Приведенные теоремы нашли большое количество применений в теории операторов и анализе. Одно из простых приложений будет дано в § 10.

§ 8. Функциональное исчисление для сжатий

1. Пусть T — вполне неунитарное сжатие в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и пусть

$$u(\lambda)=\sum_0^\infty a_n\lambda^n \in H^\infty \tag{8.1.1}$$

— аналитическая в открытом единичном круге ($|\lambda|<1$) ограниченная функция. Обозначим через $u(T)$ оператор в $\mathfrak{H}$, являющийся суммой Абеля операторного ряда $\sum\limits_0^\infty a_nT^n$, т. е.

$$u(T)=\lim_{r\to 1-0}\sum_0^\infty r^n a_n T^n. \tag{8.1.2}$$

Поскольку $\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\leqslant 1$, ряд, стоящий в правой части формулы (8.1.2), сходится по операторной норме при любом фиксированном r $(0\leqslant r<1)$. Положим

$$u_r(T)=\sum_0^\infty r^n a_n T^n \quad \text{и} \quad u_r(U)=\sum_0^\infty r^n a_n U^n, \tag{8.1.3}$$

где U — минимальная унитарная дилатация оператора T в пространстве $\mathfrak{K}$. Имеем

$$u_r(T)=P_{\mathfrak{H}}u_r(U)\,|\,\mathfrak{H}. \tag{8.1.4}$$

Отсюда следует, что сильная сходимость $u_r(U)$ при $r\to 1-0$ влечет за собой сильную сходимость $u_r(T)$. Пусть $E(\sigma)$ — спектральная мера, порожденная спектральным семейством унитарного оператора U. Тогда для всех $0<r$, $\rho<1$ и $k\in\mathfrak{K}$

$$\|[u_r(U)-u_\rho(U)]\,k\|^2=\int_0^{2\pi}|u(re^{it})-u(\rho e^{it})|^2\,d\|E_t k\|^2. \tag{8.1.5}$$

Подынтегральное выражение ограничено константой $4\|u\|_\infty^2$ и, в силу теоремы Фату, стремится к 0 при r, $\rho\to 1-0$ почти всюду относительно меры Лебега.

Вспоминая теперь, что оператор U либо сам является двусторонним сдвигом, либо представляет собой «сумму» двух двусторонних сдвигов в смысле формулы (2.2.3), и тот факт, что спектральная мера двустороннего сдвига абсолютно непрерывна относительно меры Лебега[1]), получаем, что *спектральная мера* $E(\sigma)$ *оператора* U также *абсолютно непрерывна.*

Таким образом, из формулы (8.1.5) вытекает, что

$$\|u_r(U)k - u_\rho(U)k\| \to 0 \text{ при } r, \rho \to 1-0$$

для каждого $k \in \mathfrak{K}$. Тем самым доказано существование сильного предела в определении (8.1.2).

Отметим, что ссылки на теорему Фату можно избежать, используя то обстоятельство, что $u(re^{it}) - u(\rho e^{it}) = \sum_1^\infty (r^n - \rho^n) a_n e^{int}$ стремится к нулю в L^2 при $r, \rho \to 1-0$, а также возможность разложения функции $f(t) = \frac{d}{dt}\|E_t k\|^2$ в сумму ограниченной функции $f_1(t)$ и функции $f_2(t)$, для которой $\int_0^{2\pi} |f_2(t)|\,dt < \varepsilon$.

Очевидно, что отображение $u \mapsto u(T)$ является гомоморфизмом алгебры H^∞ в алгебру операторов в $\mathfrak{H}$, обладающим следующими свойствами:

а) $1 \mapsto I$, $\lambda \mapsto T$;

б) $u(T)^* = u^\sim(T^*)$;

в) $\|u(T)\| \leqslant \|u\|_\infty$ (неравенство И. Неймана); ср. (6.4.1));

г) *если* $\{u_n\}$ — *последовательность в* H^∞, *такая, что* $\|u_n\|_\infty \to 0$, *то* $\|u_n(T)\| \to 0$ (следствие неравенства И. Неймана);

д) *если* $\|u_n\|_\infty \leqslant C$ *и* $u_n(e^{it}) \to 0$ *почти всюду, то* $u_n(T)$ *сильно сходится к* 0;

е) *если* $\|u_n\|_\infty \leqslant C$ *и* $u_n(\lambda) \to 0$ *в каждой точке* λ *открытого единичного круга, то* $u_n(T)$ *слабо сходится к* 0.

