Доказательство приведенных теорем довольно длинное, и мы его не приводим. Упомянем только один важный промежуточный результат.

Предложение. *Для каждого оператора T класса C_0 имеем*

$$S(m)\oplus T_2 > T > S(m)\oplus T_1,$$

где $m=m_T$, а T_1 и T_2—операторы класса C_0.

§ 10. Примеры квазиподобия и класс функций N_T

1. Чтобы прояснить роль квазиподобия в теоремах А и Б § 9, рассмотрим две взаимно простые внутренние функции a и b и операторы

$$S(ab) \text{ и } S(\Theta), \quad \text{где } \Theta=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\mathfrak{H}(\Theta)=\mathfrak{H}(a)\oplus\mathfrak{H}(b) \quad \text{и} \quad S(\Theta)=S(a)\oplus S(b).$$

Из теоремы о лифтинге (теорема 3′ § 7) заключаем, что общий вид операторов

$$X\colon\ \mathfrak{H}(ab)\longrightarrow\mathfrak{H}(\Theta), \quad X'\colon\ \mathfrak{H}(\Theta)\longrightarrow\mathfrak{H}(ab),$$

удовлетворяющих условиям

$$S(\Theta)X=XS(ab), \quad S(ab)X'=X'S(\Theta), \tag{10.1.1}$$

дается формулами

$$Xw=P_{\mathfrak{H}(\Theta)}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}w, \quad w\in\mathfrak{H}(ab), \tag{10.1.2}$$

$$X'\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=P_{\mathfrak{H}(ab)}[y_1',\ y_2']\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\in\mathfrak{H}(\Theta), \tag{10.1.3}$$

где y_1, y_2, y_1', y_2'—функции из H^∞, удовлетворяющие условиям

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}ab=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad [y_1',\ y_2']\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}=ab[\gamma,\ \delta] \tag{10.1.4}$$

при некоторых α, β, γ, $\delta\in H^\infty$. Первое из этих равенств тривиально (достаточно взять $\alpha=by_1$, $\beta=ay_2$), тогда как второе требует, чтобы

$$y_1'=b\gamma,\ y_2'=a\delta \text{ при некоторых } \gamma,\ \delta\in H^\infty. \tag{10.1.5}$$

Предположим, что X и X' можно выбрать так, что $X'X=I$ (это равенство имеет место, в частности, в случае подобия $S(\Theta)$ и $S(ab)$). Тогда, применяя мультипликативное свойство лифтингов (§ 7.3), получим для любого $w\in\mathfrak{H}(ab)$

$$w=X'Xw=P_{\mathfrak{H}(ab)}[y_1',\ y_2']\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}w=$$
$$=(y_1'y_1+y_2'y_2)w+(\text{некоторый элемент из } abH^2).$$

Выбирая, в частности,

$$w(\lambda)=1-\overline{a(0)}\,\overline{b(0)}\,a(\lambda)\,b(\lambda)$$

(ср. (9.2.2)) и используя (10.1.5), заключаем, что $1=a\xi+b\eta+ab\zeta$ при некоторых ξ, $\eta\in H^\infty$ и $\zeta\in H^2$. Поскольку на единичной окружности $\zeta=\bar a\bar b-\bar b\xi-\bar a\eta$, то имеем также $\zeta\in H^\infty$. Отсюда

$$1=ax+by \tag{10.1.6}$$

при некоторых x, $y\in H^\infty$. Таким образом, существование функций x, $y\in H^\infty$, удовлетворяющих уравнению (10.1.6), является *необходимым* условием *подобия* оператора $S(a)\oplus S(b)$ оператору $S(ab)$.

Это условие заведомо не выполнено, если

a есть произведение Бляшке с действительными нулями λ_n, стремящимися к 1, например $\lambda_n=1-1/n^2$;
b есть сингулярная внутренняя функция $\exp[(\lambda+1)/(\lambda-1)]$.

Действительно, в этом случае a и b стремятся к нулю на последовательности λ_n при $n\to\infty$, так что этим же свойством обладает и $ax+by$ при любых x, $y\in H^\infty$, а это противоречит (10.1.6).

