Используя оценки (4.1.8), можно записать этот критерий (см. С.-Надь и Фояш [1], гл. IX.1) в эквивалентной форме (Гохберг и Крейн):

Оператор сжатия T подобен унитарному оператору тогда и только тогда, когда существует такая постоянная C', что

$$\|(T-\lambda I)^{-1}\| \leqslant C'(1-|\lambda|)^{-1} \quad \textit{для всех} \quad |\lambda|<1.$$

Примечательно, что, хотя в последней формулировке не содержатся такие понятия, как характеристическая функция и унитарная дилатация, прямого доказательства этой теоремы пока не получено.

§ 5. Инвариантные подпространства и факторизации характеристической функции

1. Как мы уже выяснили, общий вид (с точностью до унитарной эквивалентности) оператора сжатия класса $C_{\cdot 0}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве дается оператором $S(\Theta)$, определенным на пространстве $\mathfrak{H}(\Theta)$, соответствующем чистой сжимающей *внутренней* функции $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$. Именно,

$$\mathfrak{H}(\Theta)=H^2(\mathfrak{A}_*)\ominus\Theta H^2(\mathfrak{A}),$$

$$S(\Theta)=P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(\chi u_*), \qquad S(\Theta)^* u_*=\bar{\chi}(u_*-u_*(0)) \text{ для } u_*\in\mathfrak{H}(\Theta).$$

Пусть $\Theta(\lambda)=\Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ — факторизация (разложение в произведение) функции $\Theta(\lambda)$ с сомножителями внутреннего типа $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Theta_1(\lambda)\}$ и $\{\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_*, \Theta_2(\lambda)\}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & \xrightarrow{\Theta(\lambda)} & \mathfrak{A}_* \\ {\scriptstyle\Theta_1(\lambda)}\searrow & & \nearrow{\scriptstyle\Theta_2(\lambda)} \\ & \mathfrak{B} & \end{array}$$

Эта факторизация порождает следующее ортогональное разложение пространства $\mathfrak{H}(\Theta)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}(\Theta)&=H^2(\mathfrak{A}_*)\ominus\Theta_2\Theta_1H^2(\mathfrak{A})=\\&=\Theta_2(H^2(\mathfrak{B})\ominus\Theta_1H^2(\mathfrak{A}))\oplus(H^2(\mathfrak{A}_*)\ominus\Theta_2H^2(\mathfrak{B}))=\\&=\Theta_2\mathfrak{H}(\Theta_1)\oplus\mathfrak{H}(\Theta_2)\equiv\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2.\end{aligned}$$

Если $u_1\in\mathfrak{H}(\Theta_1)$, то $\Theta_2\chi u_1\in\Theta_2H^2(\mathfrak{B})\perp\mathfrak{H}_2$ и, следовательно,

$$S(\Theta)\,\Theta_2u_1=P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(\chi\Theta_2u_1)=P_{\mathfrak{H}_1}(\Theta_2\chi u_1).$$

Поскольку функция $\Theta_2(\lambda)$ является внутренней, оператор $\omega_1=\Theta_2|\mathfrak{H}(\Theta_1)$ унитарно отображает $\mathfrak{H}(\Theta_1)$ на пространство $\mathfrak{H}_1$. Поэтому

$$P_{\mathfrak{H}_1}(\Theta_2\chi u_1)=P_{\Theta_2\mathfrak{H}(\Theta_1)}(\Theta_2\chi u_1)=\omega_1P_{\mathfrak{H}(\Theta_1)}(\chi u_1)=\omega_1S(\Theta_1)\,u_1.$$

Отсюда получаем, что

$$S(\Theta)\,\omega_1=\omega_1S(\Theta_1).$$

Таким образом, $\mathfrak{H}_1$ является инвариантным относительно $S(\Theta)$ подпространством, а сужение $S(\Theta)|\mathfrak{H}_1$ унитарно эквивалентно оператору $S(\Theta_1)$.

Далее, $\mathfrak{H}_2$ инвариантно относительно $S(\Theta)^*$. Для любого $u \in \mathfrak{H}_2$ имеем

$$S(\Theta)^* u = \bar{\chi}(u - u_0) = S(\Theta_2)^* u.$$

Следовательно, $S(\Theta)^* | \mathfrak{H}_2 = S(\Theta_2)^*$.

