Глава 1

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Связь с конечномерными пространствами; аксиомы гильбертова пространства; неравенство Шварца и неравенство треугольника; правило параллелограмма и связь с общими банаховыми пространствами; полнота l^2; трансфинитные кардинальные числа; эквивалентность сепарабельных гильбертовых пространств; гильбертовы пространства бо́льших размерностей; сепарабельность пространств Фока; критерий полноты ортонормированных последовательностей; линейные функционалы; теоремы Рисса—Фишера и Рисса—Фреше; сильная и слабая сходимость; поляризация квадратичных функционалов.

Предварительные сведения: линейная алгебра.

В этой главе рассматривается в основном геометрия гильбертовых пространств (главным образом абстрактных). В гл. 5 теория гильбертовых пространств совместно с теорией распределений используется для построения теории пространств L^2, на которой в значительной мере основывается современный функциональный анализ.

1.1. ОБЗОР НЕОБХОДИМЫХ СВЕДЕНИЙ О МАТРИЦАХ И КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Предполагается, что читатель знаком со следующим материалом. Вещественная или комплексная матрица A размера $n\times n$ определяет линейное преобразование n-мерного вещественного или комплексного пространства V^n: $\mathbf{x}\to\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$, в координатной записи $x'_j=\sum_{k=1}^{n}A_{jk}x_k$. Если $\mathbf{x}$ рассматривать как вектор-столбец, т.е. как $(n\times 1)$-матрицу (и в этом случае опускать индекс столбца), то $A\mathbf{x}$ оказывается просто произведением матриц. Транспонированная и эрмитово сопряженная матрицы для матрицы M (не обязательно квадратной) обозначаются через M^T и M^*, т. е. $(M^T)_{jk}=M_{kj}$, $(M^*)_{jk}=\overline{M}_{kj}$; в частности, $\mathbf{x}^T$ и $\mathbf{x}^*$—векторы-строки. Если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$—любые векторы из V^n, то их эрмитово скалярное произведение является матрицей размера 1×1, т. е. числом $\mathbf{x}^*\mathbf{y}=\sum_{j=1}^{n}\overline{x}_jy_j$, обозначаемым также через $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. В вещественном случае получаем просто $\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\sum x_j y_j$, а эту величину обозначают часто и через $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$. [Заметим, что $\mathbf{x}\mathbf{y}^*$ — не число, а $(n\times n)$-матрица (ранга 1); возможно, это объясняет, почему в $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ второй сомножитель взят линейным, первый же полулинейным [1]), как обычно делается в физике, а не наоборот, как обычно принято в математике, т. е. $(\mathbf{x}, a\mathbf{y})=a(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, тогда как $(a\mathbf{x}, \mathbf{y})=\bar{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.] Говорят, что векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ *ортогональны*, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y})=0$. *Длина* вектора $\mathbf{x}$ — число $\|\mathbf{x}\|=(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$, которое иногда обозначают просто $|\mathbf{x}|$.

Основные геометрические понятия V^n связаны, во-первых, с линейной зависимостью и, во-вторых, с ортогональностью. Векторы $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ *линейно зависимы*, если найдутся такие числа $a_1, \ldots, a_k$, не все равные нулю, что $\sum_{j=1}^{k} a_j\mathbf{x}^j$ — нулевой вектор (при $k>n$ векторы всегда линейно зависимы). Множество всех линейных комбинаций $\sum a_j\mathbf{x}^j$ k данных векторов называется (линейным) подпространством пространства V^n, *порожденным* векторами $\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^k$ (или *линейной оболочкой* этих векторов). Если эти векторы линейно независимы, то порожденное ими подпространство *k-мерно*; в линейной алгебре доказывается, что если $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^k$ — другие линейно независимые векторы, лежащие в этом подпространстве, то их линейная оболочка оказывается тем же самым подпространством. Для вещественного пространства V^n числа $a_1, a_2, \ldots$ — произвольные вещественные, для комплексного V^n эти числа — комплексные. Множество вещественных или комплексных чисел (обозначаемое соответственно $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) называется *полем скаляров*; никакие другие поля использоваться не будут. Иногда говорят, что комплексное пространство V^n имеет $2n$ *вещественных измерений*.

Множество $\{\mathbf{v}^j\}_1^k$ векторов из V^n называется *ортонормированным* [2]), если $(\mathbf{v}^i, \mathbf{v}^j)=\delta_{ij}$ ($\delta_{ij}=1$, если $i=j$, и $\delta_{ij}=0$, если $i\neq j$). Ясно, что тогда $k\leqslant n$. Если $k=n$, то любой вектор $\mathbf{x}$ можно записать как $\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{v}^j$, где $a_j=(\mathbf{v}^j, \mathbf{x})$.

Если S — некоторое подпространство пространства V^n, то $S^\perp$ обозначает *ортогональное дополнение* S, которое определяется как

$$S^\perp=\{\mathbf{x}\colon (\mathbf{x}, \mathbf{y})=0 \quad \text{для всех } \mathbf{y} \text{ из } S\}; \qquad (1.1.1)$$

иначе говоря, $S^\perp$ состоит из всех тех $\mathbf{x}$, которые ортогональны всем $\mathbf{y}$ из S; кроме того, $(S^\perp)^\perp=S$ и $\dim S+\dim S^\perp=n$. *Тео-*

[1]) По другой терминологии — сопряженно линейным или антилинейным. — *Прим. перев.*

[2]) По другой терминологии — ортогональным нормированным или ортонормальным. — *Прим. перев.*

рема о проекции, доказываемая в линейной алгебре, утверждает, что для любого вектора $\mathbf{x}$ из V^n существует единственное разложение $\mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{z}$, где $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ принадлежат S и $S^{\perp}$ соответственно.

В этой главе изложенные выше идеи обобщаются на случай определенных бесконечномерных пространств, называемых *гильбертовыми*. Бесконечномерность порождает несколько новых понятий. Например, в отличие от конечномерных пространств, где скалярное произведение всегда имеет смысл, в некоторых бесконечномерных пространствах (см. гл. 15) длина $\|\mathbf{x}\|$ определена для всех $\mathbf{x}$, однако скалярного произведения нет, причем его и нельзя определить никаким разумным образом Мы начнем с гильбертовых пространств, в которых скалярное произведение определено и которые поэтому являются естественным обобщением хорошо знакомых евклидовых пространств.

