где $u, v \in H^\infty$, а $v(T)$ — квазиаффинитет. Для каждой такой функции φ положим $\varphi(T) = v(T)^{-1} u(T)$. Отметим, что $v(T)^{-1}$ и, следовательно, $\varphi(T)$ — в общем случае неограниченные операторы.

Данное определение оператора $\varphi(T)$ не зависит от конкретного выбора представления (8.4.1). Действительно, если $\varphi = u/v = u'/v'$, то из соотношения $uv' = vu'$ получаем $u(T)v'(T) = v(T)u'(T)$. Поэтому

$$v(T)^{-1}u(T) = v(T)^{-1}v'(T)^{-1}v'(T)u(T) = v'(T)^{-1}v(T)^{-1}u(T)v'(T) = \\ = v'(T)^{-1}v(T)^{-1}v(T)u'(T) = v'(T)^{-1}u'(T).$$

Таким образом, оператор $\varphi(T)$ определен однозначно.

Перечислим ряд свойств, доказательство которых более или менее шаблонно:

а) класс N_T является *алгеброй*;

б) для каждого $\varphi \in N_T$ оператор $\varphi(T)$ *замкнут* и имеет *плотную* в $\mathfrak{H}$ *область*;

в) если $\varphi \in N_T$, то для любого ограниченного оператора A, перестановочного с T, $\varphi(T)A \supset A\varphi(T)$;

г) $(c\varphi)(T) = c \cdot \varphi(T)$ для $\varphi \in N_T$ и $c \neq 0$; если $\varphi_1, \varphi_2 \in N_T$, то $\varphi_1(T) + \varphi_2(T) \subset (\varphi_1 + \varphi_2)(T)$, $\varphi_1(T)\varphi_2(T) \subset (\varphi_1\varphi_2)(T)$, причем $\subset$ заменяется на $=$, если $\varphi_2 \in H^\infty$;

д) $\varphi(T)^* \subset \varphi^\sim(T^*)$;

е) если T — нормальный оператор, $T = \int \lambda \, dE_\lambda$ и $\varphi \in N_T$, то $\varphi(T) = \int \varphi(\lambda) \, dE_\lambda$.

5. Функциональное исчисление распространяется и на сжатия T общего вида. Для этого используется каноническое разложение оператора $T = T_0 \oplus W$ в ортогональную сумму вполне неунитарного сжатия T_0 и унитарного оператора W. Чтобы определение (8.1.2) имело смысл и в этом случае, класс H^∞ сужается до класса H_T^∞ функций $u \in H^\infty$, для которых $u(e^{it})$ (радиальный предел) существует *почти всюду относительно спектральной меры унитарной части* W. Большинство рассмотренных выше свойств функционального исчисления переносятся и на этот случай.

§ 9. Операторы класса C_0 и жорданова модель

1. В § 8.4 был определен класс C_0 вполне неунитарных сжатий T, для каждого из которых существует ненулевая функция $u \in H^\infty$, такая, что $u(T) = 0$. Среди всех таких функций была выделена минимальная функция, являющаяся делителем в H^∞ всех остальных. Эта минимальная функция, обозначаемая m_T, является внутренней функцией и определяется с точностью до постоянного множителя, модуль которого равен 1.

Операторы класса C_0 обладают рядом интересных свойств. Хотя эти операторы по большей части «существенно бесконечномерны», ведут они себя во многих отношениях как операторы в конечномерном пространстве.

Пусть T—сжатие в пространстве $\mathfrak{H}$, U—его минимальная унитарная дилатация в пространстве $\mathfrak{K}$. Как известно (см. § 2.1), существует сильный предел

$$L = \lim_{n \to \infty} U^{-n}T^n, \tag{9.1.1}$$

являющийся оператором из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{K}$. Ясно, что $LT^m = U^mL$ ($m=0$, 1, 2, ...).

Для оператора $T \in C_0$ получаем отсюда

$$0 = Lm_T(T) = m_T(U)L, \tag{9.1.2}$$

где $m_T(U)$ дается спектральным интегралом $\int_0^{2\pi} m_T(e^{it})\,dE_t$. Поскольку $|m_T(e^{it})| = 1$ почти всюду на единичной окружности и поскольку спектральная мера $E(\sigma)$ оператора U абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, $m_T(U)$ является унитарным оператором. В силу (9.1.2) имеем тогда $L=0$. Сравнивая с (9.1.1), видим, что $T^n \to 0$. Поскольку T^* принадлежит классу C_0 вместе с оператором T, то также $T^{*n} \to 0$. Полученные результаты означают, что

$$C_0 \subset C_{00}. \tag{9.1.3}$$

Обратное включение неверно. Существуют даже строгие сжатия T (т. е. такие, для которых $\|T\| < 1$), не принадлежащие C_0.

