то странных факторизаций для внутренней функции нет. С другой стороны, известно, что если исходное гильбертово пространство $\mathfrak{A}$ бесконечномерно, то внутренняя функция $\Theta(\lambda)$ обязательно имеет нерегулярные факторизации, причем даже такие, в которых $\Theta_1(\lambda)$ является внутренней, а $\Theta_2(\lambda)$ — внешней функцией и ни одна из них не сводится к унитарной постоянной.

В настоящее время способов описания всех сжимающих аналитических функций $\Theta(\lambda)$, имеющих странные факторизации, да и способов описания самих странных факторизаций пока нет.

§ 6. Коммутативные семейства

1. Естественным обобщением понятия дилатации одного оператора является следующее.

Пусть $\mathcal{A}=\{A_\omega\}$ — коммутативное семейство операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Семейство $\mathcal{B}=\{B_\omega\}$ операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{K}$ назовем *дилатацией* семейства $\mathcal{A}$, если $\mathfrak{H}$ является подпространством в $\mathfrak{K}$, семейство $\mathcal{B}$ коммутативно и

$$A_{\omega_1}^{n_1}\ldots A_{\omega_r}^{n_r}=P_{\mathfrak{H}}B_{\omega_1}^{n_1}\ldots B_{\omega_r}^{n_r}\big|\mathfrak{H}\quad (n_i\geqslant 0,\ i=1,\ \ldots,\ r)\qquad (6.1.1)$$

для любого конечного набора $\{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ из множества индексов.

Теорема (Т. Андо). *Всякая коммутативная пара сжатий $\{T_1, T_2\}$ обладает унитарной* (т. е. состоящей из унитарных операторов) *дилатацией $\{U_1, U_2\}$.*

Поскольку, как легко проверить, всякая пара перестановочных изометричных операторов может быть продолжена до пары перестановочных унитарных операторов (этот факт, кстати, имеет место и для коммутативного семейства изометричных операторов с любым числом элементов), то достаточно доказать существование дилатации $\{V_1, V_2\}$, в которой V_1 и V_2 — *изометрии.*

Не ставя целью построение минимальной дилатации, рассмотрим гильбертово пространство $\mathfrak{K}$, элементами которого являются векторы

$$k=\langle h_0,\ h_1,\ h_2,\ \ldots\rangle,\quad \text{где}\quad h_i\in\mathfrak{H},\quad \|k\|^2=\sum_0^\infty\|h_i\|^2<\infty.$$

Вложим $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{K}$, отождествив каждый элемент $h\in\mathfrak{H}$ с вектором $\langle h,\ 0,\ 0,\ \ldots\rangle\in\mathfrak{K}$. Определим изометрии W_i $(i=1,\ 2)$ в $\mathfrak{K}$ формулами

$$W_i\langle h_0,\ h_1,\ h_2,\ \ldots\rangle=\langle T_ih_0,\ D_ih_0,\ 0,\ h_1,\ h_2,\ \ldots\rangle,$$

где $D_i=(I-T_i^*T_i)^{1/2}$. Тогда, очевидно,

$$T_1^{n_1}T_2^{n_2}=P_{\mathfrak{H}}W_1^{n_1}W_2^{n_2}\,|\,\mathfrak{H}\quad (n_i\geqslant 0),$$

даже если T_1 и T_2 не перестановочны. Оказывается, что W_1 и W_2 в общем случае не перестановочны (даже если T_1 перестановочен с T_2). Таким образом, задача заключается в том, чтобы модифицировать пару W_1, W_2, не изменяя нулевых компонент, так, чтобы новая пара изометрий уже была коммутативной.

Для этого рассмотрим вспомогательный унитарный оператор G в пространстве $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$ (определение оператора G дадим позже) и унитарный оператор $\boldsymbol{G}$ в $\mathfrak{K}$, задаваемый формулой

$$\boldsymbol{G}k=\boldsymbol{G}\langle h_0,\ h_1,\ h_2,\ \ldots\rangle=\langle h_0,\ G\langle h_1,\ \ldots,\ h_4\rangle,\ G\langle h_5,\ \ldots,\ h_8\rangle,\ \ldots\rangle.$$

Затем рассмотрим изометрии $V_1=\boldsymbol{G}W_1$ и $V_2=W_2\boldsymbol{G}^{-1}$, являющиеся, очевидно, допустимыми модификациями W_1 и W_2. Простые вычисления показывают, что

$$V_1V_2\langle h_0,\ h_1,\ \ldots\rangle=\langle T_1T_2h_0,\ G\langle D_1T_2h_0,\ 0,\ D_2h_0,\ 0\rangle,\ h_1,\ h_2,\ \ldots\rangle,$$
$$V_2V_1\langle h_0,\ h_1,\ \ldots\rangle=\langle T_2T_1h_0,\ D_2T_1h_0,\ 0,\ D_1h_0,\ 0,\ h_1,\ h_2,\ \ldots\rangle.$$