В главах 7—12 изучаются обобщения матриц, точнее соответствующих им линейных преобразований. Этими обобщениями являются линейные преобразования или операторы в гильбертовых пространствах. Необходимо обобщить несколько определений и утверждений, а именно следующие. Если A — матрица размера $n\times n$, вектор $\mathbf{v}\neq 0$ и λ — число, то λ называется *собственным значением* A, если $A\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$, причем $\mathbf{v}$ называется соответствующим ему *собственным вектором*. Преобразование $\mathbf{x}\to\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$ имеет обратное преобразование $\mathbf{x}'\to\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{x}'$ тогда и только тогда, когда нуль не является собственным значением A. [Поскольку собственные значения λ являются нулями многочлена $\det(\lambda I-A)$ и матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\det A\neq 0$. Для теоретических целей обратная матрица получается при помощи алгебраических дополнений, для практических нужд — при помощи метода исключения Гаусса; эти методы не обобщаются.] Если A — эрмитова матрица, т. е. $A^*=A$, то все ее собственные значения вещественны и у нее есть полное ортонормированное множество собственных векторов $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$. Если U — матрица размера $n\times n$, имеющая эти векторы своими столбцами* (она *унитарна*: $UU^*=U^*U=I$), то U^*AU — диагональная матрица D с собственными значениями матрицы A на главной диагонали и $A=UDU^*$. Для такой диагонализируемости матрицы A необходимо и достаточно, чтобы она была *нормальной*, т. е. чтобы $AA^*=A^*A$. Коммутирующие нормальные матрицы A и B можно диагонализировать одновременно одной и той же унитарной матрицей U. Матрица A называется *положительно определенной (полуопределенной)*, если $\mathbf{x}^*A\mathbf{x}>0$ ($\geqslant 0$) для всех $\mathbf{x}\neq 0$. В этом случае A обязательно эрмитова. [Тензор момента инерции — положительно определенная вещественная (и, следовательно, симметрическая) матрица.] Все эти представления можно перенести на гильбертовы пространства, хотя такие обобщения не всегда непосредственны и очевидны.

1.2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО. НОРМИРОВАННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Хотя выше вектор был определен как набор n чисел, векторные пространства (называемые также *линейными пространствами*) можно определить аксиоматически, как это обычно делается в курсах линейной алгебры. В бесконечномерном случае такой подход предпочтительнее, поскольку имеется много конкретных как будто различных реализаций этих пространств. Аксиомы линейного пространства V над полем $\mathbb{F}$ $(=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C})$ таковы:

1. Если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ принадлежат V, то при любых a и b из $\mathbb{F}$ и $a\mathbf{u}+b\mathbf{v}$ принадлежит V;
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$, $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$;
3. $a(b\mathbf{u})=(ab)\mathbf{u}$;
4. $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a\mathbf{u}+a\mathbf{v}$, $(a+b)\mathbf{u}=a\mathbf{u}+b\mathbf{u}$;
5. Имеется единственный нулевой вектор $\mathbf{0}$, такой, что $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$ для всех $\mathbf{u}$;
6. $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$, $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$.

Обычно $(-1)\mathbf{u}$ записывают как $-\mathbf{u}$, а $\mathbf{u}+(-1)\mathbf{v}$ — как $\mathbf{u}-\mathbf{v}$; кроме того, часто пишут 0 вместо $\mathbf{0}$, например, $\mathbf{u}-\mathbf{u}=0$. В конечномерном случае далее предполагается, что в V найдется n (но не $n+1$) линейно независимых векторов; если в таком пространстве V выбрать базис, то оно будет в точности эквивалентно описанному выше пространству V^n.

Упражнения

1. Покажите, что $\mathbf{u}-\mathbf{u}=\mathbf{0}$ для всех $\mathbf{u}$.

2. Покажите, что единственность нулевого вектора $\mathbf{0}$ следует из других аксиом, т. е. если $u+\mathbf{0}_1=\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}+\mathbf{0}_2=\mathbf{u}$ для всех $\mathbf{u}$, то $\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_2$.

3. Докажите, что при заданных $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ уравнение $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{w}$ имеет единственное решение $\mathbf{v}=\mathbf{w}+(-1)\mathbf{u}$.

Линейное пространство V называется *нормированным*, если для любого $\mathbf{u}$ из V определено вещественное число $\|\mathbf{u}\|$, называемое *нормой* вектора $\mathbf{u}$, так, что

7. $\|\mathbf{u}\|>0$ при $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$;
8. $\|\mathbf{0}\|=0$;
9. $\|a\mathbf{u}\|=|a|\,\|\mathbf{u}\|$;
10. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|\leqslant\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$.

[В пространстве V^n в качестве нормы $\|\mathbf{u}\|$ берется обычно длина вектора $\mathbf{u}$: $\|\mathbf{u}\|^2=\sum_{j=1}^{n}|u_j|^2$.]

Упражнение

4. Покажите, что аксиома 6 линейного пространства может быть получена из других аксиом (включая аксиомы нормы). *Указание*. Доказывайте последовательно, что для любого $\mathbf{u}$ $0\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0}$, $\mathbf{u}-\mathbf{u}=0$, $1\cdot\mathbf{u}-\mathbf{u}=0$, $1\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}$. С другой стороны, если оставить аксиому $0\cdot\mathbf{u}=\mathbf{0}$, то аксиому 8, $\|\mathbf{0}\|=0$, можно опустить.

1.3. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО: АКСИОМЫ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Гильбертово пространство H (вещественное или комплексное) — это полное пространство со скалярным произведением. Это означает, во-первых, что H — линейное пространство, определенное как в предыдущем параграфе; во-вторых, что для всех u и v из H определено скалярное произведение (u, v) — функция со значениями в поле скаляров $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, которая линейна по v и эрмитово симметрична ($(u, v)=\overline{(v, u)}$), а значит, полулинейна по u, причем соответствующая квадратичная форма положительно определенна: $(u, u)\geqslant 0$ для всех u и $(u, u)=0$ лишь при $u=0$; в-третьих, что H пóлно относительно нормы $\|u\|=(u, u)^{1/2}$, т. е. любая последовательность Коши имеет предел в H. Важность полноты для квантовой механики обсуждается в гл. 14.

В определении гильбертова пространства не требуется, чтобы оно было бесконечномерным, хотя это обычно предполагается, если только не оговорено противное. Вопрос о размерности обсуждается в § 1.5.

Вещественное гильбертово пространство — просто бесконечномерный аналог обычного n-мерного евклидова пространства; скалярное произведение (u, v) (которое здесь симметрично, $(u, v)=(v, u)$, и линейно по каждому сомножителю) — аналог скалярного произведения $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. В комплексном случае (u, v) аналогично эрмитову скалярному произведению $\sum \bar{u}_j v_j$.

Положительная определенность нормы и равенство $\|au\|=|a|\|u\|$ следуют непосредственно из свойств скалярного произведения и определения нормы, $\|u\|=(u, u)^{1/2}$. Докажем теперь неравенство треугольника.

