случае левая часть (6.3.2) равна (Th, h), где $T=\prod_{1\leqslant i\leqslant r}(I-T_i^*T_i)$, а это произведение является положительным оператором, ибо его сомножители положительны и перестановочны.

3) $\sum_\omega\|T_\omega\|^2\leqslant 1$. В этом случае полагаем для $p=0, 1, \ldots, r$

$$a_p(h)=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant r}\|T_{i_1}\ldots T_{i_p}h\|^2.$$

Замечая, что при $p=1, \ldots, r$

$$a_p(h)\leqslant\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant r}\|T_{i_p}\|^2\|T_{i_1}\ldots T_{i_{p-1}}h\|^2=$$
$$=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_{p-1}<r}\left[\|T_{i_1}\ldots T_{i_{p-1}}h\|^2\sum_{i_{p-1}<i\leqslant r}\|T_i\|^2\right]\leqslant a_{p-1}(h),$$

будем иметь $a_0(h)-a_1(h)+a_2(h)+\ldots+(-1)^r a_r(h)\geqslant 0$, что и требовалось.

4. Если конечное коммутативное семейство $\{T_1, \ldots, T_r\}$ сжатий в $\mathfrak{H}$ имеет унитарную дилатацию $\{U_1, \ldots, U_r\}$, то

$$p(T_1, \ldots, T_r)=P_{\mathfrak{H}}p(U_1, \ldots, U_r)\,|\,\mathfrak{H}$$

для любого многочлена $p(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ и, следовательно,

$$\|p(T_1, \ldots, T_r)\|\leqslant\|p(U_1, \ldots, U_r)\|.$$

Из спектральной теории перестановочных унитарных операторов известно, что $\|p(U_1, \ldots, U_r)\|\leqslant\|p\|_\infty$, где через $\|p\|_\infty$ обозначен максимум функции $|p(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)|$ на области $|\lambda_i|\leqslant 1$ $(i=1, \ldots, r)$. Таким образом, имеем

$$\|p(T_1, \ldots, T_r)\|\leqslant\|p\|_\infty. \tag{6.4.1}$$

Поскольку один или пара перестановочных операторов сжатия имеют унитарные дилатации, то равенство (6.4.1) выполнено при $r=1$ и $r=2$ (для $r=1$ оно было доказано совершенно иным методом И. Нейманом в 1951 г.).

Совсем недавно Варопулос [1] показал, что существуют коммутативные семейства сжатий даже при $r=3$, для которых формула (6.4.1) не верна.

§ 7. Лифтинг решений операторных уравнений

1. Пусть T — сжатие в $\mathfrak{H}$ и U_+ — его минимальная изометричная дилатация в пространстве

$$\mathfrak{K}_+=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{L}\oplus U_+\mathfrak{L}\oplus U_+^2\mathfrak{L}\oplus\ldots$$

(см. (1.4.4)). Обозначим через P_+ оператор ортогонального проектирования из $\mathfrak{K}_+$ на $\mathfrak{H}$. Пусть W — изометрия в некотором пространстве $\mathfrak{G}$, Теорема 1. *Для каждого оператора* X: $\mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{H}$, *такого, что*

$$TX = XW, \tag{7.1.1}$$

существует оператор Y: $\mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{K}_+$, *такой, что*

$$U_+Y = YW, \quad X = P_+Y. \tag{7.1.2}$$

Более того, можно потребовать даже, чтобы выполнялось равенство

$$\|Y\| = \|X\|. \tag{7.1.3}$$

[Такой оператор Y называется *лифтингом* оператора X.]

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $\|X\| = 1$ и построить для него Y, удовлетворяющий (7.1.2) и неравенству $\|Y\| \leqslant 1$ (обратное неравенство $\|X\| \leqslant \|Y\|$ является очевидным следствием соотношения $X = P_+Y$).

Общий вид оператора Y дается формулой

$$Y = X + B_0 + U_+B_1 + U_+^2B_2 + \ldots, \tag{7.1.4}$$

где все B_n ($n = 0, 1, \ldots$) суть операторы из $\mathfrak{G}$ в $\mathfrak{L}$. Условие $\|Y\| \leqslant 1$ сводится к неравенству

а) $\|Xg\|^2 + \sum_0^\infty \|B_ng\|^2 \leqslant \|g\|^2$ для всех $g \in \mathfrak{G}$.