Свойство д) следует из абсолютной непрерывности спектральной меры $E(\sigma)$ и теоремы Лебега (доказательство аналогично доказательству существования сильного предела в (8.1.2)). Для доказательства свойства е) используем то обстоятельство, что для любого целого ν

$$\int_0^{2\pi} u_n(e^{it}) e^{i\nu t}\,dt = \frac{1}{i} \oint_{|\lambda|=1} u_n(\lambda)\lambda^{\nu-1}\,d\lambda =$$
$$= \frac{1}{i} \oint_{|\lambda|=1/2} u_n(\lambda)\lambda^{\nu-1}\,d\lambda \to 0.$$

[1]) Спектральная мера $F(\sigma)$ двустороннего сдвига кратности d унитарно эквивалентна оператору умножения на характеристическую функцию множества σ в пространстве, являющемся ортогональной суммой d экземпляров пространства L^2 (по нормированной мере Лебега на единичной окружности).

Поэтому для любой функции $f(t) \in L^1$, в силу свойства фейеровских средних ряда Фурье для $f(t)$, имеем

$$\int_0^{2\pi} u_n(e^{it}) f(t)\, dt \to 0.$$

Воспользовавшись еще раз абсолютной непрерывностью $E(\sigma)$, заключаем, что

$$(u_n(T) h, g) = \int_0^{2\pi} u_n(e^{it})\, d(E_t f, g) \to 0$$

$$\text{при} \quad n \to \infty \quad \text{для всех} \quad f, g \in \mathfrak{H}.$$

2. Докажем еще одно свойство:

ж) *если $u \in H^\infty$ и $|u(\lambda)| < 1$ при $|\lambda| < 1$, то оператор $T' = u(T)$ является также вполне неунитарным сжатием и*

$$v(T') = v \circ u(T) \text{ для произвольной функции } v \in H^\infty. \tag{8.2.1}$$

Доказательство. Положим $u_0(\lambda) = [u(\lambda) - u(0)] \times \times [1 - \overline{u(0)}\, u(\lambda)]^{-1}$. Очевидно, что $u_0 \in H^\infty$ и $|u_0(\lambda)| < 1$ при $|\lambda| < 1$. Поскольку $u_0(0) = 0$, по лемме Шварца $u_0(\lambda) = \lambda u_1(\lambda)$, где $|u_1(\lambda)| \leqslant 1$ для всех $|\lambda| < 1$. В связи с этим $\|u_0(T)\| \leqslant 1$, $\|u_1(T)\| \leqslant 1$ и

$$\|u_0(T)^n h\| = \|u_1(T)^n T^n h\| \leqslant \|T^n h\|,$$
$$\|u_0(T)^{*n} h\| = \|u_1(T)^{*n} T^{*n} h\| \leqslant \|T^{*n} h\|$$

для каждого $h \in \mathfrak{H}$ и любого целого $n \geqslant 0$.

Поскольку оператор T вполне неунитарен, для любого $h \neq 0$ имеем $\inf\limits_n \{\|T^n h\|, \|T^{*n} h\|\} < \|h\|$. Но это означает, что оператор $T_0 = u_0(T)$ также является вполне неунитарным сжатием. Тем же свойством обладает и оператор

$$T' = [T_0 + u(0) I][I + \overline{u(0)}\, T_0]^{-1},$$

поскольку у операторов T' и T_0 подпространства, приводящие их к унитарным, как легко проверить, совпадают.