Для любого числа a и любых u и v из H имеем

$$0\leqslant(u+av,\ u+av)=(u, u)+(u, av)+(av, u)+(av, av);$$

поскольку (av, u) комплексно сопряженно к (u, av), то

$$-2\,\mathrm{Re}\,(u, av)\leqslant\|u\|^2+|a|^2\|v\|^2. \qquad (1.3.1)$$

Возьмем

$$a=-\frac{\overline{(u, v)}\,\|u\|}{|(u, v)|\,\|v\|};$$

тогда из (1.3.1) с учетом равенства $(u, av)=a(u, v)$ получим

$$2|(u, v)|\frac{\|u\|}{\|v\|}\leqslant 2\|u\|^2,$$

или

$$|(u, v)|\leqslant\|u\|\|v\|; \qquad (1.3.2)$$

это *неравенство Шварца* (которое в русской литературе называют *неравенством Буняковского*). Отсюда следует *непрерывность* скалярного произведения по каждому сомножителю. В самом деле, если $v_n \to v$ (т. е. если $\|v_n - v\| \to 0$), то $|(u, v_n - v)| \leqslant \|u\| \|v_n - v\| \to 0$; следовательно, $(u, v_n) \to (u, v)$. Наконец,

$$\begin{aligned}(u+v,\ u+v) &= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(u, v) + \|v\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \|u\|^2 + 2|(u, v)| + \|v\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2,\end{aligned}$$

а отсюда следует *неравенство треугольника*

$$\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|. \tag{1.3.3}$$

Упражнение

1. Докажите непрерывность скалярного произведения по обоим сомножителям одновременно: если $u_n \to u$ и $v_n \to v$, то $(u_n, v_n) \to (u, v)$. *Указание.* Докажите сначала, что $\|u_n\| \to \|u\|$ и $\|v_n\| \to \|v\|$.

Напоминание. Функция $f(x, y)$ может быть непрерывной по каждому аргументу в отдельности (т. е. непрерывной по x при каждом фиксированном y и по y при каждом фиксированном x), но не быть непрерывной по совокупности переменных. Например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2+y^2) & \text{при } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = y = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке (0, 0) и по x, и по y в отдельности, но не совместно, что можно увидеть, устремляя x и y к нулю по прямой, проходящей под углом 45° к оси x.

Можно получить две другие формы неравенства треугольника. Для этого заменим в (1.3.3) v на $w - u$, а потом поменяем местами w и u. После переименования переменных окончательный результат можно представить в следующем виде:

$$|\|u\| - \|v\|| \leqslant \left\{\begin{matrix} \|u+v\| \\ \text{или} \\ \|u-v\| \end{matrix}\right\} \leqslant \|u\| + \|v\|. \tag{1.3.4}$$

Из определения нормы через скалярное произведение получаем тождество

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \tag{1.3.5}$$

которое называют *правилом параллелограмма*. Так как u, v, $u+v$, $u-v$ принадлежат двумерному подпространству, неравенства треугольника и правило параллелограмма выражают элементарные теоремы евклидовой геометрии на плоскости.

Замечание. Банахово пространство $\boldsymbol{B}$ (см. гл. 15) — это полное нормированное линейное пространство, однако его норма не обязательно порождается скалярным произведением. Йордан и фон Нейман [1935] доказали, что если для всех u и v из $\boldsymbol{B}$ выполняется правило параллелограмма, то можно определить скалярное произведение так, что $\boldsymbol{B}$ станет гильбертовым пространством. В этом случае скалярное произведение определяется через норму посредством так называемой процедуры *поляризации*:

$$(u, v) = (1/4) \sum_{(\alpha=1,\, i,\, -1,\, -i)} \alpha \|\alpha u + v\|^2. \qquad (1.3.6)$$

Это равенство легко доказать, если известно, что скалярное произведение существует; труднее, однако, доказать, что равенство (1.3.6) определяет скалярное произведение со всеми его свойствами. (Равенство (1.3.6) обобщается в § 1.11.) Имеется много банаховых пространств, для которых правило параллелограмма неверно. Рассмотрим, например, пространство $L^1(\mathbb{R})$, состоящее из всех функций (точнее, распределений) $f(x)$ таких, что $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \|f\| < \infty$; если $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции с непересекающимися носителями (т. е. для любого x либо $f(x) = 0$, либо $g(x) = 0$), то ясно, что

$$\|f \pm g\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, dx = \|f\| + \|g\|,$$

так что

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\| + \|g\|)^2$$

и, следовательно, (1.3.5) не выполняется. И вообще так называемая L^p-норма функции или распределения f на $\mathbb{R}$ определяется для $p \geqslant 1$ как $\left\{\int |f(x)|^p\, dx\right\}^{1/p}$, но лишь для $p = 2$ можно определить скалярное произведение так, что $\|f\| = (f, f)^{1/2}$.

Упражнение

2. Проверьте тождество (1.3.6), предполагая, что скалярное произведение существует.

1.4. ПРИМЕРЫ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пространства $L^2(a, b)$, $L^2(\mathbb{R}^n)$ и т. д. квадратично интегрируемых функций (вернее, распределений), которые рассматриваются в гл. 5, являются гильбертовыми пространствами. Для этих пространств скалярное произведение задается формулами типа

$$(f, g) = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

или

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\mathrm{x})}\, g(\mathrm{x})\, d^n\mathrm{x}.$$

В качестве другого примера рассмотрим пространство l^2, состоящее из всех таких последовательностей $\xi = \{x_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, комплексных чисел, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty. \tag{1.4.1}$$

Числа x_n можно интерпретировать как координаты точки ξ; если $\xi = \{x_n\}$ и $\eta = \{y_n\}$, то $\alpha\xi + \beta\eta$ определяется как последовательность

$$\alpha\xi + \beta\eta = \{\alpha x_n + \beta y_n\}, \tag{1.4.2}$$

а скалярное произведение — формулой

$$(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n. \tag{1.4.3}$$

Упражнение

1. Покажите, что если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ принадлежат l^2, то и $\{\alpha x_n + \beta y_n\}$ принадлежит l^2; покажите также, что ряд в (1.4.3) сходится, причем сходится абсолютно. *Указание.* Используйте неравенство Коши

$$\left| \sum_{n=1}^{N} u_n v_n \right| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |u_n|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} |v_n|^2}, \tag{1.4.4}$$

которое является просто дискретным вариантом неравенства Шварца и может быть доказано точно так же, как (1.3.2).

Утверждение. Пространство l^2 полно. Чтобы доказать это, возьмем последовательность Коши $\{\xi^j\}$ элементов l^2, т. е. такую последовательность, что $\|\xi^j - \xi^k\| \to 0$ при $j, k \to \infty$, где для каждого j $\xi^j = \{x_n^j\}$, $n = 1, 2, \dots,$ — последовательность комплексных чисел. В этом случае для любого $\varepsilon > 0$ существует такое целое K, что

$$\|\xi^j - \xi^k\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^j - x_n^k|^2 < \varepsilon \quad \text{для } j, k \geqslant K;$$

следовательно, $|x_n^j - x_n^k|^2 < \varepsilon$ для любого n. Но тогда для фиксированного n $\{x_n^j\}$, $j = 1, 2, \dots$, является числовой последовательностью Коши, а, значит, для любого n существует предел $y_n = \lim\limits_{j \to \infty} x_n^j$.

Упражнение

2. Завершите это доказательство, показав, что $\eta=\{y_n\}$ принадлежит l^2 и $\|\eta-\xi^j\|\longrightarrow 0$ при $j\longrightarrow\infty$, т. е. что $\xi^j\longrightarrow\eta$ в пространстве l^2. *Указание.* Сначала покажите, что сходится (и, следовательно, является ограниченной числовой последовательностью) $\{\|\xi^j\|\}$.