Таким образом, V_1 и V_2 перестановочны тогда и только тогда, когда

$$G\langle D_1T_2h,\ 0,\ D_2h,\ 0\rangle=\langle D_2T_1h,\ 0,\ D_1h,\ 0\rangle$$

для каждого $h\in\mathfrak{H}$. Поскольку

$$\|\langle D_1T_2h,\ 0,\ D_2h,\ 0\rangle\|^2=\|h\|^2-\|T_1T_2h\|^2=\|\langle D_2T_1h,\ 0,\ D_1h,\ 0\rangle\|^2$$

(именно здесь использована перестановочность T_1 и T_2), приведенным выше условием изометрия G определяется однозначно на линейном многообразии $\mathfrak{G}_1=\{\langle D_1T_2h,\ 0,\ D_2h,\ 0\rangle\}$ из $\mathfrak{G}$, отображая его на $\mathfrak{G}_2=\{\langle D_2T_1h,\ 0,\ D_1h,\ 0\rangle\}$. Для того чтобы установить возможность расширения оператора G до унитарного оператора в $\mathfrak{G}$, необходимо и достаточно проверить, что подпространства $\mathfrak{G}_1^{\perp}$ и $\mathfrak{G}_2^{\perp}$ (ортогональные дополнения в $\mathfrak{G}$ к $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$) имеют одинаковую размерность. Если $\mathfrak{H}$, а с ним и $\mathfrak{G}$ конечномерны, то равенство размерностей очевидно. Если же $\dim\mathfrak{H}=\infty$, то $\mathfrak{G}_1^{\perp}$ и $\mathfrak{G}_2^{\perp}$ содержат подпространства той же размерности, что и $\mathfrak{H}$. Следовательно,

$$\dim\mathfrak{H}\leqslant\dim\mathfrak{G}_i^{\perp}\leqslant\dim\mathfrak{G}=4\dim\mathfrak{H}=\dim\mathfrak{H}\quad(i=1,\ 2),$$

что и завершает доказательство.

2. Хотя приведенное доказательство существенно опирается на то, что сжатий два, долгое время существовала надежда, что теорема верна и для семейств, содержащих более двух операторов. Эта надежда угасла, когда С. Пэррот построил пример трех перестановочных сжатий T_1, T_2, T_3, для которых *не существует трех перестановочных унитарных операторов* U_1, U_2, U_3, *таких, что* $T_i=P_{\mathfrak{H}}U_i\,|\,\mathfrak{H}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$.

Разберем контрпример С. Пэррота. Начнем с трех произвольных унитарных операторов A_1, A_2, A_3 в гильбертовом пространстве $\mathfrak{A}$, таких, что

$$A_1 A_2^{-1} A_3 \neq A_3 A_2^{-1} A_1 \qquad (6.2.1)$$

(например, возьмем $A_2 = I$, а в качестве A_1 и A_3 выберем два неперестановочных унитарных оператора, всегда существующих, если $\dim \mathfrak{A} \geqslant 2$). Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{A}$. Определим операторы T_i в $\mathfrak{H}$ формулами

$$T_i \langle a_1, a_2 \rangle = \langle 0, A_i a_1 \rangle \quad (i = 1, 2, 3).$$

Очевидно, что $\|T_i\| = 1$ и что $T_i T_j = 0$ для $i, j = 1, 2, 3$. Предположим, что найдутся перестановочные унитарные операторы U_i $(i = 1, 2, 3)$, для которых $T_i = P_{\mathfrak{H}} U_i \,|\, \mathfrak{H}$. Тогда

$$P_{\mathfrak{H}} U_i \langle a, 0 \rangle = T_i \langle a, 0 \rangle = \langle 0, A_i a \rangle, \quad \|U_i \langle a, 0 \rangle\| = \|\langle a, 0 \rangle\| = \|\langle 0, A_i a \rangle\|,$$

так что $U_i \langle a, 0 \rangle = \langle 0, A_i a \rangle$ и, следовательно,

$$U_j^{-1} U_i \langle a, 0 \rangle = \langle A_j^{-1} A_i a, 0 \rangle, \quad U_k U_j^{-1} U_i \langle a, 0 \rangle = \langle 0, A_k A_j^{-1} A_i a \rangle.$$

Поскольку операторы U_i перестановочны, $A_k A_j^{-1} A_i = A_i A_j^{-1} A_k$, что противоречит (6.2.1).