Поскольку, как следует из (7.1.4),

$$U_+Y - YW = \sum_0^\infty U_+^n (B_{n-1} - B_nW), \quad B_{-1} = U_+X - XW,$$

то, в силу (7.1.1) и (7.1.2), приходим к уравнениям

б) $B_{n-1} = B_nW$ ($n \geqslant 0$) и $B_{-1} = (U_+ - T)X$.

Замечая, что $\|(U_+ - T)h\|^2 = \|h\|^2 - \|Th\|^2$ для всех $h \in \mathfrak{H}$, получаем из (7.1.1)

$$\|B_{-1}g\|^2 = \|(U_+ - T)Xg\|^2 = \|Xg\|^2 - \|TXg\|^2 = \|Xg\|^2 - \|XWg\|^2. \tag{7.1.5}$$

В силу соотношений $\|Xg\| \leqslant \|g\| = \|Wg\|$, выводим из (7.1.5), что

$$\|B_{-1}g\|^2 \leqslant \|D_0Wg\|^2, \quad \text{где} \quad D_0 = (I_{\mathfrak{G}} - X^*X)^{1/2}.$$

Итак, отображение C_0: $D_0Wg \mapsto B_{-1}g$ ($g \in \mathfrak{G}$) является линейным и сжимающим, и, следовательно, может быть продолжено до сжатия, определенного на всем пространстве $\mathfrak{G}$, со значениями в $\mathfrak{L}$. Это продолжение будем обозначать той же буквой C_0. Положим $B_0 = C_0D_0$. Тогда, очевидно, $B_0W = B_{-1}$, т. е. равенство б) выполнено при $n = 0$. Более того,

$$\|Xg\|^2 + \|B_0g\|^2 = \|Xg\|^2 + \|C_0D_0g\|^2 \leqslant \|Xg\|^2 + \|D_0g\|^2 = \|g\|^2.$$

Далее рассуждаем по индукции. Пусть $N \geqslant 1$, и пусть уже построены операторы B_n $(n < N)$, удовлетворяющие условиям

$$\text{а})_N \quad s_N(g) := \|Xg\|^2 + \sum_0^{N-1} \|B_n g\|^2 \leqslant \|g\|^2 \quad (g \in \mathfrak{G}),$$

$$\text{б})_N \quad B_n W = B_{n-1} \quad (n = 0, \ldots, N-1).$$

Тогда, в силу (7.1.5) и соотношения б)$_N$,

$$s_N(g) - s_N(Wg) = \|Xg\|^2 - \|XWg\|^2 + \sum_0^{N-1} \|B_n g\|^2 - \sum_0^{N-1} \|B_n W g\|^2 = \|B_{N-1} g\|^2.$$

Учитывая неравенство а)$_N$, получим отсюда

$$\|B_{N-1}g\|^2 = s_N(g) - s_N(Wg) \leqslant \|g\|^2 - s_N(Wg) = \|Wg\|^2 - s_N(Wg) = \|D_N Wg\|^2,$$

где $D_N = \left(I_{\mathfrak{G}} - X^*X - \sum_{n=0}^{N-1} B_n^* B_n\right)^{1/2}$.

Из полученного неравенства выводим, как и ранее, что существует сжатие C_N: $\mathfrak{G} \to \mathfrak{L}$, для которого $B_{N-1} = C_N D_N W$. Если положить $B_N = C_N D_N$, то будет $B_N W = B_{N-1}$ и

$$\|B_N g\|^2 = \|C_N D_N g\|^2 \leqslant \|D_N g\|^2 = \|g\|^2 - s_N(g).$$

А это и означает, что справедливы соотношения а)$_{N+1}$ и б)$_{N+1}$.

Таким образом, операторы B_n определены по индукции, а формулы а) и б) получаются предельным переходом из а)$_N$ и б)$_N$. Доказательство закончено.

2. Перейдем теперь к общей теореме о лифтинге решений операторного уравнения, содержащего два данных оператора сжатия T и T', определенных на пространствах соответственно $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$.