Замечание. Интуитивно может показаться, что эти гильбертовы пространства в каком-то смысле являются пространствами разных размеров а именно что l^2 имеет какую-то меньшую бесконечную размерность, чем $L^2(a, b)$, а $L^2(a, b)$ — пространство меньшей размерности, чем $L^2(\mathbb{R}^n)$. Мы увидим, что это не так: эти пространства — просто разные представления одного и того же абстрактного гильбертова пространства и изометрически изоморфны друг другу. Последнее означает, что между всеми элементами этих трех пространств существуют взаимно однозначные соответствия, сохраняющие все свойства (скалярное произведение, норму и т. д.).

1.5. КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ. РАЗМЕРНОСТЬ

Кардинальное число (конечное или трансфинитное) множества (конечного или бесконечного) указывает, сколько элементов содержит это множество. Если имеется взаимно однозначное соответствие $A\leftrightarrow B$ между элементами множеств A и B, то говорят, что эти множества *имеют одно и то же кардинальное число*, и пишут так: $\bar{\bar{A}}=\bar{\bar{B}}$. Если A — конечное множество из n элементов, то $\bar{\bar{A}}=n$. Трансфинитные кардинальные числа определяются присвоением имен (символов) кардинальным числам конкретных бесконечных множеств, а тем самым и других множеств с тем же самым кардинальным числом. Например, если имеется взаимно однозначное соответствие $A\leftrightarrow\{1, 2, \ldots\}$ между элементами A и множества всех положительных целых чисел, множество A называют *счетно* бесконечным и пишут $\bar{\bar{A}}\overset{\text{def}}{=}\aleph_0$ («алеф нуль»). Элементы такого множества можно выстроить в последовательность.

Примеры

Множество $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ всех целых чисел, множество положительных четных целых чисел $\{2, 4, 6, \ldots\}$, множество $\{2, 3, 5, \ldots\}$ всех простых целых чисел являются счетно бесконечными.

Утверждение. Счетное объединение счетных множеств счетно. [*Замечание*: слово «счетное» означает конечное или счетно бесконечное, однако утверждение нетривиально только для случая бесконечного числа бесконечных множеств.] Чтобы доказать это утверждение, запишем последовательно элементы каждого множества по горизонталям, а полученные последовательности — по вертикали сверху вниз. Тогда взаимно однозначное соответствие с элементами множества $\{1, 2, 3, \ldots\}$ устанавливается путем перечисления элементов следующим образом:

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 4 & 7 \ldots \\ 3 & 5 & 8 & \ldots \\ 6 & 9 & & \ldots \\ 10 & \text{и т. д.} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{1.5.1}$$

Именно так доказывается счетность множества рациональных чисел:

$$\begin{array}{lllll} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \ldots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \ldots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

Упражнение

1. Докажите, что подмножество счетного множества счетно. Этот принцип неявно используется в предыдущем примере, потому что данное там перечисление рациональных чисел содержит много повторений, таких, как $\frac{2}{4}$ для $\frac{1}{2}$, или $\frac{2}{2}$ и $\frac{3}{3}$ для 1, а их нужно исключить перед тем, как устанавливать взаимно однозначное соответствие между рациональными и положительными целыми числами.

В теории функциональных пространств играет важную роль счетное множество всех полиномов от n переменных с рациональными коэффициентами: для каждого N множество всех полиномов $p(x_1, \ldots, x_n)$ степени $\leqslant N$ и с коэффициентами вида r/s, где $|r| \leqslant N$, а $1 \leqslant s \leqslant N$, является конечным, поэтому объединение всех таких множеств счетно.

Хорошо известно, что множество всех вещественных чисел отрезка $[0, 1]$ несчетно. Кардинальное число этого множества называется *мощностью континуума* и обозначается через c. (Кардинальное число множества иногда называется его *мощностью*.) Отображение $x \to {}^1/_2(1 + \operatorname{th} x)$ показывает, что мощность $\overline{\overline{\mathbb{R}}}$ всей вещественной оси также равна c. При помощи кривой Пеано, которая отображает $[0, 1]$ на весь единичный квадрат $(0 \leqslant x \leqslant 1,$

$0 \leqslant y \leqslant 1$), и аналогичных кривых в пространстве можно показать, что все множества $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ и т. д. имеют ту же самую мощность c.

Следующая процедура дает бесконечную последовательность кардинальных чисел. Пусть A и B — некоторые множества, а C — множество всех отображений B в A; если $\overline{\overline{A}}$ и $\overline{\overline{B}}$ — кардинальные числа A и B, то обозначим мощность множества C через $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}}$, т. е. $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}}$. [Читателю следует проверить, что это обозначение корректно для конечных множеств A и B и что $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}}$ определяется однозначно в том смысле, что если имеются взаимно однозначные соответствия $A \leftrightarrow A_1$ и $B \leftrightarrow B_1$, то имеется и взаимно однозначное соответствие между двумя множествами отображений B в A и B_1 в A_1.] Например, если мы представим каждое вещественное число из $[0, 1)$ в виде его десятичного представления $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$, то соответствие $j \to a_j$, взятое для данного числа x, представляет собой отображение множества B всех положительных целых чисел $j = 1, 2, \ldots$ в множество $A = (0, 1, \ldots, 9)$ десяти цифр; следовательно, каждое такое число x соответствует элементу множества всех таких отображений. Это соответствие взаимно однозначно, за исключением случая представлений типа $0.1999\ldots$ и $0.2000\ldots$, порождающих одно и то же x; пренебрегая этим несущественным усложнением вопроса, мы приходим в выводу, что c, мощность континуума, равна $10^{\aleph_0}$. Если взять двоичное или n-ичное представление числа x, то получим, что $c = 2^{\aleph_0} = n^{\aleph_0}$; если же взять разложение числа на непрерывные дроби, то увидим, что $c = \aleph_0^{\aleph_0}$.

При сравнении кардинальных чисел говорят, что $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, если есть взаимно однозначное отображение A в B, но отобразить B в A взаимно однозначно нельзя. Например, несчетность континуума выражают так: $c > \aleph_0$. Можно показать (используя лемму Цорна в соответствующей форме[1])), что для произвольных множеств A и B либо A отображается взаимно однозначно в B, либо B в A, либо каждое из них в другое. Если имеются взаимно однозначные отображения каждого из двух множеств в другое, то, согласно так называемой *теореме Бернштейна* (или *Шрёдера — Бернштейна*), существует взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств. Отсюда следует, что в любом случае либо $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, либо $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, либо $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$. Можно показать, что если A имеет по меньшей мере два элемента ($\overline{\overline{A}} \geqslant 2$) и B не

[1]) То есть в форме теоремы *Цермело*: любое множество может быть вполне упорядочено. Доказательство сравнимости вполне упорядоченных множеств см. в книге Колмогорова и Фомина [1972]. — *Прим. перев.*

пусто ($\overline{\overline{B}} \geqslant 1$), то $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} > \overline{\overline{B}}$. Следовательно, трансфинитных кардинальных чисел бесконечно много.