Этот факт следует из того, что спектр оператора $T \in C_0$ *внутри единичного круга* является дискретным множеством, состоящим из нулей минимальной функции $m_T(\lambda)$, причем каждый нуль $m_T(\lambda)$ является собственным значением оператора T.

Для доказательства этого заметим, что функция

$$n(\lambda_0;\ \lambda) = (m_T(\lambda) - m_T(\lambda_0))/(\lambda - \lambda_0)$$

принадлежит H^∞. Поэтому $n(\lambda_0;\ T)$ является (ограниченным) оператором и удовлетворяет соотношению

$$n(\lambda_0;\ T)(T - \lambda_0 I) = (T - \lambda_0 I)\,n(\lambda_0;\ T) = -m_T(\lambda_0)\,I.$$

Значит, если $m_T(\lambda_0) \neq 0$, то $(T - \lambda_0 I)^{-1} = -(1/m_T(\lambda_0))\,n(\lambda_0;\ T)$, т. е. λ_0 принадлежит резольвентному множеству оператора T. Если же $m_T(\lambda_0) = 0$, то $n(\lambda_0;\ \lambda) = m_T(\lambda)/(\lambda - \lambda_0)$ не является кратным $m_T(\lambda)$. Отсюда следует, что $n(\lambda_0;\ T) \neq 0$ и что всякий ненулевой вектор, принадлежащий области значений оператора $n(\lambda_0;\ T)$, является собственным вектором для T.

Отметим (без доказательства), что спектр оператора T *на единичной окружности* состоит из тех точек, через которые невозможно аналитическое продолжение функции $m_T(\lambda)$ во внешность единичного круга.

2. Как следует из результатов § 3.3 и соотношения (4.1.4) между характеристическими функциями операторов T и T^*, функциональной моделью оператора сжатия T класса C_{00} является оператор $S(\Theta)$, порождаемый чистой сжимающей аналитической функцией $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_*, \Theta(\lambda)\}$, которая, как и функция $\{\mathfrak{A}_*, \mathfrak{A}, \Theta^{\sim}(\lambda)\}$, является внутренней, т. е. значения $\Theta(e^{it})$ которой почти всюду являются унитарными операторами. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_*$. Напомним, что в этом случае $S(\Theta)$ определен на пространстве $\mathfrak{H}(\Theta)=H^2(\mathfrak{A})\ominus\Theta H^2(\mathfrak{A})$ формулой

$$S(\Theta)h=P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(\chi h)\quad(h\in\mathfrak{H}(\Theta)).$$

Тогда для любой функции $m\in H^\infty$ имеем

$$m(S(\Theta))h=P_{\mathfrak{H}(\Theta)}(mh)\quad(h\in\mathfrak{H}(\Theta)).$$

Поскольку $m\cdot\Theta H^2(\mathfrak{A})\subset\Theta H^2(\mathfrak{A})$, то $m(S(\Theta))=0$ тогда и только тогда, когда

$$m\cdot H^2(\mathfrak{A})\subset\Theta H^2(\mathfrak{A}).\tag{9.2.1}$$

Это соотношение будем выражать следующей фразой: скалярная функция $m\in H^\infty$ является «кратным» операторной функции Θ.

Если $\Theta(\lambda)$ сама принимает скалярные значения, т. е. $\dim\mathfrak{A}=1$ и $\Theta(\lambda)=a(\lambda)\in H^\infty$, то соотношение (9.2.1) выполнено при $m=a$, а всякая другая функция $m\in H^\infty$, удовлетворяющая (9.2.1) является кратным a в H^∞. Итак, получена

Теорема 1. *Для каждой скалярной внутренней функции m, отличной от тождественной постоянной, оператор $S(m)$, задаваемый на пространстве $\mathfrak{H}(m)=H^2\ominus mH^2$ формулой*

$$S(m)h=P_{\mathfrak{H}(m)}(\chi h)\quad(h\in\mathfrak{H}(m)),$$

принадлежит классу C_0. Его минимальная функция m_T равна m.