Пусть U_+ и U'_+ — соответствующие этим сжатиям минимальные изометричные дилатации, определенные на пространствах $\mathfrak{K}_+$ и $\mathfrak{K}'_+$ соответственно. Обозначим через P_+ и P'_+ операторы ортогонального проектирования соответственно из $\mathfrak{K}_+$ на $\mathfrak{H}$ и из $\mathfrak{K}'_+$ на $\mathfrak{H}'$.

Теорема 2. *Для каждого оператора* X: $\mathfrak{H}' \to \mathfrak{H}$, *такого, что*

а) $$TX = XT',$$

существует оператор Y: $\mathfrak{K}'_+ \to \mathfrak{K}_+$, *удовлетворяющий условиям:*

б) $$U_+ Y = Y U'_+,$$

в′) $$X = P_+ Y | \mathfrak{H}',$$

в″) $$Y(\mathfrak{K}'_+ \ominus \mathfrak{H}') \subset \mathfrak{K}_+ \ominus \mathfrak{H},$$

г) $$\|Y\| = \|X\|.$$

Обратно, каждое решение Y уравнения б), *удовлетворяющее условию* в″), *определяет по формуле* в′) *некоторое решение X уравнения* а).

Доказательство. Заметим прежде всего, что условия в′) и в″) в совокупности эквивалентны одному условию

$$\text{в)} \qquad XP'_+ = P_+Y.$$

Рассмотрим произвольное решение X уравнения а). Умножая а) справа на P'_+ и используя равенство $T'P'_+ = P'_+U'_+$ (см. (1.4.2)), получим

$$TX_0 = X_0U'_+, \quad \text{где} \quad X_0 = XP'_+.$$

Применяя теорему 1 для случая $W = U'_+$, видим, что существует оператор $Y\colon \mathfrak{K}'_+ \to \mathfrak{K}_+$, такой, что

$$U_+Y = YU'_+, \quad X_0 = P_+Y, \quad \|Y\| = \|X_0\| (= \|X\|).$$

Отсюда $XP'_+ = X_0 = P_+Y$, так что выполнено в).

Обратно, рассмотрим оператор Y, удовлетворяющий б) и в″). Применяя соотношение (1.4.2) к операторам T и T' и используя равенство $P_+Y(I - P'_+) = 0$, эквивалентное в″), получим

$$TP_+Y \mid \mathfrak{H}' = P_+U_+Y \mid \mathfrak{H}' = P_+YU'_+ \mid \mathfrak{H}' = P_+Y(P'_+ + I - P'_+)\, U'_+ \mid \mathfrak{H}' = \\ = P_+YP'_+U'_+ \mid \mathfrak{H}' = P_+YT'P'_+ \mid \mathfrak{H}' = P_+YT'.$$

Полагая $X = P_+Y \mid \mathfrak{H}'$, получаем а) и завершаем доказательство.

3. Обозначим через $\mathcal{J}(T', T)$ множество всех решений X уравнения а), через $\mathcal{J}^+(T', T)$ — множество операторов Y, удовлетворяющих условиям б) и в″). Тогда формула в′) определяет линейное отображение

$$\pi\colon \mathcal{J}^+(T', T) \to \mathcal{J}(T', T),$$

которое не увеличивает нормы. В силу теоремы 2 это отображение является отображением *на*. Более того, для каждого $X \in \mathcal{J}(T', T)$ найдется по крайней мере один $Y \in \pi^{-1}(X)$, такой, что $\|Y\| = \|X\|$.

Следующее свойство является простым следствием соотношення в).

Мультипликативное свойство оператора π. Если T_1, T_2, T_3 — три сжатия и если $Y \in \mathcal{J}^+(T_1, T_2)$, а $Z \in \mathcal{J}^+(T_2, T_3)$, то

$$ZY \in \mathcal{J}^+(T_1, T_3) \quad \text{и} \quad \pi_{13}(ZY) = \pi_{23}(Z)\, \pi_{12}(Y)$$

(смысл индексов очевиден).

Отметим также, что в случае одиого сжатия T в $\mathfrak{H}$

$$I_{\mathfrak{K}_+} \in \mathcal{J}^+(T, T) \quad \text{и} \quad \pi(I_{\mathfrak{K}_+}) = I_{\mathfrak{H}}.$$

Здесь $\mathfrak{K}_+$ — соответствующее T пространство минимальной изометричной дилатации.