Итак, T' является вполне неунитарным сжатием. Поэтому $v(T')$ имеет смысл для любого $v \in H^\infty$, $v(\lambda) = \sum\limits_0^\infty a_n \lambda^n$. Исходя из очевидного соотношения $p(T') = p \circ u(T)$ для любого многочлена p и применяя его к суммам Фейера

$$v_n(\lambda) = \sum_0^n (1 - k/n) a_k \lambda^k,$$

получим

$$v_n(T') = v_n \circ u(T). \qquad (8.2.2)$$

Используя неравенства $\|v_n\|_\infty \leqslant \|v\|_\infty$, $\|v_n \circ u\|_\infty \leqslant \|v\|_\infty$ и предельные соотношения $v_n(\lambda) \to v(\lambda)$, $v_n \circ u(\lambda) \to v \circ u(\lambda)$ при $|\lambda| < 1$, а также свойство е) функционального исчисления, примененное к $v_n \to v$ и $v_n \circ u \to v \circ u$, и устремляя в формуле (8.2.2) n к бесконечности, приходим к равенству (8.2.1).

3. Напомним некоторые факты, касающиеся функций класса Харди H^1 на единичной окружности.

Для любой функции $k \in L^1$, такой, что $k \geqslant 0$ и $\log k \in L^1$, функция

$$v(\lambda) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda} \log k(t)\,dt\right] \quad (|\lambda| < 1), \qquad (8.3.1)$$

а точнее, ее граничное значение на единичной окружности, принадлежит пространству H^1 и называется *внешней* функцией. При этом

$$|v(e^{it})| = k(t) \text{ почти всюду.}$$

С другой стороны, для всякой не обращающейся тождественно в нуль функции $u \in H^1$ имеем $\log|u(e^{it})| \in L^1$, в связи с чем внешняя функция v, соответствующая $k(t) = |u(e^{it})|$, существует и называется *внешним множителем* для u. Она обозначается также u_e. Частное $u_i = u/u_e$ является *внутренней* функцией, т. е. $u_i \in H^\infty$ и $|u_i(e^{it})| = 1$ почти всюду.

Всякая внутренняя функция допускает каноническую факторизацию: представление в виде произведения двух сомножителей, один из которых — произведение Бляшке, а второй — функция вида

$$\exp\left[-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda}\,d\mu_t\right], \qquad (8.3.2)$$

где $\mu(\sigma)$ — конечная неотрицательная мера Бореля, сингулярная относительно меры Лебега.

Используя подобные факторизации, можно доказать, что для всякого семейства $\{u_\alpha\}$ внутренних функций существует *наибольший общий внутренний делитель*

$$v = \bigwedge_\alpha u_\alpha.$$

Далее нам понадобится

Лемма. *Пусть $\{u_\alpha = u_{\alpha_i} \cdot u_{\alpha_e}\}$ — некоторое семейство не обращающихся тождественно в нуль функций класса H^1. Пусть $v = \bigwedge_\alpha u_{\alpha_i}$. Тогда если функция $f \in L^1$ такова, что $F_\alpha := u_\alpha f \in H^1$ для* *всех* α, *то*

$$vf \in H^1.$$

Доказательство. Зафиксируем $\alpha = \alpha_0$ и положим $u = u_{\alpha_0}$, $F = F_{\alpha_0}$. Тогда $F_\alpha u = F u_\alpha (= u u_\alpha f)$ для каждого α и, следовательно,

$$\log|F_\alpha| + \log|u| = \log|F| + \log|u_\alpha|.$$

Отсюда, в силу (8.3.1),

$$F_{\alpha_e} u_e = F_e u_{\alpha_e} \text{ и, значит, } F_{\alpha_i} u_i = F_i u_{\alpha_i}.$$

