

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора второго русского издания	5
Предисловие ко второму русскому изданию	7
Предисловие	9
Часть первая	
Современные теории производной и интеграла	
Глава I. Производная	13
§ 1. Теорема Лебега о производной монотонной функции	13
1. Пример непрерывной функции, не имеющей производной	13
2. Теорема Лебега о производной монотонной функции. Множества меры нуль	15
3. Доказательство теоремы Лебега	16
4. Функции с ограниченным изменением	19
§ 2. Некоторые следствия теоремы Лебега	21
5. Теорема Фубини о почленном дифференцировании ряда с монотонными членами	21
6. Точки плотности линейных множеств	22
7. Функции скачков	23
8. Произвольные функции с ограниченным изменением	25
9. Теорема Данжуа—Юнг—Сакса о производных числах любой функции	27
§ 3. Функции интервала	29
10. Вводные замечания	29
11. Первая основная теорема	31
12. Вторая основная теорема	32
13. Интегралы Дарбу и интеграл Римана	33
14. Теорема Дарбу	35
15. Функции с ограниченным изменением и спрямляемые кривые	36
Глава II. Интеграл Лебега	39
§ 1. Определение и основные свойства	39
16. Интегралы ступенчатых функций. Две леммы	39
17. Интегралы суммируемых функций	41
18. Интегрирование возрастающих последовательностей (теорема Б. Леви)	44
19. Интегрирование последовательностей, имеющих суммируемую мажоранту (теорема Лебега)	47
20. Теоремы о суммируемости предельной функции	49
21. Неравенства Шварца, Гельдера и Минковского	51
22. Измеримые множества и измеримые функции	54
§ 2. Неопределенные интегралы. Абсолютно непрерывные функции	57
23. Полное изменение и производная неопределенного интеграла	57
24. Пример монотонной непрерывной функции, производная которой почти всюду равна нулю	59

25. Абсолютно непрерывные функции. Каноническое разложение монотонной функции	60
26. Интегрирование по частям и интегрирование с помощью подстановки	65
27. Интеграл как функция множества	67
§ 3. Пространство L^2 и линейные функционалы в нем. Пространства L^p	68
28. Пространство L^2 . Сходимость в среднем. Теорема Рисса — Фишера	68
29. Слабая сходимость	71
30. Линейные функционалы	72
31. Последовательности линейных функционалов. Теорема Осгуда	73
32. Сепарабельность пространства L^2 . Теорема выбора	75
33. Ортонормированные системы	77
34. Подпространства пространства L^2 . Теорема о разложении	82
35. Другое доказательство теоремы выбора. Продолжение функционалов	84
36. Пространство L^p и его линейные функционалы	85
37. Одна теорема о сходимости в среднем	90
38. Теорема Банаха — Сакса	92
§ 4. Функции нескольких переменных	93
39. Определения. Принцип соответствия	93
40. Повторное интегрирование. Теорема Фубини	96
41. Производные (относительно сети) неотрицательной аддитивной функции прямоугольника. Параллельные переносы сети	97
42. Функции с ограниченным изменением. Сопряженные сети	100
43. Аддитивные функции множества. V -измеримые множества	102
§ 5. Другие определения интеграла Лебега	105
44. L -измеримые множества	105
45. L -измеримые функции и L -интеграл	107
46. Другие определения. Теорема Егорова	110
47. Элементарное доказательство теорем Арцела и Осгуда	114
48. Интегрирование в смысле Лебега как операция, обратная дифференцированию	116
Глава III. Интеграл Стильтьеса и его обобщения	119
§ 1. Линейные функционалы в пространстве непрерывных функций	119
49. Интеграл Стильтьеса	119
50. Линейные функционалы в пространстве C	120
51. Единственность производящей функции	125
52. Продолжение линейного функционала	126
53. Теорема о приближении. Проблема моментов	130
54. Интегрирование по частям. Вторая теорема о среднем	134
55. Последовательности функционалов	135
§ 2. Обобщения интеграла Стильтьеса	137
56. Интегралы Стильтьеса — Римана и Стильтьеса — Лебега	137
57. Сведения интеграла Стильтьеса — Лебега к интегралу Лебега	139
58. Соотношение между двумя интегралами Стильтьеса — Лебега	142
59. Функции нескольких переменных. Прямые определения	144
60. Определение, основанное на принципе соответствия	146
§ 3. Интеграл Даниеля	148
61. Положительные линейные функционалы	148
62. Функционалы произвольного знака	150