4. Вернемся к случаю двух сжатий T и T'. Рассмотрим разложения Вольда пространств $\mathfrak{K}_+$ и $\mathfrak{K}'_+$, порожденные операторами U_+ и U'_+:

$$\mathfrak{K}_+ = M_+(\mathfrak{L}_*) \oplus \mathfrak{R} \quad \text{и} \quad \mathfrak{K}'_+ = M_+(\mathfrak{L}'_*) \oplus \mathfrak{R}', \tag{7.4.1}$$

где

$$\mathfrak{R} = \bigcap_0^\infty U_+^n \mathfrak{K}_+ \quad \text{и} \quad \mathfrak{R}' = \bigcap_0^\infty U_+'^n \mathfrak{R}'_+ \tag{7.4.2}$$

(см. (1.4.5) и (1.4.6)).

Для каждого оператора Y, удовлетворяющего равенству $U_+Y = YU'_+$, имеем

$$Y\mathfrak{R}' \subset \bigcap_0^\infty YU_+'^n \mathfrak{R}'_+ = \bigcap_0^\infty U_+^n Y \mathfrak{R}'_+ \subset \bigcap_0^\infty U_+^n \mathfrak{K}_+ = \mathfrak{R}.$$

Таким образом, разложения (7.4.1) ставят в соответствие оператору Y матричное представление вида

$$Y = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}. \tag{7.4.3}$$

Полагая $S_* = U_+ | M_+(\mathfrak{L}_*)$, $R = U_+ | \mathfrak{R}$, $S'_* = U'_+ | M_+(\mathfrak{L}'_*)$, $R' = U'_+ | \mathfrak{R}'$, очевидно, имеем

$$A \in \mathcal{J}(S'_*, S_*), \quad B \in \mathcal{J}(S'_*, R), \quad C \in \mathcal{J}(R', R). \tag{7.4.4}$$

Обратно, как видно из (7.4.4), для оператора Y, определенного формулой (7.4.3), выполнено включение $Y \in \mathcal{J}(U'_+, U_+)$.

Рассмотрим также разложения

$$\mathfrak{K}_+ = \mathfrak{H} \oplus M_+(\mathfrak{L}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{K}'_+ = \mathfrak{H}' \oplus M_+(\mathfrak{L}') \tag{7.4.5}$$

(см. (1.4.4)). Подпространства $M_+(\mathfrak{L})$ и $M_+(\mathfrak{L}')$ инвариантны относительно операторов соответственно U_+ и U'_+, но не приводят эти операторы. Сужения

$$S = U_+ | M_+(\mathfrak{L}) \quad \text{и} \quad S' = U'_+ | M_+(\mathfrak{L}') \tag{7.4.6}$$

являются односторонними сдвигами (таким же свойством обладают и операторы S_* и S'_*). Рассмотрим операторы Q_+ и Q_+^- ортогонального проектирования из $M_+(\mathfrak{L})$ соответственно в $M_+(\mathfrak{L}_*)$ и $\mathfrak{R}$, а также их аналоги Q'_+ и $Q_+'^-$. Имеем

$$Q_+ \in \mathcal{J}(S, S_*), \quad Q_+^- \in \mathcal{J}(S, R). \tag{7.4.7}$$

Аналогичные соотношения справедливы для Q'_+ и $Q_+'^-$ (см. (2.3.3) и § 4.2).

Таким образом, для того чтобы оператор Y, удовлетворяющий (7.4.3) и (7.4.4) и как следствие этого — условию б), удовлетворял также условию в″), т. е. включению $YM_+(\mathfrak{L}') \subset M_+(\mathfrak{L})$, необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор A_0: $M_+(\mathfrak{L}') \to M_+(\mathfrak{L})$, такой, что

$$AQ'_+ = Q_+A_0, \quad BQ'_+ + CQ'^{-}_{+} = Q^{-}_{+}A_0 \quad (\text{на } M_+(\mathfrak{L}')) \tag{7.4.8}$$

(отсюда вытекает, что $A_0 = AQ'_+ + BQ'_+ + CQ'^{-}_{+}$). Из формул (7.4.4) и (7.4.8) ясно, что

$$A_0 \in \mathcal{J}(S', S). \tag{7.4.9}$$

Таким образом, *общий вид оператора* Y, *удовлетворяющего условиям* б) *и* в″) *теоремы* 2, *дается матрицей* (7.4.3), *удовлетворяющей условиям* (7.4.4), (7.4.8) *и* (7.4.9).

