Глава 2

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ИХ ОБЩИЕ СВОЙСТВА

Линейные функционалы; пробные функции на пространствах $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$; билинейные формы; сходимость пробных функций; непрерывные функционалы; вещественные и комплексные распределения; дифференцирование и интегрирование; замена независимых переменных; сходимость распределений; операторы сглаживания; регуляризация особенностей.

Предварительные сведения: математический анализ.

Для функционального анализа и его приложений к физике желательно обобщить классическое понятие функции так, как это было сделано Дираком и обосновано Лораном Шварцем в его теории «распределений» (в советской литературе распределения обычно называются обобщенными функциями). При написании этой и нескольких последующих глав автор придерживался той точки зрения, что теория распределений в основе своей элементарна и вытекает из классического математического анализа. Полное представление о распределениях можно получить при помощи интеграла Римана—такой подход хорошо подчеркивает тесную связь между распределениями и обычными функциями. С этой точки зрения пространства L^2 и их применение в теории дифференциальных операторов также элементарны, если основываться на теории распределений, и именно в таком смысле они будут рассматриваться в гл. 5, 6, 7, 10 и 11.

2.1. ПРОИСХОЖДЕНИЕ ПОНЯТИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Еще в период становления квантовой механики Дирак ввел «функцию» $\delta(x)$, положив ее равной нулю при $x\neq 0$ и равной $+\infty$ при $x=0$ и приняв интеграл от нее равным единице; следовательно, предполагается, что

$$\left\langle\!\!\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\varphi(x)\,dx \right\rangle\!\!\right\rangle = \varphi(0), \qquad (2.1.1)$$

а в более общем случае

$$\left\langle\!\!\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\varphi(x)\,dx \right\rangle\!\!\right\rangle = \varphi(a); \qquad (2.1.2)$$

при этом функция $\delta'(x)$ вводится таким образом, чтобы было возможно интегрирование по частям:

$$\left\langle\!\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-a)\,\varphi(x)\,dx \right\rangle\!\right\rangle = -\varphi'(a) \tag{2.1.3}$$

для любой дифференцируемой функции $\varphi(x)$. Производные более высокого порядка от $\delta(x)$ определяются аналогичным образом. Далее, если $f(x)$ — любая, например кусочно непрерывная, функция (не обязательно дифференцируемая в обычном смысле), то ее производная в обобщенном смысле определяется как такая «функция» $f'(x)$, что

$$\left\langle\!\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx \right\rangle\!\right\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \tag{2.1.4}$$

по крайней мере для любой функции $\varphi(x)$, которая непрерывно дифференцируема при всех x и тождественно обращается в нуль вне некоторого конечного интервала. Дирак назвал $\delta(x)$, $\delta'(x)$ и $f'(x)$ «несобственными» функциями, указав при этом, что хотя иногда и нельзя говорить о значениях самой функции в отдельных точках, часто удается придать точный смысл интегралу, содержащему такую несобственную функцию в качестве множителя (Дирак [1947, с. 59]). Это замечание послужило основой для теории распределений Л. Шварца [1950]. Объекты, обозначенные выше через $\delta(x)$, $\delta'(x)$, $f'(x)$, определяются не заданием их значений для каждого значения аргумента x, а заданием значений взятых в кавычки интегралов для всех функций $\varphi(x)$ из некоторого класса. Поскольку каждое из этих выражений линейно зависит от $\varphi(x)$, обобщенная функция или распределение тем самым представляет собой линейный функционал, определенный на выбранном надлежащим образом классе «пробных» функций $\varphi(x)$.

Аналогия между распределением и функцией весьма наглядна. Если $f(x)$ является обычной функцией, то каждому значению аргумента x соответствует некоторое число; если же $f(x)$ является распределением, то каждой пробной функции $\varphi(x)$ соответствует некоторое число. Для распределения нельзя взять x в точности равным x_0, но можно взять пробную функцию, которая имеет очень резкий пик в точке x_0 и равна нулю всюду вне узкого интервала, содержащего x_0. Для многих физических ситуаций это соответствует возможности знать x только с конечной точностью.

Обычную непрерывную функцию $f(x)$ можно рассматривать как частный случай распределения; тогда линейный функционал задается в виде интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{2.1.5}$$

Этот и обычный способы задания такой функции эквивалентны согласно следующей теореме, доказательство которой мы предоставляем читателю:

Теорема. *Непрерывная функция* $f(x)$ *с областью определения* $(-\infty, \infty)$ *полностью определена, если значение интеграла* (2.1.5) *известно для каждой непрерывной функции* $\varphi(x)$, *отличной от нуля только на некотором конечном интервале, своем для каждой* $\varphi(x)$.