53. Производная одного линейного функционала относительно другого	153
---	-----

Часть вторая

Интегральные уравнения. Линейные операторы

Глава IV. Интегральные уравнения	159
§ 1. Метод последовательных приближений	159
64. Понятие интегрального уравнения	159
65. Ограниченные ядра	161
66. Ядра с суммируемым квадратом. Линейные операторы в пространстве L^2	163
67. Обратный оператор. Регулярные и особые точки	167
68. Итерированные ядра. Резольвента	171
69. Приближение произвольного ядра ядрами конечного ранга	174
§ 2. Альтернатива Фредгольма	177
70. Интегральные уравнения с ядрами конечного ранга	177
71. Интегральные уравнения с ядрами общего вида	181
72. Разложение оператора, соответствующее заданной особой точке	183
73. Альтернатива Фредгольма в случае произвольного ядра	186
§ 3. Определители Фредгольма	188
74. Метод Фредгольма	188
75. Неравенство Адамара	192
§ 4. Метод, основанный на полной непрерывности	193
76. Полная непрерывность	193
77. Подпространства M_n и N_n	195
78. Случаи $\nu=0$ и $\nu \geq 1$. Теорема о разложении	199
79. Расположение особых точек	203
80. Каноническое разложение, соответствующее особой точке	204
§ 5. Приложения к теории потенциала	206
81. Задачи Дирихле и Неймана. Решение их методом Фредгольма	206
Глава V. Гильбертово и банаховы пространства	211
§ 1. Гильбертово пространство	211
82. Координатное гильбертово пространство	211
83. Абстрактное гильбертово пространство	213
84. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Основные понятия	216
85. Вполне непрерывные линейные операторы	219
86. Биортогональные последовательности. Теорема Пэли и Винера	224
§ 2. Банаховы пространства	227
87. Банаховы пространства и пространства, им сопряженные	227
88. Линейные операторы. Сопряженные операторы	232
89. Функциональные уравнения	234
90. Операторы в пространстве непрерывных функций	237
91. Еще о теории потенциала	242
Глава VI. Симметричные вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве	245
§ 1. Существование собственных элементов. Теорема о разложении	245
92. Собственные значения и собственные элементы. Простейшие свойства симметричных операторов	245

93. Вполне непрерывные симметричные операторы	249
94. Решение функционального уравнения $f - \lambda Af = g$	253
95. Непосредственное отыскание n -го собственного значения заданного знака	255
96. Другой способ отыскания собственных значений и собственных элементов	258
§ 2. Операторы с симметричным ядром	260
97. Теоремы Гильберта и Шмидта	260
98. Теорема Мерсера	263
§ 3. Приложения к задаче о колебаниях струны и к почти периодическим функциям	265
99. Задача о колебаниях струны. Пространства D и H	265
100. Задача о колебаниях струны. Собственные колебания	269
101. Пространство почти периодических функций	272
102. Доказательство основной теоремы о почти периодических функциях	275
103. Изометричные операторы в конечномерном пространстве	278
Глава VII. Ограниченные симметричные, унитарные и нормальные операторы в гильбертовом пространстве	280
§ 1. Симметричные операторы	280
104. Некоторые основные свойства	280
105. Проекционные операторы	285
106. Функции ограниченного симметричного оператора	289
107. Спектральное разложение ограниченного симметричного оператора	291
108. Положительная и отрицательная части симметричного оператора. Другой вывод спектрального разложения	297
§ 2. Унитарные и нормальные операторы	300
109. Унитарные операторы	300
110. Нормальные операторы. Представление их в виде произведений	304
111. Спектральное разложение нормальных операторов. Функции нескольких операторов	306
§ 3. Унитарные операторы в пространстве L^2	312
112. Теорема Бохнера	312
113. Трансформации Фурье—Планшереля и Ватсона	314
Глава VIII. Неограниченные линейные операторы в гильбертовом пространстве	317
§ 1. Обобщение понятия линейного оператора	317
114. Теорема Хеллингера и Теплица. Общее понятие линейного оператора	317
115. Сопряженные операторы	320
116. Перестановочность. Приводимость	322
117. График оператора	324
118. Операторы $B = (I + T^*T)^{-\frac{1}{2}}$ и $C = T(I + T^*T)^{-\frac{1}{2}}$	327
§ 2. Самосопряженные операторы. Спектральное разложение	329
119. Симметричные и самосопряженные операторы. Определения и примеры	329
120. Спектральное разложение самосопряженного оператора	334
121. Метод Неймана. Преобразования Кэлл	341
122. Полуограниченные сопряженные операторы	344