Отображение π: $\mathcal{J}^+(T', T) \to \mathcal{J}(T', T)$ в общем случае не является взаимно однозначным. Его ядро состоит из тех $Y \in \mathcal{J}^+(T', T)$, для которых $Y\mathfrak{H}' \subset \mathfrak{H}^{\perp}(=M_+(\mathfrak{L}))$. Поскольку, в силу в″), имеем $YM_+(\mathfrak{L}') \subset M_+(\mathfrak{L})$, условие $\pi(Y) = 0$ эквивалентно включению

$$Y\mathfrak{K}'_+ \subset M_+(\mathfrak{L}), \tag{7.4.10}$$

из которого следует, что

$$Y\mathfrak{R}' \subset \bigcap_0^\infty YU'^{n}_{+}\mathfrak{K}'_+ = \bigcap_0^\infty U^n_+ Y\mathfrak{K}'_+ \subset \bigcap_0^\infty S^n M_+(\mathfrak{L}) = \{0\}$$

(здесь учтено, что S — односторонний сдвиг) и, значит, $C = 0$. Из включения (7.4.10) следует также, что $YM_+(\mathfrak{L}'_*) \subset M_+(\mathfrak{L})$, в связи с чем оператор $D = Y \mid M_+(\mathfrak{L}'_*)$ принадлежит к $\mathcal{J}(S'_*, S)$. Поэтому для любого $x \in M_+(\mathfrak{L}'_*)$ получаем

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = Yx = Dx = \begin{bmatrix} Q_+Dx \\ Q^{-}_{+}Dx \end{bmatrix}.$$

Отсюда $A = Q_+D$, $B = Q^{-}_{+}D$.

Обратно, если D — произвольный оператор, удовлетворяющий включению

$$D \in \mathcal{J}(S'_*, S), \tag{7.4.11}$$

то операторы, определяемые формулами

$$A = Q_+D, \quad B = Q^{-}_{+}D, \quad C = 0, \quad A_0 = DQ'_+, \tag{7.4.12}$$

удовлетворяют, как легко проверить, условиям (7.4.8), так что соответствующий оператор $Y = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$ принадлежит $\mathcal{J}^+(T', T)$. Кроме того,

$$Y\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_+Dx \\ Q^{-}_{+}Dx \end{bmatrix} = Dx \in M_+(\mathfrak{L}) \text{ для любого } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathfrak{K}'_+,$$

т. е. $Y\mathfrak{K}'_+ \subset M_+(\mathfrak{L})$ и, значит, $\pi(Y) = 0$.

Таким образом, *общий вид оператора* $Y \in \mathcal{J}^+(T', T)$, *удовлетворяющего равенству* $\pi(Y) = 0$, *дается матрицей*

$$Y = \begin{bmatrix} Q_+D & 0 \\ Q_+^-D & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad D \in \mathcal{J}(S'_*, S).$$

Рассмотренные структурные свойства лифтингов позволяют, в частности, подойти к вопросу о нахождении условий, при которых два сжатия *подобны*. Мы этим заниматься не будем.

5. Рассмотрим случай, когда T и T' являются вполне неунитарными сжатиями и задаются своими функциональными моделями, т. е. $T = S(\Theta)$, $T' = S(\Theta')$, где $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$ и $\{\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'_*, \Theta'(\lambda)\}$ — чистые сжимающие аналитические функции (см. § 3). В этом случае