Таким образом, в приведенном примере операторы $S(a)\oplus S(b)$ и $S(ab)$ *не являются подобными*.

Однако если a и b взаимно просты, то эти операторы оказываются квазиподобными. Действительно, выбирая $y_1=y_2=1$, $y_1'=b$, $y_2'=a$ (см. (10.1.5)), получаем, что операторы X и X' суть квазиаффинитеты. Докажем это. По определению

$$Xw=P_{\mathfrak{H}(\Theta)}\begin{bmatrix}w\\ w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_{\mathfrak{H}(a)}w\\ P_{\mathfrak{H}(b)}w\end{bmatrix}\quad\text{для}\quad w\in\mathfrak{H}(ab),$$

$$X'\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=P_{\mathfrak{H}(ab)}(bu+av)\quad\text{для}\quad\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\in\mathfrak{H}(\Theta),\ \text{т. е.}\quad\text{для}\quad u\in\mathfrak{H}(a),\ v\in\mathfrak{H}(b).$$

1) Равенство $Xw=0$ влечет за собой включение $w\in aH^2\cap bH^2=abH^2$, которое возможно для функции $w\in\mathfrak{H}(ab)$, лишь если $w=0$. Таким образом, X имеет нулевое ядро.

2) Если вектор $\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}\in\mathfrak{H}(\Theta)$ ортогонален Xw при любом $w\in\mathfrak{H}(ab)$, то

$$(u+v,\ w)=(u,\ P_{\mathfrak{H}(a)}w)+(v,\ P_{\mathfrak{H}(b)}w)=\left(\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix},\ Xw\right)=0$$

для любого $w\in\mathfrak{H}(ab)$. Поэтому $u+v\in abH^2$. С другой стороны, $u\perp aH^2$ и $v\perp bH^2$, так что $u+v\perp abH^2$. Значит, $u+v=0$. Следовательно, оба вектора u и v ортогональны как aH^2, так и bH^2, поэтому они ортогональны $aH^2\vee bH^2$, т. е. ортогональны H^2. Мы получили, что $u=v=0$. Значит, область значений оператора X плотна в $\mathfrak{H}(\Theta)$.

3) Предположим, что $X'\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}=0$ для некоторого $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\in\mathfrak{H}(\Theta)$, т. е. предположим, что $bu+av\in abH^2$. Поскольку, с другой стороны, из включений $u\in\mathfrak{H}(a)$ и $v\in\mathfrak{H}(b)$ вытекает, что $u\perp aH^2$, $v\perp bH^2$ и, следовательно, $bu\perp abH^2$ и $av\perp abH^2$, то $bu+av\perp$ $\perp abH^2$. Таким образом, $bu+av=0$. Поскольку a и b взаимно просты, заключаем отсюда, что a является делителем u, а b — делителем v. Поэтому $u\in aH^2$, $v\in bH^2$. Таким образом, $u=v=0$, и, значит, X' имеет нулевое ядро.

4) Пусть вектор $w\in\mathfrak{H}(ab)$ ортогонален к множеству значений оператора X', т. е. ортогонален любой сумме $bu+av$, в которой $u\in\mathfrak{H}(a)$ и $v\in\mathfrak{H}(b)$. Тогда $w\perp b\mathfrak{H}(a)$. Учитывая, что $w\perp baH^2$, имеем также $w\perp b(\mathfrak{H}(a)\oplus aH^2)$, т. е. $w\perp bH^2$. Аналогично, $w\perp aH^2$. Поскольку, в силу взаимной простоты a и b, $aH^2\vee bH^2=H^2$, получаем $w=0$. Следовательно, область значений оператора X' плотна в $\mathfrak{H}(ab)$.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Если a и b — две произвольные взаимно простые внутренние функции, то операторы $S(a)\oplus S(b)$ и $S(ab)$ квазиподобны. Если же уравнение $1=ax+by$ не имеет решения x, $y\in H^\infty$, то $S(a)\oplus S(b)$ и $S(ab)$ не являются подобными.