Итак, оператор $S(\Theta)$ относительно разложения $\mathfrak{H}(\Theta) = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ имеет следующую матричную форму:

$$\begin{bmatrix} S_1 & X \\ 0 & S_2 \end{bmatrix},$$

где S_1 унитарно эквивалентен $S(\Theta_1)$, а S_2 равен $S(\Theta_2)$. Отсюда следует, что характеристические функции операторов S_1 и S_2 совпадают с чистыми частями функций $\Theta_1(\lambda)$ и $\Theta_2(\lambda)$. Поэтому, в частности, *если факторизация нетривиальна* (т. е. ни один из множителей $\Theta_1(\lambda)$, $\Theta_2(\lambda)$ не является унитарной постоянной), *то $\mathfrak{H}_1$ — нетривиальное инвариантное относительно $S(\Theta)$ подпространство.*

Более того, указанным способом получаются *все* подпространства $\mathfrak{H}_1$, инвариантные относительно $S(\Theta)$, или, что то же самое, *все* подпространства $\mathfrak{H}_2$, инвариантные относительно $S(\Theta)^*$. В самом деле, если $\mathfrak{H}_2$ инвариантно относительно $S(\Theta)^*$, то оно также инвариантно относительно обратного сдвига S^*: $u \mapsto \bar{\chi}(u - u_0)$ в $H^2(\mathfrak{A}_*)$. Поэтому $H^2(\mathfrak{A}_*) \ominus \mathfrak{H}_2$ инвариантно относительно одностороннего прямого сдвига S: $u \mapsto \chi u$ в $H^2(\mathfrak{A}_*)$. Применяя теорему Бёрлинга—Лакса—Халмоша, заключаем, что последнее подпространство должно иметь вид $\Theta_2 H^2(\mathfrak{B})$, где $\{\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ — некоторая внутренняя функция. Таким образом,

$$\mathfrak{H}_2 = H^2(\mathfrak{A}_*) \ominus \Theta_2 H^2(\mathfrak{B}) = \mathfrak{H}(\Theta_2).$$

Поскольку $\Theta_2 H^2(\mathfrak{B}) \supset \Theta H^2(\mathfrak{A})$, а $\Theta(\lambda)$ и $\Theta_2(\lambda)$ обе являются внутренними функциями, получаем, используя лемму об операторах, перестановочных с оператором умножения на χ, что $\Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ при некоторой внутренней функции $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Theta_1(\lambda)\}$.

Итак, для операторов $T \in C_{\cdot 0}$ установлено взаимно однозначное соответствие между инвариантными относительно T подпространствами и факторизациями функции $\Theta_T(\lambda)$ с сомножителями внутреннего типа. К сожалению, проблема нахождения таких факторизаций (насколько нам известно) до сих пор решена только для функций $\Theta(\lambda)$, обладающих *скалярным кратным.*

2. Рассмотрим теперь вполне неунитарные сжатия общего вида или, что эквивалентно, операторы $S(\Theta)$, соответствующие произвольным сжимающим аналитическим функциям $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$.

Заметим, что если $\Theta(\lambda)=\Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ — какая-то факторизация $\Theta(\lambda)$ с сомножителями того же типа, то, используя функцию $\Delta(e^{it})=[I-\Theta(e^{it})^*\Theta(e^{it})]^{1/2}$ и ее аналоги, получим

$$\Delta(\cdot)^2=\Theta_1(\cdot)^*\Delta_2(\cdot)^2\Theta_1(\cdot)+\Delta_1(\cdot)^2. \qquad (5.2.1)$$

Отсюда вытекает, что преобразование

$$\Delta(e^{it})a\mapsto\Delta_2(e^{it})\Theta_1(e^{it})a\oplus\Delta_1(e^{it})a \quad (a\in\mathfrak{A})$$

является изометрией для почти каждого фиксированного $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ и, следовательно, может быть продолжено по непрерывности до изометрии

$$Z(e^{it})\colon\ \Delta(e^{it})\mathfrak{A}\to\Delta_2(e^{it})\mathfrak{B}\oplus\Delta_1(e^{it})\mathfrak{A}.$$

Из формулы (5.2.1) также следует, что преобразование

$$\Delta u\mapsto\Delta_2\Theta_1u\oplus\Delta_1u \quad (u\in L^2(\mathfrak{A}))$$

тоже изометрично и, значит, может быть продолжено по непрерывности до изометрии

$$Z\colon\ \overline{\Delta L^2(\mathfrak{A})}\to\overline{\Delta_2L^2(\mathfrak{B})}\oplus\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{A})}.$$

Легко показать, что следующие два условия эквивалентны:

Локальное условие: $Z(e^{it})$ унитарно (т. е. является отображением на) для почти каждого фиксированного $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Глобальное условие: Z унитарно (т. е. является отображением на).