Такие операторы $S(m)$ представляют собой во многих отношениях простейший тип операторов класса C_0. Операторы $S(m)$ *циклические*, т. е. для каждого из них существует вектор $h\in\mathfrak{H}(m)$, такой, что векторы h, $S(m)h$, $S(m)^2h$, ... порождают пространство $\mathfrak{H}(m)$. Для доказательства этого факта достаточно взять в качестве h функцию

$$h(\lambda)=1-\overline{m(0)}\,m(\lambda).\tag{9.2.2}$$

Тот факт, что $h\in\mathfrak{H}(m)$, следует из соотношения $\overline{mh}=\overline{m}-\overline{m(0)}\perp H^2$. Докажем теперь, что пространство $\mathfrak{H}(m)$ порождается векторами $S(m)^nh\,(n=0,\ 1,\ \ldots)$. Рассмотрим вектор

$v \in \mathfrak{H}(m)$, ортогональный всем таким векторам. Тогда для всех $n=0, 1, \ldots$

$$0=(v, P_{\mathfrak{H}(m)}(\chi^n h))=(v, \chi^n)-m(0)(v, \chi^n m)=(v, \chi^n)$$

(использовано соотношение $\chi^n m \in mH^2$). Поскольку $v \in H^2$, отсюда следует, что $v=0$, что и требовалось доказать.

Отметим также, что оператор $S(m)^*$ унитарно эквивалентен оператору $S(m^{\sim})$. Именно

$$\Psi S(m)^* = S(m^{\sim})\Psi,$$

где $\Psi\colon \mathfrak{H}(m) \to \mathfrak{H}(m^{\sim})$ — унитарный оператор, задаваемый равенством

$$(\Psi u)(e^{it}) = e^{-it} m^{\sim}(e^{it})\, u(e^{-it}) \quad (u \in \mathfrak{H}(m)).$$

Отсюда следует, что оператор $S(m)^*$ — также *циклический* (докажите это в качестве упражнения).

3. Мы будем пользоваться следующим определением. Пусть T — оператор в пространстве $\mathfrak{H}$. *Кратностью* μ_T назовем наименьшее кардинальное число такого подмножества из $\mathfrak{H}$, которое вместе со своими образами при преобразованиях $T, T^2, \ldots, T^n, \ldots$ порождает $\mathfrak{H}$.

Если, в частности, $\mu_T=1$, то T — циклический оператор, т. е. существует вектор $v \in \mathfrak{H}$, такой, что $\mathfrak{H}$ является замыканием линейного многообразия, натянутого на векторы $v, Tv, \ldots, T^n v, \ldots$.

Пусть T_1 и T_2 — операторы в пространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно. Будем говорить, что T_2 является *квазиаффинным преобразованием* оператора T_1, если существует такой квазиаффинитет $A\colon \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_1$, что

$$T_1 A = A T_2. \tag{9.3.1}$$

В этом случае пишем $T_1 \succ T_2$ или $T_2 \prec T_1$.

Поскольку оператор, сопряженный к квазиаффинитету, также является квазиаффинитетом, то из соотношения $T_1 \succ T_2$ следует, что $T_2^* \succ T_1^*$.

Если одновременно выполнены соотношения $T_1 \succ T_2$ и $T_2 \succ T_1$, то операторы T_1 и T_2 называют *квазиподобными*.

Из формулы (9.3.1) легко вывести, что $T_1^n A = A T_2^n$ $(n=0, 1, \ldots)$. Поэтому из соотношения $T_1 \succ T_2$ вытекает, что $\mu_{T_1} \leqslant \mu_{T_2}$.

Для каждого оператора в конечномерном пространстве $\mu_T = \mu_{T^*}$. Для операторов в бесконечномерном пространстве это не всегда так. Например, если S — простой односторонний сдвиг в l^2, $S\langle\xi_0, \xi_1, \ldots\rangle = \langle 0, \xi_0, \xi_1, \ldots\rangle$, то для оператора $T=S \oplus S$ имеем $\mu_T=2$ и $\mu_{T^*}=1$ (Д. Сарасон).

В этом отношении операторы класса C_0 похожи на операторы в конечномерном пространстве. А именно, имеют место следующие теоремы.

Теорема А. *Для каждого оператора T класса C_0 имеем $\mu_T=\mu_{T^*}$. Если $\mu_T<\infty$, то оператор T квазиподобен однозначно определенному оператору вида*

$$S(m_1)\oplus S(m_2)\oplus\ldots\oplus S(m_K), \qquad (9.3.2)$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_K$—скалярные, отличные от тождественных констант внутренние функции, каждая из которых является делителем в H^∞ предыдущей функции, $K=\mu_T$.

Оператор (9.3.2) называют «жордановой моделью» оператора T по той причине, что он в некотором смысле напоминает нормальную жорданову форму конечномерной матрицы.

Для циклических операторов, т. е. для случая $\mu_T=1$, теорема может быть усилена.