Любая вещественнозначная функция вещественного аргумента является отображением $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, следовательно, множество всех таких функций (на которые не накладывается никаких ограничений типа непрерывности, измеримости и т. п.) имеет мощность c^c, т. е. больше c; иначе говоря, таких функций больше, чем точек на прямой. С другой стороны, множество всех непрерывных функций вещественного аргумента имеет мощность всего лишь $c^{\aleph_0}$, которая равна c. Чтобы убедиться в этом, выстроим вначале все рациональные числа в последовательность x_1, x_2, x_3, ..., затем поставим в соответствие каждой непрерывной функции $f(x)$ последовательность $f(x_1)$, $f(x_2)$, ... вещественных чисел. Каждой такой последовательности соответствует только одна непрерывная функция, поэтому мощность множества непрерывных функций не больше мощности всех таких последовательностей, равной, очевидно, $c^{\aleph_0}$. Чтобы показать, что $c^{\aleph_0} = c$, возьмем последовательность $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ вещественных чисел и запишем их десятичные разложения:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.a_1a_2a_3\ldots, \\ \beta &= 0.b_1b_2b_3\ldots, \\ \gamma &= 0.c_1c_2c_3\ldots \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

и т. д.

[Предполагается, что $0 \leqslant f(x) < 1$ для всех x; в общем случае используется отображение $f(x) \leftrightarrow g(x) = {}^1/_2\{1 + \operatorname{th} f(x)\}$.] Такую последовательность можно тогда поставить в соответствие всего лишь одному числу ω, имеющему вид

$$\omega = 0.a_1a_2b_1a_3b_2c_1a_4b_3c_2d_1 \ \ldots \tag{1.5.3}$$

и получающемуся по шаблону (1.5.1); это соответствие последовательностей $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ вещественным числам ω взаимно однозначно, за исключением чисел вида 0.1999... и 0.2000... и т. д., равных друг другу; данная трудность легко преодолевается предположением, что (1.5.3) является, например, двенадцатеричным представлением (при неизменности интерпретации (1.5.2)): тогда 0.1999... и 0.2000... становятся разными числами и множество всех последовательностей $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ отображается в $[0, 1)$ взаимно однозначно. Поэтому непрерывных функций не больше, чем вещественных чисел. Но их по крайней мере столько же (а значит, в точности столько), потому что кардинальное число множества функций-констант уже равно c.

Гильбертово пространство называется *сепарабельным* (термин неудачен), если оно содержит счетное плотное[1]) подмножество. [Тогда, как будет показано в § 1.6, оно содержит полную ортонормированную последовательность, при помощи которой любой элемент H может быть представлен в виде обобщенного ряда Фурье.] Пространство l^2 сепарабельно, потому что оно содержит в качестве плотного подмножества множество всех элементов $\xi=\{x_1, x_2, \ldots\}$, таких, что (а) x_i рациональны, и (б) лишь конечное число x_i отлично от нуля. Пространство $L^2(a, b)$ сепарабельно по той причине, что любую непрерывную функцию можно сколь угодно точно аппроксимировать на $[a, b]$ полиномом с рациональными коэффициентами, а любой элемент L^2 можно сколь угодно точно аппроксимировать непрерывной функцией (см. гл. 5). Таким образом, множество всех полиномов с рациональными коэффициентами, очевидно счетное, плотно в $L^2(a, b)$. Аналогичным образом доказывается сепарабельность $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$, только в этом случае полиномы нужно изменять при больших значениях аргументов для того, чтобы сделать аппроксимирующие функции квадратично интегрируемыми. Несепарабельные гильбертовы пространства появляются в теории почти периодических функций, но, насколько мне известно, не встречаются в обычных физических приложениях. В следующем параграфе будет показано, что все бесконечномерные сепарабельные вещественные гильбертовы пространства (равно как и все комплексные) совпадают в смысле изоморфизма.

Пример

Пусть H состоит из всех таких функций $f(x)$, определенных на $\mathbb{R}$, которые равны нулю всюду, за исключением счетного числа точек x, причем $\sum |f(x)|^2 < \infty$; если f и g—две любые такие функции, положим

$$(f, g)=\sum \overline{f(x)}\, g(x),$$

где суммирование осуществляется по всем тем значениям x, для которых слагаемые отличны от нуля. Это гильбертово пространство H несепарабельно. Если $\mathbb{R}$ заменить на множество большей мощности $\aleph > c$, то размерность такого гильбертова пространства оказывается еще больше и т. д. Размерность гильбертова пространства определяется в конце следующего параграфа.

Упражнения

1. Докажите, что пространство H, определенное в предыдущем примере, является гильбертовым и несепарабельным.

2. Пусть для каждого $n=0, 1, 2, \ldots$ $\varphi_n(\cdot, \ldots, \cdot)$ означает элемент (распределение) из $L^2(\mathbb{R}^n)$, для $n=0$ φ_0 можно интерпретировать просто как

---

[1]) Множество A называется *плотным* (*в* H), если любой элемент H является пределом последовательности элементов из A.—*Прим. перев.*

одно комплексное число; пусть Φ обозначает бесконечный вектор-столбец:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1(\cdot) \\ \varphi_2(\cdot, \cdot) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n(\cdot, \ldots, \cdot) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех таких векторов-столбцов, для которых

$$|\varphi_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|^2 < \infty$$

[в n-м члене суммы $\|\cdot\|$ обозначает норму в $L^2(\mathbb{R}^n)$]; определим в $\mathcal{F}$ скалярное произведение

$$(\Phi, \Psi) = \overline{\varphi_0}\psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, \psi_n).$$

Покажите, что $\mathcal{F}$ — сепарабельное гильбертово пространство. (В квантовой механике подобные пространства называются *пространствами Фока*.)

1.6. ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Два элемента f и g гильбертова пространства H называются *ортогональными* (что записывается как $f \perp g$), если $(f, g) = 0$). Последовательность $\{\varphi_i\}$ называется *ортонормированной*, если $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$. Такими последовательностями в пространствах L^2 являются, например, системы ортогональных функций. Если $\{\varphi_i\}$ — ортонормированная последовательность, а $c_1, c_2, \ldots$ — такие числа, что $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$, то частные суммы ряда $\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i$ образуют последовательность Коши и ряд сходится к некоторому элементу из H. Для $f \in H$ числа (φ_i, f) называются (*обобщенными*) *коэффициентами Фурье* f относительно ортонормированной последовательности $\{\varphi_i\}$. Поскольку

$$0 \leqslant \left(f - \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i, f)\varphi_i,\ f - \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i, f)\varphi_i\right) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} |(\varphi_i, f)|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \overline{(\varphi_i, f)}(\varphi_j, f)(\varphi_i, \varphi_j) =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(\varphi_i, f)|^2,$$

мы имеем $\sum_{i=1}^{n} |(\varphi_i, f)|^2 \leqslant \|f\|^2$ для всех n, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi_i, f)|^2 \leqslant \|f\|^2 \quad (\textit{неравенство Бесселя}). \tag{1.6.1}$$

Отсюда также следует, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, f)\varphi_i$ всегда сходится (хотя и не обязательно к f).

Ортонормированная последовательность $\{\varphi_i\}$ называется *полной*, если в H нет ненулевых элементов, ортогональных всем φ_i.