Если эти условия выполнены, то факторизацию $\Theta(\lambda)=\Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ назовем *регулярной*. В этом случае элементы пространств

$$\overline{\Delta L^2(\mathfrak{A})} \quad \text{и} \quad \overline{\Delta_2L^2(\mathfrak{B})}\oplus\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{A})},$$

переходящие друг в друга при унитарном отображении Z, можно отождествить и получить следующее разложение для $\mathfrak{H}(\Theta)$:

$$\mathfrak{H}(\Theta)=[H^2(\mathfrak{A}_*)\oplus\overline{\Delta_2L^2(\mathfrak{B})}\oplus\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{A})}]\ominus$$
$$\ominus\{\Theta_2\Theta_1u\oplus\Delta_2\Theta_1u\oplus\Delta_1u\colon\ u\in H^2(\mathfrak{A})\},$$

из которого следует, что

$$\mathfrak{H}(\Theta)=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2,$$

где

$$\mathfrak{H}_2=[H^2(\mathfrak{A}_*)\oplus\overline{\Delta_2L^2(\mathfrak{B})}\oplus\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{A})}]\ominus\{\Theta_2w\oplus\Delta_2w\oplus v\colon\ w\in H^2(\mathfrak{B}),$$
$$v\in\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{A})}\}=\mathfrak{H}(\Theta_2)\oplus\{0\},$$
$$\mathfrak{H}_1=\{\Theta_2w\oplus\Delta_2w\oplus v\colon\ w\in H^2(\mathfrak{B}),\ v\in\overline{\Delta_1L^2(\mathfrak{A})}\}\ominus$$
$$\ominus\{\Theta_2\Theta_1u\oplus\Delta_2\Theta_1u\oplus\Delta_1u\colon\ u\in H^2(\mathfrak{A})\}=\omega_2\mathfrak{H}(\Theta_1). \qquad (5.2.2)$$

Здесь через ω_2 обозначен унитарный оператор $\mathfrak{H}(\Theta_1)\to\mathfrak{H}_1$, полученный сужением на $\mathfrak{H}(\Theta_1)$ изометрии

$$u\oplus v\mapsto\Theta_2u\oplus\Delta_2u\oplus v \quad (u\in H^2(\mathfrak{B}),\quad v\in L^2(\mathfrak{A})).$$

Рассуждая, как и в случае факторизаций с сомножителями внутреннего типа, получаем, что $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно $S(\Theta)$ и что имеет место соответствующее матричное представление

$$S(\Theta)=\begin{bmatrix} S_1 & X \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}, \tag{5.2.3}$$

в котором операторы S_1 и S_2 унитарно эквивалентны соответственно операторам $S(\Theta_1)$ и $S(\Theta_2)$. В частности, $\mathfrak{H}_1$ является нетривиальным подпространством, инвариантным относительно $S(\Theta)$, тогда и только тогда, когда факторизация нетривиальна.

Рассуждения эти очень просты. Значительно труднее доказывается, что и в этом общем случае указанной процедурой получаются *все* инвариантные относительно $S(\Theta)$ подпространства. Доказательство этого факта основано на подробном изучении свойств минимальной изометричной дилатации и на деле дает существенное обобщение теоремы Бёрлинга—Лакса—Халмоша, использованной в § 5.1. Но мы не будем вдаваться в детали.

Итак, имеет место

Теорема. *Если $\Theta(\lambda)=\Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ пробегает все регулярные факторизации данной сжимающей аналитической функции $\Theta(\lambda)$, то подпространство $\mathfrak{H}_1$ пространства $\mathfrak{H}(\Theta)$, даваемое формулой* (5.2.2), *пробегает все инвариантные относительно $S(\Theta)$ подпространства. Более того, в соответствующей триангуляции*

$$S(\Theta)=\begin{bmatrix} S_1 & * \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

операторы S_1 и S_2 унитарно эквивалентны $S(\Theta_1)$ и $S(\Theta_2)$ соответственно.