Положим $u'_{\alpha_i} = u_{\alpha_i}/v$, в частности, $u'_i = u_i/v$. Тогда

$$F_{\alpha_i} u'_i = F_i u'_{\alpha_i}.$$

Поскольку функции семейства $\{u'_{\alpha_i}\}$ взаимно просты, u'_i является делителем F_i, т. е. F_i/u'_i является внутренней функцией. Замечая, что $\log|f(t)| = \log|F(e^{it})| - \log|u(e^{it})| \in L^1$ и что по предположению $f \in L^1$, находим

$$\frac{F_e(\lambda)}{u_e(\lambda)} = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda} \log|f(t)|\,dt\right].$$

Таким образом, $F_e/u_e \in H^1$ и

$$vf = \frac{u_i}{u'_i} f = \frac{uf}{u'_i u_e} = \frac{F}{u'_i u_e} = \frac{F_i}{u'_i} \cdot \frac{F_e}{u_e} \in H^1,$$

что и требовалось доказать.

Используем доказанную лемму и включение $H^\infty \subset H^1$ для доказательства следующей теоремы.

Теорема. *Пусть* T — *вполне неунитарное сжатие в пространстве* $\mathfrak{H}$, $\{u_\alpha\}$ — *семейство ненулевых функций класса* H^∞. *Тогда если* h — *элемент пространства* $\mathfrak{H}$, *такой, что*

$$u_\alpha(T)h = 0 \quad \textit{при всех } \alpha, \tag{8.3.3}$$

то

$$v(T)h = 0, \quad \textit{где} \quad v = \bigwedge_\alpha u_\alpha. \tag{8.3.4}$$

Доказательство. В силу (8.3.3), для любого $g \in \mathfrak{H}$ и любого целого $m \geqslant 0$

$$0 = (T^m u_\alpha(T)h, g) = \int_0^{2\pi} e^{imt} u_\alpha(e^{it}) \frac{d}{dt}(E_t h, g)\,dt.$$

Полагая

$$f(t) = e^{-it}\frac{d}{dt}(E_t h, g),$$

получаем $u_\alpha f \in H^1$. Поскольку $f \in L^1$, то, согласно лемме, $vf \in H^1$. Следовательно,

$$(v(T)h, g) = \int_0^{2\pi} v(e^{it}) \frac{d}{dt}(E_t h, g)\, dt = \int_0^{2\pi} vf \cdot e^{it}\, dt = 0.$$

Учитывая теперь, что g — произвольный элемент из $\mathfrak{H}$, приходим к (8.3.4).

Следствие 1. *Если u — внешняя функция, $u \in H^\infty$, то $u(T)$ — квазиаффинитет*[1].

Доказательство. Если $u(T)h = 0$ для какого-то $h \in \mathfrak{H}$, то, в силу теоремы, $v(T)h = 0$, где $v = u_i$ — постоянная, $|u_i| = 1$. Отсюда $h = 0$, т. е. $u(T)$ имеет нулевое ядро. Если $u(T)^*h = 0$ для некоторого $h \in \mathfrak{H}$, то, учитывая соотношение $u(T)^* = u^\sim(T^*)$ и тот факт, что $u^\sim$ также является внешней, получим по той же причине $h = 0$, т. е. область значений оператора $u(T)$ плотна в $\mathfrak{H}$.

Рассмотрим *класс* C_0 всех вполне неунитарных сжатий T, таких, что $u(T) = 0$ для некоторой ненулевой функции $u \in H^\infty$.

Следствие 2. *Для каждого оператора $T \in C_0$ существует внутренняя функция m, удовлетворяющая равенству $m(T) = 0$ и являющаяся делителем в H^∞ всякой другой функции $u \in H^\infty$, такой, что $u(T) = 0$.*

Доказательство. Достаточно взять $m = \bigwedge u_i$ по всем таким u.

Если пренебречь постоянными множителями с модулем, равным 1, то такая функция единственна. Она называется *минимальной функцией* оператора T и обозначается m_T.

Из свойства б) нашего функционального исчисления следует, что $T^* \in C_0$ всякий раз, когда $T \in C_0$, и что $m_{T^*} = (m_T)^\sim$.