Теорема 1. *Если $\{\varphi_i\}$ — ортонормированная последовательность, то следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\{\varphi_i\}$ *полна,*

(2) $f = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, f)\varphi_i$ *для любого* $f \in H$,

(3) $(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i)(\varphi_i, g)$ *для любых* f *и* g *из* H,

(4) $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(\varphi_i, f)|^2$ *для любого* $f \in H$. [Два последних соотношения называются *равенствами Парсеваля*.]

Доказательство. Мы докажем последовательно следующие импликации: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2). Для любого $f \in H$ элемент $f - \sum (\varphi_i, f)\varphi_i$ ортогонален любому φ_j, а значит, равен нулю по условию (1).

(2) $\Rightarrow$ (3). Подставляя $\sum (\varphi_i, f)\varphi_i$ вместо f в (f, g) и используя непрерывность скалярного произведения (неравенство Шварца) для доказательства сходимости ряда, убеждаемся в справедливости (3).

(3) $\Rightarrow$ (4). Возьмем $g = f$ в (3).

(4) $\Rightarrow$ (1). Если какой-либо f ортогонален всем φ_j, то $\|f\| = 0$ по (4), а значит, $f = 0$.

Теорема 2. *Гильбертово пространство H сепарабельно в том и только в том случае, когда оно содержит полную ортонормированную последовательность.*

Доказательство. Если H сепарабельно, то оно содержит счетное множество $\{\psi_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, плотное в H. Из этого множества можно построить полную ортонормированную последовательность при помощи *процедуры Грама—Шмидта*:

1. Пусть ψ — первый ненулевой элемент $\{\psi_i\}$; положим

$$\varphi_1 = \frac{1}{\|\psi\|}\psi \quad \left(\text{будем писать } \frac{\psi}{\|\psi\|}\right).$$

2. Пусть ψ' — первый элемент $\{\psi_i\}$, который не является произведением φ_1 на число; положим

$$\varphi_2 = \frac{\psi' - (\varphi_1, \psi')\varphi_1}{\|\psi' - (\varphi_1, \psi')\varphi_1\|}.$$

•
•
•

$n+1$. Пусть $\psi^{(n)}$ — первый элемент $\{\psi_i\}$, который не является линейной комбинацией $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; положим

$$\varphi_{n+1} = \frac{\psi^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i, \psi^{(n)})\varphi_i}{\left\|\psi^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i, \psi^{(n)})\varphi_i\right\|}.$$

Очевидно, что $\{\varphi_i\}$ — ортонормированное множество (оно может быть конечным, поскольку возможно, что на некотором шаге процедуры все ψ_i окажутся линейными комбинациями $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$; в этом случае H конечномерно). Для доказательства полноты $\{\varphi_i\}$ предположим, что ζ — такой элемент H, что $\zeta \perp \varphi_i$ для всех i; покажем, что тогда $\zeta = 0$. Для данного $\varepsilon > 0$ можно найти такой элемент ψ из $\{\psi_i\}$, что $\|\psi - \zeta\| < \varepsilon$. Из построений Грама — Шмидта ясно, что ψ — конечная сумма $\sum c_i\varphi_i$. Поскольку $\zeta \perp \varphi_i$ для всех i, ζ ортогонален и ψ; поэтому[1])

$$(\psi - \zeta, \psi - \zeta) = \|\psi\|^2 + \|\zeta\|^2 < \varepsilon^2,$$
$$\therefore \|\zeta\|^2 < \varepsilon^2 \text{ для любого } \varepsilon > 0,$$
$$\therefore \|\zeta\| = 0,$$
$$\therefore \zeta = 0.$$

Обратно, если H содержит полную ортонормированную последовательность $\{\varphi_i\}$, то множество всех линейных конечных комбинаций φ_i с рациональными коэффициентами является счетным плотным множеством; следовательно, H сепарабельно.

Следствие. *Сепарабельное гильбертово пространство изоморфно либо конечномерному евклидову пространству V^n, либо гильбертову пространству l^2 (все пространства рассматриваются над одним полем скаляров — $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).*

Под изоморфизмом здесь понимается не только взаимно однозначное соответствие с сохранением операций сложения и умножения на скаляр, но и изометрия (сохранение нормы), так что свойства изоморфных пространств полностью совпадают. [Сохранение нормы подразумевает непрерывность и самого отображения, и его обратного в топологиях H и l^2, так что это отображение (помимо всего прочего) является гомеоморфизмом, если пользоваться терминологией топологии.]

---

[1]) Используемый ниже символ $\therefore$ означает «следовательно». — *Прим. перев.*

Доказательство (для бесконечномерного случая). Пусть $\{\varphi_i\}$ — полная ортонормированная последовательность в H. Для любого $f \in H$ последовательность чисел $\{(\varphi_i, f)\}$ (коэффициентов Фурье) является, согласно неравенству Бесселя, элементом l^2. Обратно, если $\{x_i\} \in l^2$, то $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\varphi_i \in H$. По теореме 1 отображение $H \longrightarrow l^2$, задаваемое соответствием $f \longrightarrow \{(\varphi_i, f)\}$, и обратное отображение $l^2 \longrightarrow H$, определяемое соответствием $\{x_i\} \longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\varphi_i$, являются изометрическими изоморфными отображениями.

Если $\{x_i\}$ — любая последовательность вещественных или комплексных чисел, таких, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ сходится, т. е. если $\{x_i\} \in l^2$, то ряд $\sum x_i\varphi_i$ сходится к некоторому элементу из H. Это утверждение — один из вариантов *теоремы Рисса—Фишера.*

Теорему 2 и ее следствие можно следующим образом обобщить на несепарабельные гильбертовы пространства (см. Халмош [1951]). Назовем множество векторов $S = \{\varphi_a: a \in A\}$ гильбертова пространства H ортонормированным, если

$$(\varphi_a, \varphi_b) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a = b, \\ 0 & \text{при} \quad a \neq b \end{cases}$$

(A — так называемое *множество индексов*, не обязательно счетное, элементы которого помечают векторы S для того, чтобы отличать их один от другого). Если утверждение

$$(\varphi_a, \psi) = 0 \quad \text{для всех} \quad a \in A$$

означает, что $\psi = 0$, то S — *полное ортонормированное множество*, или *базис* в H. Можно показать, что если $\{\varphi_a: a \in A\}$ и $\{\psi_b: b \in B\}$ — два любых базиса в H, то множества индексов A и B равномощны: $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$; их кардинальное число называется *размерностью* H. Если H сепарабельно, то его размерность либо конечна, либо равна $\aleph_0$. Размерность гильбертова пространства, определенного в примере предыдущего параграфа, равна c, мощности континуума. Обобщение следствия теоремы 2 состоит в том, что два гильбертовых пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

1.7. ПОДПРОСТРАНСТВА. ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИИ

Замкнутое линейное многообразие или подпространство M *в* H — это замкнутое линейное множество элементов H; M само является гильбертовым пространством. [Пусть S — произвольное подмножество H (или вообще любого метрического пространства).

Если $\{u_i\}_1^\infty$ — любая сходящаяся последовательность точек S, то ее предел $\lim u_i$ (не обязательно принадлежащий S) называется *предельной точкой* S; если S содержит все свои предельные точки, то оно *замкнуто*.]