3. Приведенная теорема не исключает возможности, что какому-то инвариантному подпространству с указанными выше свойствами будет поставлена в соответствие каким-то образом (если не формулой (5.2.2)) также и некоторая нерегулярная факторизация. Такие «странные» факторизации существуют (см. Фояш [2]). Однако не все нерегулярные факторизации являются странными. Например, если $\Theta(\lambda)=\Theta_2(\lambda)\Theta_1(\lambda)$ — какая-то факторизация внутренней функции $\Theta(\lambda)$ и если

$$S(\Theta)=\begin{bmatrix} S_1 & * \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$$

— триангуляция, в которой S_1 и S_2 унитарно эквивалентны $S(\Theta_1)$ и $S(\Theta_2)$ соответственно, то включение $S(\Theta)\in C_{\cdot 0}$ влечет за собой включения $S(\Theta_1)\in C_{\cdot 0}$ и $S(\Theta_2)\in C_{\cdot 0}$, так что $\Theta_1(\lambda)$ и $\Theta_2(\lambda)$ также являются внутренними функциями. Поскольку все факторизации с сомножителями в виде внутренних функций регулярны, то странных факторизаций для внутренней функции нет. С другой стороны, известно, что если исходное гильбертово пространство $\mathfrak{A}$ бесконечномерно, то внутренняя функция $\Theta(\lambda)$ обязательно имеет нерегулярные факторизации, причем даже такие, в которых $\Theta_1(\lambda)$ является внутренней, а $\Theta_2(\lambda)$ — внешней функцией и ни одна из них не сводится к унитарной постоянной.

В настоящее время способов описания всех сжимающих аналитических функций $\Theta(\lambda)$, имеющих странные факторизации, да и способов описания самих странных факторизаций пока нет.

§ 6. Коммутативные семейства

1. Естественным обобщением понятия дилатации одного оператора является следующее.

Пусть $\mathcal{A}=\{A_\omega\}$ — коммутативное семейство операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Семейство $\mathcal{B}=\{B_\omega\}$ операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{K}$ назовем *дилатацией* семейства $\mathcal{A}$, если $\mathfrak{H}$ является подпространством в $\mathfrak{K}$, семейство $\mathcal{B}$ коммутативно и

$$A_{\omega_1}^{n_1}\dots A_{\omega_r}^{n_r}=P_{\mathfrak{H}}B_{\omega_1}^{n_1}\dots B_{\omega_r}^{n_r}\Big|\mathfrak{H}\quad (n_i\geqslant 0,\ i=1,\ \dots,\ r) \tag{6.1.1}$$

для любого конечного набора $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ из множества индексов.

Теорема (Т. Андо). *Всякая коммутативная пара сжатий $\{T_1, T_2\}$ обладает унитарной* (т. е. состоящей из унитарных операторов) *дилатацией $\{U_1, U_2\}$.*

Поскольку, как легко проверить, всякая пара перестановочных изометричных операторов может быть продолжена до пары перестановочных унитарных операторов (этот факт, кстати, имеет место и для коммутативного семейства изометричных операторов с любым числом элементов), то достаточно доказать существование дилатации $\{V_1, V_2\}$, в которой V_1 и V_2 — *изометрии*.

Не ставя целью построение минимальной дилатации, рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{K}$, элементами которого являются векторы

$$k=\langle h_0,\ h_1,\ h_2,\ \dots\rangle,\quad \text{где}\quad h_i\in\mathfrak{H},\quad \|k\|^2=\sum_0^\infty\|h_i\|^2<\infty.$$

Вложим $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{K}$, отождествив каждый элемент $h\in\mathfrak{H}$ с вектором $\langle h, 0, 0, \dots\rangle\in\mathfrak{K}$. Определим изометрии W_i $(i=1, 2)$ в $\mathfrak{K}$ формулами

$$W_i\langle h_0,\ h_1,\ h_2,\ \dots\rangle=\langle T_ih_0,\ D_ih_0,\ 0,\ h_1,\ h_2,\ \dots\rangle,$$

где $D_i=(I-T_i^*T_i)^{1/2}$. Тогда, очевидно,

$$T_1^{n_1}T_2^{n_2}=P_{\mathfrak{H}}W_1^{n_1}W_2^{n_2}\,|\,\mathfrak{H}\quad (n_i\geqslant 0),$$

даже если T_1 и T_2 не перестановочны. Оказывается, что W_1 и W_2 в общем случае не перестановочны (даже если T_1 перестанов-