Этот пример показывает, что для операторов в бесконечномерном гильбертовом пространстве квазиподобие — более слабое, но, по-видимому, более естественное отношение, нежели отношение подобия. В частности, теорема А § 9 не верна, если в ее формулировке квазиподобие заменить на подобие.

2. В теоремах Б и В § 9 были выделены операторы A, допускающие представление $A=\varphi(T)$, где T — данный оператор класса C_0, а φ — некоторая функция класса N_T. Поскольку операторы A ограниченные, естественно задать вопрос, допускают ли они также и представление вида $A=w(T)$ с некоторой функцией $w\in H^\infty$. Как следует из приводимого ниже примера, ответ на поставленный вопрос в общем случае отрицателен. Этот пример интересен и сам по себе.

Пусть опять a и b — две взаимно простые внутренние функции. Положим $T=S(a)\oplus S(b)$. Тогда $m_T=ab$. Замечая, что a^2 и b^2 взаимно простые вместе с a и b и что, следовательно, в силу соотношений $a^2=a(a+b)-ab$, $b^2=b(a+b)-ab$, функции $a+b$ и ab не имеют отличных от констант общих внутренних делителей, получаем, что, в силу следствия 3 из § 8.3, оператор $(a+b)(T)$ является квазиаффинитетом. Поэтому функция $\varphi=$ $=(a-b)/(a+b)$ принадлежит классу N_T. Соответствующий оператор $V=\varphi(T)$ оказывается ограниченным и даже симметричным. Именно, $V=(-I_{\mathfrak{H}(a)})\oplus(I_{\mathfrak{H}(b)})$. Действительно,

$$\begin{aligned}(a-b)(T)\cdot V-(a+b)(T)=&\\ &=[-(a-b)-(a+b)](S(a))\oplus[(a-b)-(a+b)](S(b))=\\ &=-2[a(S(a))\oplus b(S(b))]=0\oplus 0=0.\end{aligned}$$

Но оператор V в общем случае не представляется в виде $V=w(T)$, где $w\in H^\infty$. В самом деле, если бы такое представление было всегда возможно, мы имели бы $-I_{\mathfrak{H}(a)}=w(S(a))$ и $I_{\mathfrak{H}(b)}=w(S(b))$. Взяв, в частности, функции $1-\overline{a(0)}a\in\mathfrak{H}(a)$ и $1-\overline{b(0)}b\in\mathfrak{H}(b)$, мы получили бы

$$-1+\overline{a(0)}a-w\cdot(1-\overline{a(0)}a)\in aH^2,$$
$$1-\overline{b(0)}b-w\cdot(1-\overline{b(0)}b)\in bH^2$$

и, следовательно,

$$1+w=au,\qquad 1-w=bv,$$

где u, $v\in H^2$ и даже u, $v\in H^\infty$. Таким образом, *необходимым условием существования представления $V=w(T)$, $w\in H^\infty$, оператора V является разрешимость уравнения $1=ax+by$ с x, $y\in H^\infty$.* Однако, как мы знаем, существуют взаимно простые a и b, для которых это уравнение неразрешимо.

Приведенный пример показывает, что построение функционального исчисления для вполне неунитарных операторов T на базе класса N_T (как это сделано в § 8) довольно естественно. Класса ограниченных аналитических функций нам было бы недостаточно.

Рекомендуемая литература

Основным источником является монография Сёкефальви-Надя и Фояша [1], в которой можно найти подробную библиографию и исторический комментарий.

По параграфам мы рекомендуем следующую литературу.

§ 1. С.-Надь и Фояш [1], гл. I. Впервые теорема об унитарной дилатации доказана в работе С.-Надя [11] совершенно иным методом. Приведенное в тексте доказательство в основном следует работе Шеффера [1].

§ 2. С.-Надь и Фояш [1], гл. II. См. также Гальперин [1].

§ 3. С.-Надь и Фояш [1], гл. VI.

§ 4. С.-Надь и Фояш [1], гл. VI и IX.1.

§ 5. С.-Надь и Фояш [1], гл. VII. О «странных» факторизациях можно прочитать в статье Фояша [2].