Упражнения

Выясните, какие из следующих линейных многообразий в l^2 замкнуты.

1. Множество всех таких точек $\xi=\{x_n\}_1^\infty$, что $x_n=0$ для $n>10$.
2. Множество всех таких ξ, что $x_n=0$ при $n>n_0$, где n_0 может зависеть от ξ.
3. Множество всех ξ, у которых $x_n=0$ при четных n.
4. Множество всех таких ξ, что $\sum_{n=1}^\infty n\,|x_n|^2<\infty$.
5. Множество всех таких ξ, что $\sum_{n=1}^\infty (1/n)\,x_n=0$.
6. Множество всех ξ, для которых $\sum_{n=1}^\infty x_n=0$.

Пусть M — подпространство H; его *ортогональное дополнение* $M^\perp$ определяется как

$$M^\perp=\{\varphi\in H\colon\ (\psi,\ \varphi)=0\ \ \forall\psi\in M\};\tag{1.7.1}$$

$M^\perp$ — замкнутое линейное множество и, значит, тоже подпространство H. Линейность $M^\perp$ следует из линейности скалярного произведения $(\cdot,\ \cdot)$ по второму сомножителю: если $(\psi,\ \varphi_1)=0$ и $(\psi,\ \varphi_2)=0$ для всех $\psi\in M$, то $(\psi,\ \alpha\varphi_1+\beta\varphi_2)=0$ для всех $\psi\in M$. Замкнутость $M^\perp$ вытекает из непрерывности $(\cdot,\ \cdot)$: если $\varphi_i\in M^\perp$ и $\varphi_i\to\tilde\varphi\in H$, то $(\psi,\ \tilde\varphi)=\lim\limits_{i\to\infty}(\psi,\ \varphi_i)=0$ для всех $\psi\in M$; следовательно, $\tilde\varphi\in M^\perp$.

Теорема о проекции. *Если M — подпространство пространства H, то любой элемент ζ пространства H можно единственным образом представить как $\zeta=\varphi+\psi$, где $\varphi\in M$, а $\psi\in M^\perp$.*

Замечания. (1) Отсюда следует, что $(M^\perp)^\perp=M$. (2) Если M в определении (1.7.1) заменить на произвольное подмножество S, то $S^\perp$ по-прежнему останется замкнутым линейным многообразием, а $(S^\perp)^\perp$ будет наименьшим замкнутым линейным многообразием, содержащим S; оно называется *замкнутой линейной оболочкой* множества S. В следующем параграфе приводится одно важное применение теоремы о проекции.

Доказательство. Как и в конечномерном случае, φ является тем элементом из M, для которого расстояние $\|\zeta-\varphi\|$ минимально. Докажем сначала, что минимум действительно существует. Обозначим

$$d=\inf\{\|\zeta-\varphi\|\colon\ \varphi\in M\}.$$

Пусть $\{\varphi_i\}$ — последовательность элементов M, такая, что $\|\zeta-\varphi_i\|\to d$. Возьмем $\varepsilon>0$ и столь большие i и j, что

$$\|\zeta-\varphi_i\|^2\leqslant d^2+\varepsilon,$$
$$\|\zeta-\varphi_j\|^2\leqslant d^2+\varepsilon.$$

По правилу параллелограмма

$$2\|\zeta-\varphi_i\|^2+2\|\zeta-\varphi_j\|^2=\left\|2\left(\zeta-\frac{\varphi_i+\varphi_j}{2}\right)\right\|^2+\|\varphi_i-\varphi_j\|^2.$$

Левая часть этого равенства $\leqslant 4d^2+4\varepsilon$, первый член правой части $\geqslant 4d^2$, потому что $^1/_2(\varphi_i+\varphi_j)\in M$; поэтому $\|\varphi_i-\varphi_j\|^2\leqslant 4\varepsilon$, так что $\{\varphi_i\}$ — последовательность Коши. Пусть $\varphi=\lim\varphi_i$ и $\psi=\zeta-\varphi$. Ясно, что $\varphi\in M$, поскольку M замкнуто; покажем теперь, что $\psi\in M^{\perp}$. Для этого воспользуемся тем, что φ минимизирует $\|\zeta-\varphi\|$; значит, для любого $\varphi'\in M$ и любого положительного числа a

$$(\psi,\ \psi)\leqslant(\psi\pm a\varphi',\ \psi\pm a\varphi'),$$

или

$$0\leqslant\pm 2a\operatorname{Re}(\psi,\ \varphi')+a^2(\varphi',\ \varphi');$$

поэтому

$$|\operatorname{Re}(\psi,\ \varphi')|\leqslant\frac{a}{2}(\varphi',\ \varphi').$$

Устремив a к нулю, получим, что $\operatorname{Re}(\psi,\ \varphi')=0$ для всех $\varphi'\in M$. Заменив φ' на $i\varphi'$, из тех же выкладок получим, что и $\operatorname{Im}(\psi,\ \varphi')=0$ для всех $\varphi'\in M$; следовательно, $\psi\in M^{\perp}$, что и требовалось доказать. Единственность разложения получается легко; если $\varphi_1+\psi_1$ и $\varphi_2+\psi_2$ — два разных представления ζ, то элемент $\varphi_1-\varphi_2=\psi_2-\psi_1$ принадлежит и M, и $M^{\perp}$, следовательно он ортогонален самому себе, т. е. равен нулю.

1.8. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ. ТЕОРЕМА РИССА—ФРЕШЕ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНОГО ОГРАНИЧЕННОГО ФУНКЦИОНАЛА

Линейный функционал на H — это функция $l(\varphi)$ со значениями в поле скаляров, определенная для всех $\varphi\in H$ и такая, что $l(\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha l(\varphi)+\beta l(\psi)$ для всех φ, $\psi\in H$ и любых скаляров α и β. Линейный функционал *ограничен*, если найдется такая константа K, что $|l(\varphi)|\leqslant K\|\varphi\|$ для всех $\varphi\in H$. При фиксированном ψ_0 $(\psi_0,\ \varphi)$ — линейный ограниченный функционал; оказывается, такой вид имеют все линейные ограниченные функционалы.

Теорема Рисса—Фреше о представлении. *Для любого линейного ограниченного функционала $l(\varphi)$ на H найдется единственный элемент $\psi_0\in H$, такой, что $l(\varphi)=(\psi_0,\ \varphi)$ для всех φ.*

Доказательство. Очевидно, что подмножество

$$M=\{\xi\in H\colon\ l(\xi)=0\}$$

линейно и благодаря ограниченности $l(\cdot)$ замкнуто; поэтому оно является подпространством. [Если $\xi_i\in M$ и $\xi_i\to\omega\in H$, то $|l(\omega)-l(\xi_i)|=|l(\omega-\xi_i)|\leqslant$

$\leqslant K\|\omega-\xi_i\|\to 0$; поэтому $l(\omega)=0$, т. е. $\omega\in M$.] Предполагая, что $M\neq H$ (если $l(\varphi)\equiv 0$, возьмем $\psi_0=0$), возьмем любой ненулевой элемент $\psi\in M^\perp$; тогда если ψ_1 — любой другой элемент $M^\perp$, то $l(\psi-a\psi_1)=0$ для $a=l(\psi)/l(\psi_1)$; следовательно, элемент $\psi-a\psi_1$ принадлежит и M, и $M^\perp$, и поэтому он равен нулю, так что $M^\perp$ — одномерное подпространство. Теперь очевидно, что если

$$\psi_0 \overset{\text{def}}{=} \frac{\overline{l(\psi_1)}}{\|\psi_1\|^2}\psi_1,$$

то $l(\eta)=(\psi_0, \eta)$ для всех η, что и требовалось доказать; это видно из разложения элемента η на его ортогональные составляющие из M и $M^\perp$, если применить $l(\cdot)$ к каждой составляющей по отдельности; очевидно, что элемент ψ_0 является единственным.