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{K}_+ = H^2(\mathfrak{A}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathfrak{A})},\\
&U_+ \text{ есть умножение на } \chi,\\
&\mathfrak{H} = \mathfrak{K}_+ \ominus \{\Theta u \oplus \Delta u\colon\ u \in H^2(\mathfrak{A})\},\\
&T = P_+U_+ \mid \mathfrak{H},\\
&\mathfrak{L}_* = \{a_* \oplus 0\colon\ a_* \in \mathfrak{A}_*\},\\
&\mathfrak{L} = \{\Theta a \oplus \Delta a\colon\ a \in \mathfrak{A}\},\\
&M_+(\mathfrak{L}_*) = \{u_* \oplus 0\colon\ u_* \in H^2(\mathfrak{A}_*)\},\\
&M_+(\mathfrak{L}) = \{\Theta u \oplus \Delta u\colon\ u \in H^2(\mathfrak{A})\}
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned}
&Q_+(\Theta u \oplus \Delta u) = \Theta u \oplus 0,\\
&Q_+^-(\Theta u \oplus \Delta u) = 0 \oplus \Delta u
\end{aligned}\right. \quad (u \in H^2(\mathfrak{A})).$$

Аналогичные соотношения имеют место для T'.

Заметим теперь, что если $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}'$ — сепарабельные гильбертовы пространства, а $\{\mathfrak{E}, \mathfrak{E}, \Omega(e^{it})\}$ и $\{\mathfrak{E}', \mathfrak{E}', \Omega'(e^{it})\}$ — ограниченные измеримые функции, то те из операторов

а) $\Phi\colon\ H^2(\mathfrak{E}') \to H^2(\mathfrak{E})$,

б) $\Phi\colon\ H^2(\mathfrak{E}') \to \overline{\Omega L^2(\mathfrak{E})}$,

в) $\Phi\colon\ \overline{\Omega' L^2(\mathfrak{E}')} \to \overline{\Omega L^2(\mathfrak{E})}$,

которые перестановочны с умножением на χ, сами в свою очередь являются операторами умножения (слева) на операторную ограниченную функцию $\{\mathfrak{E}', \mathfrak{E}, \Phi(e^{it})\}$, которая соответственно

а) аналитична,

б) измерима, причем $\Phi(e^{it})\,\mathfrak{E}' \subset \overline{\Omega(e^{it})\,\mathfrak{E}}$ почти всюду,

в) измерима, причем $\Phi(e^{it})\,\Omega'(e^{it})\,\mathfrak{E}' \subset \overline{\Omega(e^{it})\,\mathfrak{E}}$ почти всюду.

Это приводит нас к следующей теореме.

Теорема 3. *Операторы* $Y\in\mathcal{J}^+(T', T)$ *являются операторами умножения в* $\mathfrak{K}_+$ *на матричные функции вида*

$$Y(e^{it})=\begin{bmatrix}A(e^{it}) & 0\\ B(e^{it}) & C(e^{it})\end{bmatrix},$$

где $\{\mathfrak{A}'_*, \mathfrak{A}_*, A(\lambda)\}$ — *ограниченная аналитическая функция, а* $\{\mathfrak{A}'_*, \mathfrak{A}_*, B(e^{it})\}$ *и* $\{\mathfrak{A}'_*, \mathfrak{A}_*, C(e^{it})\}$ — *ограниченные измеримые функции, удовлетворяющие почти всюду условиям*

$$B(e^{it})\,\mathfrak{A}'_*\subset\overline{\Delta(e^{it})\,\mathfrak{A}_*},$$
$$C(e^{it})\,\Delta'(e^{it})\,\mathfrak{A}'_*\subset\overline{\Delta(e^{it})\,\mathfrak{A}_*},$$
$$A(e^{it})\,\Theta'(e^{it})=\Theta e^{it}A_0(e^{it}),$$
$$B(e^{it})\,\Theta'(e^{it})+C(e^{it})\,\Delta'(e^{it})=\Delta(e^{it})\,A_0(e^{it}),$$

где $\{\mathfrak{A}', \mathfrak{A}, A_0(\lambda)\}$ — *некоторая другая ограниченная аналитическая функция.*

Для каждого $X\in\mathcal{J}(T', T)$ *найдется оператор* Y *указанного вида, такой, что* $X=P_+Y\,|\,\mathfrak{H}'$ *и* $\|Y\|_\infty=\|X\|$.

Отметим, что если оба оператора T и T' принадлежат классу $C_{\cdot 0}$, т. е. если обе функции Θ и Θ' являются *внутренними*, то вторые компоненты исчезают и теорема 3 принимает следующий вид.