Теорема Б. *Для оператора T класса C_0 следующие условия эквивалентны:*

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(i)} & \mu_T=1;\\ \text{(i}_*\text{)} & \mu_{T^*}=1;\\ \text{(ii)} & T \text{ квазиподобен оператору } S(m),\ m=m_T,\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\textit{частный}\\ \textit{случай}\\ \textit{теоремы А.}\end{array}$$

(iii) *Для каждой внутренней функции m, являющейся делителем m_T, существует единственное инвариантное относительно T подпространство $\mathfrak{L}$, такое, что минимальная функция оператора $T|\mathfrak{L}$ равна m; именно, $\mathfrak{L}=\ker m(T)$; таким образом, всякое инвариантное подпространство является также ультраинвариантным относительно любого оператора $X\in(T)'$;*

(iv) *для каждого нетривиального инвариантного относительно T подпространства $\mathfrak{L}$ минимальная функция оператора $T|\mathfrak{L}$ является нетривиальным делителем m_T;*

(v) *если $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$—различные инвариантные относительно T подпространства, то операторы $T|\mathfrak{L}_1$ и $T|\mathfrak{L}_2$ не являются квазиподобными;*

(vi) *каждый оператор $X\in(T)''$ является функцией от T в том смысле, что $X=\varphi(T)$ при некотором $\varphi\in N_T$.*

Здесь через $(T)'$ обозначен коммутант оператора T, т. е. множество всех операторов, перестановочных с T. Второй коммутант (бикоммутант) $(T)''$ состоит из всех операторов, перестановочных с операторами из $(T)'$.

Из теоремы А следует

Теорема В. *Пусть $T\in C_0$ и $\mu_T<\infty$. Бикоммутант $(T)''$ состоит из операторов вида $\varphi(T)$, где $\varphi\in N_T$.*

До сих пор неизвестно, можно ли опустить условие $\mu_T<\infty$.

Доказательство приведенных теорем довольно длинное, и мы его не приводим. Упомянем только один важный промежуточный результат.

Предложение. *Для каждого оператора T класса C_0 имеем*

$$S(m)\oplus T_2 > T > S(m)\oplus T_1,$$

где $m=m_T$, а T_1 и T_2—операторы класса C_0.

§ 10. Примеры квазиподобия и класс функций N_T

1. Чтобы прояснить роль квазиподобия в теоремах А и Б § 9, рассмотрим две взаимно простые внутренние функции a и b и операторы

$$S(ab) \text{ и } S(\Theta), \quad \text{где } \Theta=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{H}(\Theta)=\mathfrak{H}(a)\oplus\mathfrak{H}(b) \quad \text{и} \quad S(\Theta)=S(a)\oplus S(b).$$

Из теоремы о лифтинге (теорема 3′ § 7) заключаем, что общий вид операторов

$$X\colon \mathfrak{H}(ab)\to\mathfrak{H}(\Theta), \quad X'\colon \mathfrak{H}(\Theta)\to\mathfrak{H}(ab),$$

удовлетворяющих условиям

$$S(\Theta)X=XS(ab), \quad S(ab)X'=X'S(\Theta), \tag{10.1.1}$$

дается формулами

$$Xw=P_{\mathfrak{H}(\Theta)}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} w, \quad w\in\mathfrak{H}(ab), \tag{10.1.2}$$

$$X'\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=P_{\mathfrak{H}(ab)}[y_1', \ y_2']\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\in\mathfrak{H}(\Theta), \tag{10.1.3}$$

где y_1, y_2, y_1', y_2'—функции из H^∞, удовлетворяющие условиям

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} ab=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad [y_1', \ y_2']\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}=ab[\gamma, \ \delta] \tag{10.1.4}$$

при некоторых α, β, γ, $\delta\in H^\infty$. Первое из этих равенств тривиально (достаточно взять $\alpha=by_1$, $\beta=ay_2$), тогда как второе требует, чтобы

$$y_1'=b\gamma, \ y_2'=a\delta \text{ при некоторых } \gamma, \ \delta\in H^\infty. \tag{10.1.5}$$

Предположим, что X и X' можно выбрать так, что $X'X=I$ (это равенство имеет место, в частности, в случае подобия $S(\Theta)$ и $S(ab)$). Тогда, применяя мультипликативное свойство лифтингов (§ 7.3), получим для любого $w\in\mathfrak{H}(ab)$

$$w=X'Xw=P_{\mathfrak{H}(ab)}[y_1', \ y_2']\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} w=$$
$$=(y_1'y_1+y_2'y_2)w+(\text{некоторый элемент из } abH^2).$$