§ 3. Расширения симметричных операторов	346
123. Преобразования Кэли. Индексы дефекта	346
124. Полуограниченные симметричные операторы. Метод Фридрихса	350
125. Метод Крейна	357
Глава IX. Самосопряженные операторы. Операторное исчисление, спектры, возмущения	363
§ 1. Операторное исчисление	363
126. Ограниченные функции	363
127. Неограниченные функции. Определения	366
128. Неограниченные функции. Правила действий	368
129. Характеристическое свойство функций самосопряженного оператора	374
130. Конечные и счетные множества перестановочных самосопряженных операторов	377
131. Произвольные множества перестановочных самосопряженных операторов	381
§ 2. Спектр самосопряженного оператора и его возмущения	383
132. Спектр самосопряженного оператора. Разложение, соответствующее точечному спектру и непрерывному спектру	383
133. Предельный спектр	387
134. Возмущение спектра, вызванное вполне непрерывным слагаемым	390
135. Непрерывные возмущения	391
136. Аналитические возмущения	396
Глава X. Группы и полугруппы операторов	403
§ 1. Унитарные операторы	403
137. Теорема Стоуна	403
138. Доказательство, основанное на теореме Бохнера	408
139. Некоторые применения теоремы Стоуна	412
140. Унитарные представления более общих групп	414
§ 2. Неунитарные операторы	417
141. Группы и полугруппы самосопряженных операторов	417
142. Инфинитезимальный производящий оператор полугруппы операторов общего вида	420
143. Показательные формулы	423
§ 3. Эргодические теоремы	429
144. Первоначальные методы	429
145. Методы, основанные на свойствах выпуклости	433
146. Полугруппы неперестановочных сжатий	436
Глава XI. Спектральные теории общих линейных операторов	439
§ 1. Применение методов теории функций	439
147. Спектр. Криволинейные интегралы	439
148. Теорема о разложении	442
149. Спектр и нормы степеней оператора	447
150. Применение к абсолютно сходящимся тригонометрическим рядам	451
151. Начала операторного исчисления	455
152. Два примера	458
§ 2. Теория спектральных множеств по Нейману	459
153. Предварительные замечания	459

154. Спектральные множества	463
155. Характеристика симметричных, унитарных и нормальных операторов в терминах спектральных множеств	467
Добавление 1. Продолжения операторов в гильбертовом пространстве с выходом из этого пространства. <i>Б. Сёкефальви-Надь</i> . Перевод <i>А. О. Кравицкого</i>	470
§ 1. Введение	470
§ 2. Обобщенные спектральные семейства. Теорема Наймарка	472
§ 3. Моментные последовательности операторов	477
§ 4. Сжатия в гильбертовом пространстве	480
§ 5. Нормальные продолжения	487
§ 6. Основная теорема	489
§ 7. Доказательство теоремы Наймарка	496
§ 8. Доказательство теоремы о моментных последовательностях	499
§ 9. Доказательство теорем о сжатиях	500
§ 10. Доказательство теоремы о нормальных продолжениях	505
Добавление 2. Унитарные дилатации операторов в гильбертовом пространстве и смежные вопросы. <i>Б. Сёкефальви-Надь</i> . Перевод <i>П. Б. Гусятникова</i>	511
§ 1. Изометричные и унитарные дилатации оператора сжатия	512
§ 2. Дальнейшие свойства минимальной унитарной дилатации	518
§ 3. Характеристическая функция и функциональная модель	521
§ 4. Дальнейшие свойства характеристической функции $\Theta_T(\lambda)$	526
§ 5. Инвариантные подпространства и факторизации характеристической функции	530
§ 6. Коммутативные семейства	534
§ 7. Лифтинг решений операторных уравнений	537
§ 8. Функциональное исчисление для сжатий	545
§ 9. Операторы класса C_0 и жорданова модель	551
§ 10. Примеры квазиподобия и класс функций N_T	556
Рекомендуемая литература	559
Список литературы	561
Именной указатель	575
Предметный указатель	578