Теорема 3′. *Если* $T=S(\Theta)$, $T'=S(\Theta')$ *для некоторых внутренних функций* $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$ *и* $\{\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'_*, \Theta'(\lambda)\}$, *то операторы* $Y\in\mathcal{J}^+(T', T)$ *являются на* $H^2(\mathfrak{A}'_*)$ *операторами умножения на ограниченную аналитическую функцию* $\{\mathfrak{A}'_*, \mathfrak{A}_*, Y(\lambda)\}$, *удовлетворяющую условию*

$$Y(\lambda)\,\Theta'(\lambda)=\Theta(\lambda)\,Y_0(\lambda), \tag{7.5.1}$$

где $\{\mathfrak{A}', \mathfrak{A}, Y_0(\lambda)\}$ — *также некоторая ограниченная аналитическая функция; это условие эквивалентно включению*

$$Y\Theta'H^2(\mathfrak{A}')\subset\Theta H^2(\mathfrak{A}). \tag*{(7.5.1)′}$$

Для любого $X\in\mathcal{J}(T', T)$ *существует функция* $Y(\lambda)$ *указанного типа, такая, что*

$$Xu=P_+Yu \text{ для всех } u\in\mathfrak{H}'\ (=H^2(\mathfrak{A}'_*)\ominus\Theta'H^2(\mathfrak{A}')) \tag{7.5.2}$$

и

$$\|Y\|_\infty=\|X\|.$$

Случай, когда $\Theta(\lambda)$ и $\Theta'(\lambda)$ — *равные скалярные* внутренние функции, особенно прост. В этом случае $Y(\lambda)$ тоже принимает скалярные значения, а (7.5.1), очевидно, выполнено. Для этого частного случая теорема была доказана иным методом Сарасоном [1]. Она и послужила отправной точкой наших исследований.

Приведенные теоремы нашли большое количество применений в теории операторов и анализе. Одно из простых приложений будет дано в § 10.

§ 8. Функциональное исчисление для сжатий

1. Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть

$$u(\lambda)=\sum_0^\infty a_n\lambda^n \in H^\infty \tag{8.1.1}$$

— аналитическая в открытом единичном круге ($|\lambda|<1$) ограниченная функция. Обозначим через $u(T)$ оператор в $\mathfrak{H}$, являющийся суммой Абеля операторного ряда $\sum_0^\infty a_nT^n$, т. е.

$$u(T)=\lim_{r\to 1-0}\sum_0^\infty r^n a_n T^n. \tag{8.1.2}$$

Поскольку $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\leqslant 1$, ряд, стоящий в правой части формулы (8.1.2), сходится по операторной норме при любом фиксированном r $(0\leqslant r<1)$. Положим

$$u_r(T)=\sum_0^\infty r^n a_n T^n \quad \text{и} \quad u_r(U)=\sum_0^\infty r^n a_n U^n, \tag{8.1.3}$$

где U — минимальная унитарная дилатация оператора T в пространстве $\mathfrak{K}$. Имеем

$$u_r(T)=P_{\mathfrak{H}}u_r(U)\,|\,\mathfrak{H}. \tag{8.1.4}$$

Отсюда следует, что сильная сходимость $u_r(U)$ при $r\to 1-0$ влечет за собой сильную сходимость $u_r(T)$. Пусть $E(\sigma)$ — спектральная мера, порожденная спектральным семейством унитарного оператора U. Тогда для всех $0<r,\ \rho<1$ и $k\in\mathfrak{K}$

$$\|[u_r(U)-u_\rho(U)]k\|^2=\int_0^{2\pi}|u(re^{it})-u(\rho e^{it})|^2\,d\|E_tk\|^2. \tag{8.1.5}$$

Подынтегральное выражение ограничено константой $4\|u\|_\infty^2$ и, в силу теоремы Фату, стремится к 0 при $r,\ \rho\to 1-0$ почти всюду относительно меры Лебега.

Вспоминая теперь, что оператор U либо сам является двусторонним сдвигом, либо представляет собой «сумму» двух двусторонних сдвигов в смысле формулы (2.2.3), и тот факт, что спектральная мера двустороннего сдвига абсолютно непрерывна