1.9. СИЛЬНАЯ И СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ

В конечномерном векторном пространстве по теореме Больцано—Вейерштрасса любая ограниченная последовательность векторов $\{u_k\}$ ($\|u_k\|\leqslant c$ для всех k) содержит сходящуюся подпоследовательность. Иначе говоря, замкнутый шар $\{u\colon \|u\|\leqslant c\}$ — компактное множество. Фактически здесь компактно любое замкнутое ограниченное множество, а про такое пространство говорят, что оно *локально компактно*. Бесконечномерное гильбертово пространство не является локально компактным: например, бесконечная ортонормированная последовательность $\{u_k\}$ ограничена ($\|u_k\|=1$ для всех k), но не содержит сходящейся подпоследовательности.

До сих пор сходимость $\{u_k\}$ к u означала, что $\|u-u_k\|\to 0$ при $k\to\infty$. Такая сходимость называется *сильной*. Обобщая это понятие, скажем, что $\{u_k\}$ сходится к u *слабо*, если $(v, u_k)\to(v, u)$ для всех $v\in H$. [Если говорится просто «сходимость», то обычно подразумевается сильная сходимость.]

Мы приведем здесь без доказательства две теоремы (их доказательство использует принцип равномерной ограниченности).

Теорема 1. *Слабо сходящаяся последовательность ограничена.*

Теорема 2. *H слабо полно в том смысле, что если $\{u_n\}$ такова, что $(u_k-u_l, v)\to 0$ при k, $l\to\infty$ для всех v, то найдется такой элемент u, что $(u_n-u, v)\to 0$ при $n\to\infty$ для всех v.*

Упражнения

1. Из сильной сходимости следует слабая.
2. В конечномерном пространстве слабая сходимость эквивалентна сильной.
3. Любая бесконечная ортонормированная последовательность слабо сходится.
4. Любая ограниченная последовательность в гильбертовом пространстве содержит слабо сходящуюся подпоследовательность (т. е. гильбертово пространство слабо локально компактно). *Указание.* Если $\{u_n\}$ — ограниченная по-

следовательность, то в ней найдется такая подпоследовательность $\{u_{1n}\}$, что (u_1, u_{1n}) сходится, а в $\{u_{1n}\}$ найдется такая подпоследовательность $\{u_{2n}\}$, что сходится (u_2, u_{2n}), и т.д. Возьмите диагональную подпоследовательность $\{u_{nn}\}$. Пусть M — линейное многообразие, порожденное $\{u_n\}$, т. е. множество всех конечных линейных комбинаций элементов $\{u_n\}$. Покажите, что $\{(u_{nn}, v)\}$ — сходящаяся числовая последовательность, причем сначала докажите, что это верно для всех $v \in M$, затем — для всех v из $\bar{M}$ (замыкания M), наконец — для всех $v \in M^{\perp}$. После этого используйте приведенную теорему 2.

5. Если $u_n \longrightarrow u$ слабо и $\|u_n\| \longrightarrow \|u\|$, то $u_n \longrightarrow u$ сильно.

1.10. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Хотя все сепарабельные гильбертовы пространства структурно совпадают, существует много различных конкретных их реализаций. В некоторых приложениях появляются пространства, элементы которых представляют собой функции, аналитические в области Ω комплексной плоскости. Пусть Ω — единичный круг; определим гильбертово пространство H так:

$$H = \left\{ f(z) \text{ аналитична при } |z| < 1\text{: } \sup_{a<1} \int_{|z|=a} |f(z)|^2\, ds < \infty \right\},$$

$$(f, g) = \lim_{a \uparrow 1} \int_{|z|=a} \overline{f(z)}\, g(z)\, ds.$$

Легко видеть, что если $c_n\ (n = 0, 1, \ldots)$ — коэффициенты разложения $f(z)$ в степенной ряд, то $\|f\| = \text{const} \cdot \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2}$, так что изоморфность этого пространства пространству l^2 очевидна.

Приложения подобных пространств к теории функций для случая, когда Ω — полуплоскость, приведены в гл. 19 книги Хилле [1962].

1.11. ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Во многих вычислениях (см. гл. 9) полезно следующее обобщение равенства (1.3.6). Пусть $f(u, v)$ — *полуторалинейная* форма (иногда менее аккуратно называемая билинейной), т. е. функция с числовыми значениями, определенная для всех u и v из H, линейная по v и полулинейная по u. [Из теоремы Рисса — Фреше следует, что любую такую форму можно представить в виде (Au, v) или (u, Bv), где A и B — линейные операторы; здесь этот факт бесполезен.] Пусть $q(u)$ — соответствующая квадратичная форма, $q(u) = f(u, u)$. Тогда $f(u, v)$ можно вычислить по значениям $q(u)$ при помощи *формулы поляризации*:

$$f(u, v) = (1/4) \sum_{(\alpha = 1,\, i,\, -1,\, -i)} \alpha q(\alpha u + v). \qquad (1.11.1)$$

Чтобы проверить эту формулу, заметим, что

$$\alpha q(\alpha u+v)=\alpha f(\alpha u+v,\ \alpha u+v)=$$
$$=\alpha|\alpha|^2 f(u,\ u)+|\alpha|^2 f(u,\ v)+\alpha^2 f(v,\ u)+\alpha f(v,\ v); \tag{1.11.2}$$

после подстановки (1.11.2) в (1.11.1) справа получается шестнадцать членов, которые попарно уничтожаются, за исключением члена $f(u,\ v)$, повторяющегося четыре раза с коэффициентом $|\alpha|^2=1$.

Для $q(u)$ часто имеется оценка типа $|q(u)|\leqslant M\|u\|^2$ для всех u. В этом случае поляризацию можно объединить со следующим приемом получения оценок $f(u,\ v)$ типа неравенства Шварца. Сначала получим при $|\alpha|=1$

$$|\alpha q(\alpha u+v)|\leqslant M\|\alpha u+v\|^2\leqslant M(\|u\|+\|v\|)^2.$$

Затем заменим в $f(u,\ v)$ u и v на βu и $\beta^{-1}v$, где $\beta=\sqrt{\|v\|/\|u\|}$; это не меняет значения $f(u,\ v)$, но заменяет $\|u\|+\|v\|$ на $2\sqrt{\|u\|\|v\|}$; следовательно,

$$|f(u,\ v)|\leqslant 4M\|u\|\|v\|. \tag{1.11.3}$$