Следствие 3. *Если $T \in C_0$, а функция $u \in H^\infty$ такова, что $u_i \wedge m_T = 1$, то $u(T)$ является квазиаффинитетом.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 1, с той лишь разницей, что в этом случае для всех h имеем $m_T(T)h = 0$ и $m_T^\sim(T^*)h = 0$, поскольку $m_T(T) = 0$ и $m_T^\sim(T^*) = m_T(T)^* = 0$.

4. Для вполне неунитарных операторов сжатия T в $\mathfrak{H}$ функциональное исчисление можно следующим образом распространить на некоторые *неограниченные* функции.

Обозначим через N_T класс функций, имеющих вид

$$\varphi = u/v, \tag{8.4.1}$$

[1]) *Квазиаффинитетом* пространства $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}'$ называется линейный оператор X, ядро которого в $\mathfrak{H}$ равно нулю, а область значений плотна в $\mathfrak{H}'$.

где u, $v \in H^\infty$, а $v(T)$ — квазиаффинитет. Для каждой такой функции φ положим $\varphi(T) = v(T)^{-1} u(T)$. Отметим, что $v(T)^{-1}$ и, следовательно, $\varphi(T)$ — в общем случае неограниченные операторы.

Данное определение оператора $\varphi(T)$ не зависит от конкретного выбора представления (8.4.1). Действительно, если $\varphi = u/v = u'/v'$, то из соотношения $uv' = vu'$ получаем $u(T)v'(T) = v(T)u'(T)$. Поэтому

$$v(T)^{-1}u(T) = v(T)^{-1}v'(T)^{-1}v'(T)u(T) = v'(T)^{-1}v(T)^{-1}u(T)v'(T) = \\ = v'(T)^{-1}v(T)^{-1}v(T)u'(T) = v'(T)^{-1}u'(T).$$

Таким образом, оператор $\varphi(T)$ определен однозначно.

Перечислим ряд свойств, доказательство которых более или менее шаблонно:

а) класс N_T является *алгеброй*;

б) для каждого $\varphi \in N_T$ оператор $\varphi(T)$ *замкнут* и имеет *плотную* в $\mathfrak{H}$ *область*;

в) если $\varphi \in N_T$, то для любого ограниченного оператора A, перестановочного с T, $\varphi(T)A \supset A\varphi(T)$;

г) $(c\varphi)(T) = c \cdot \varphi(T)$ для $\varphi \in N_T$ и $c \neq 0$; если φ_1, $\varphi_2 \in N_T$, то $\varphi_1(T) + \varphi_2(T) \subset (\varphi_1 + \varphi_2)(T)$, $\varphi_1(T)\varphi_2(T) \subset (\varphi_1\varphi_2)(T)$, причем $\subset$ заменяется на $=$, если $\varphi_2 \in H^\infty$;

д) $\varphi(T)^* \subset \varphi^\sim(T^*)$;

е) если T — нормальный оператор, $T = \int \lambda\, dE_\lambda$ и $\varphi \in N_T$, то $\varphi(T) = \int \varphi(\lambda)\, dE_\lambda$.

5. Функциональное исчисление распространяется и на сжатия T общего вида. Для этого используется каноническое разложение оператора $T = T_0 \oplus W$ в ортогональную сумму вполне неунитарного сжатия T_0 и унитарного оператора W. Чтобы определение (8.1.2) имело смысл и в этом случае, класс H^∞ сужается до класса H_T^∞ функций $u \in H^\infty$, для которых $u(e^{it})$ (радиальный предел) существует *почти всюду относительно спектральной меры унитарной части* W. Большинство рассмотренных выше свойств функционального исчисления переносятся и на этот случай.

§ 9. Операторы класса C_0 и жорданова модель

1. В § 8.4 был определен класс C_0 вполне неунитарных сжатий T, для каждого из которых существует ненулевая функция $u \in H^\infty$, такая, что $u(T) = 0$. Среди всех таких функций была выделена минимальная функция, являющаяся делителем в H^∞ всех остальных. Эта минимальная функция, обозначаемая m_T,