H}(\Theta_2) \equiv \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2. \end{aligned}$$

Если $u_1 \in \mathfrak{H}(\Theta_1)$, то $\Theta_2\chi u_1 \in \Theta_2 H^2(\mathfrak{B}) \perp \mathfrak{H}_2$ и, следовательно,

$$S(\Theta)\Theta_2 u_1 = P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(\chi\Theta_2 u_1) = P_{\mathfrak{H}_1}(\Theta_2\chi u_1).$$

Поскольку функция $\Theta_2(\lambda)$ является внутренней, оператор $\omega_1 = \Theta_2 | \mathfrak{H}(\Theta_1)$ унитарно отображает $\mathfrak{H}(\Theta_1)$ на пространство $\mathfrak{H}_1$. Поэтому

$$P_{\mathfrak{H}_1}(\Theta_2\chi u_1) = P_{\Theta_2\mathfrak{H}(\Theta_1)}(\Theta_2\chi u_1) = \omega_1 P_{\mathfrak{H}(\Theta_1)}(\chi u_1) = \omega_1 S(\Theta_1) u_1.$$

Отсюда получаем, что

$$S(\Theta)\omega_1 = \omega_1 S(\Theta_1).$$