3. Пусть $\mathcal{A} = \{A_\omega\}$ — коммутативное семейство операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а $\mathcal{B} = \{B_\omega\}$ — его дилатация. Дилатация $\mathcal{B}$ называется *регулярной*, если для любых двух конечных непересекающихся наборов $\{\omega_j\}$ и $\{\omega_i'\}$ из множества индексов и для любых целых $m_i, n_j \geqslant 0$ имеет место соотношение

$$\prod_i A_{\omega_i'}^{*m_i} \prod_j A_{\omega_j}^{n_j} = P_{\mathfrak{H}} \prod_i B_{\omega_i'}^{*m_i} \prod_j B_{\omega_j}^{n_j} \Big| \mathfrak{H}. \qquad (6.3.1)$$

И вот, несмотря на то, что пока у нас нет критериев существования унитарной дилатации у коммутативных семейств сжатий, содержащих более двух элементов, критерии существования регулярной унитарной дилатации имеются. Именно, справедлива

Теорема (Бремер). *Для того чтобы коммутативное семейство $\mathcal{T} = \{T_\omega\}$ сжатий в $\mathfrak{H}$ допускало регулярную унитарную дилатацию, необходимо и достаточно, чтобы для каждого конечного набора $\{T_1, T_2, \ldots, T_r\}$ из $\mathcal{T}$ и для любого $h \in \mathfrak{H}$ выполнялось неравенство*

$$\|h\|^2 - \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \|T_i h\|^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r} \|T_i T_j h\|^2 -$$
$$- \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant r} \|T_i T_j T_k h\|^2 + \ldots + (-1)^r \|T_1 T_2 \ldots T_r h\|^2 \geqslant 0. \qquad (6.3.2)$$

Частные случаи

1) $\mathcal{T}$ состоит из изометрий. В этом случае левая часть (6.3.2) равна $(1-1)^r \|h\|^2$, т. е. 0.

2) $\mathcal{T}$ состоит из *дважды* перестановочных сжатий, т. е. таких, что T_ω перестановочно как с $T_{\omega'}$, так и с $T_{\omega'}^*$ при $\omega \neq \omega'$. В этом

случае левая часть (6.3.2) равна (Th, h), где $T = \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} (I - T_i^* T_i)$, а это произведение является положительным оператором, ибо его сомножители положительны и перестановочны.

3) $\sum_\omega \|T_\omega\|^2 \leqslant 1$. В этом случае полагаем для $p = 0, 1, \ldots, r$

$$a_p(h) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant r} \|T_{i_1} \ldots T_{i_p} h\|^2.$$

Замечая, что при $p = 1, \ldots, r$

$$a_p(h) \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant r} \|T_{i_p}\|^2 \|T_{i_1} \ldots T_{i_{p-1}} h\|^2 =$$

$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{p-1} < r} \left[\|T_{i_1} \ldots T_{i_{p-1}} h\|^2 \sum_{i_{p-1} < i \leqslant r} \|T_i\|^2 \right] \leqslant a_{p-1}(h),$$

будем иметь $a_0(h) - a_1(h) + a_2(h) + \ldots + (-1)^r a_r(h) \geqslant 0$, что и требовалось.

4. Если конечное коммутативное семейство $\{T_1, \ldots, T_r\}$ сжатий в $\mathfrak{H}$ имеет унитарную дилатацию $\{U_1, \ldots, U_r\}$, то

$$p(T_1, \ldots, T_r) = P_{\mathfrak{H}} p(U_1, \ldots, U_r) \mid \mathfrak{H}$$

для любого многочлена $p(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ и, следовательно,

$$\|p(T_1, \ldots, T_r)\| \leqslant \|p(U_1, \ldots, U_r)\|.$$

Из спектральной теории перестановочных унитарных операторов известно, что $\|p(U_1, \ldots, U_r)\| \leqslant \|p\|_\infty$, где через $\|p\|_\infty$ обозначен максимум функции $|p(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)|$ на области $|\lambda_i| \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, r)$. Таким образом, имеем

$$\|p(T_1, \ldots, T_r)\| \leqslant \|p\|_\infty. \tag{6.4.1}$$

Поскольку один или пара перестановочных операторов сжатия имеют унитарные дилатации, то равенство (6.4.1) выполнено при $r = 1$ и $r = 2$ (для $r = 1$ оно было доказано совершенно иным методом И. Нейманом в 1951 г.).

Совсем недавно Варопулос [1] показал, что существуют коммутативные семейства сжатий даже при $r = 3$, для которых формула (6.4.1) не верна.

§ 7. Лифтинг решений операторных уравнений

1. Пусть T — сжатие в $\mathfrak{H}$ и U_+ — его минимальная изометричная дилатация в пространстве

$$\mathfrak{K}_+ = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{L} \oplus U_+ \mathfrak{L} \oplus U_+^2 \mathfrak{L} \oplus \ldots$$

(см. (1.4.4)). Обозначим через P_+ оператор ортогонального проектирования из $\mathfrak{K}_+$ на $\mathfrak{H}$. Пусть W — изометрия в некотором пространстве $\mathfrak{G}$,