В дальнейшем и некоторые другие обычные функции (уже не являющиеся непрерывными) будут аналогичным образом идентифицированы с соответствующими им распределениями.

Многие операции, которые могут быть применены к обычным функциям (например, дифференцирование, интегрирование и преобразование Фурье), применимы и к распределениям, причем применимы при самых общих предположениях.

Если f и g — два распределения, то хотя и нельзя сказать, что $f(x_0)=g(x_0)$ или $f(x_0)\geqslant g(x_0)$ для конкретного x_0, но можно придать смысл тому, что $f=g$ на (a, b) или $f\geqslant g$ на (a, b), где (a, b) — любой открытый интервал (см. гл. 3). Более того, такие утверждения можно сделать для любого открытого множества, но не для множества с лебеговой мерой нуль. Множества меры нуль обычно нефизичны, потому что для решения вопроса о принадлежности точки x такому множеству нужно знать x с бесконечным числом десятичных знаков. Сущность теории распределений состоит в том, что, отказываясь от знания функций на множествах лебеговой меры нуль, мы получаем возможность определить широкий класс обобщенных функций, включая различные δ-функции и их производные.

В силу упомянутой выше наглядной аналогии распределение является в некотором смысле столь же конкретным объектом, как и функция. Например, элементы пространств L^2 (см. гл. 5) представляют собой распределения. В ранних математических работах элемент такого пространства рассматривался как бесконечный класс эквивалентности функций, любые две из которых могут произвольным образом отличаться друг от друга на произвольном множестве меры нуль. Чтобы конкретно применить так определенный элемент пространства L^2 по крайней мере для некоторых целей, обычно достаточно вообразить себе какую-либо одну функцию из такого класса. На наш взгляд, любая такая функция неизбежно содержит элемент недоопределенности и произвола, тогда как распределение в этом смысле определено вполне четко. Распределения такого рода, как и обычные функции, могут рассматриваться, например, в качестве волновых функций в квантовой механике.

Во многих физических приложениях, особенно при наличии дифференциальных операторов, использование распределений позволяет избавиться от части выкладок, необходимых при обычном подходе, вероятно, потому, что пренебрежение множествами меры нуль делает распределения наиболее удобными для таких приложений.

Вполне очевидно, что проведенные выше рассуждения могут быть без каких-либо существенных изменений применены для случая нескольких независимых переменных.

2.2. КЛАССЫ ПРОБНЫХ ФУНКЦИЙ. ФУНКЦИИ КЛАССА C_0^∞

Различные классы пробных функций порождают различные классы распределений. Чтобы охватить все примеры предыдущего параграфа ($\delta(x)$ и все ее производные и все обобщенные производные произвольной непрерывной функции $f(x)$), пробные функции $\varphi(x)$ должны быть бесконечно дифференцируемыми и каждая из них должна тождественно обращаться в нуль вне некоторого конечного интервала. Все такие функции образуют *класс* C_0^∞ или $C_0^\infty(\mathbb{R})$; соответствующие функции $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ от n независимых переменных образуют класс $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$; при желании различать пробные функции с вещественными и комплексными значениями пишут ${}^{\mathrm{real}}C_0^\infty$ и ${}^{\mathrm{cpx}}C_0^\infty$ (независимые переменные $x_1, \ldots, x_n$ всегда вещественны). Обычно через C^k обозначают класс непрерывных функций с непрерывными производными порядка $\leqslant k$ (включая смешанные частные производные для случая $n > 1$). *Носителем* функции $\varphi(\mathbf{x})$ называется замыкание множества тех точек $\mathbf{x}$, для которых $\varphi(\mathbf{x}) \neq 0$; нижний индекс 0 у C_0^∞ или C_0^k показывает, что каждая функция из такого класса имеет ограниченный носитель. Часто используются векторнозначные пробные функции.

Пример

Функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\{-1/(1-x^2)\}, & -1 < x < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Упражнения

1. Покажите, что все производные функции (2.2.1) непрерывны при любом x.

2. Постройте в C_0^∞ функцию, которая равна 1 при $|x| \leqslant 1$ и равна нулю при $|x| \geqslant 2$. *Указание.* Рассмотрите свойства интеграла $\int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy$, где функция φ задана в виде (2.2.1).

3. Постройте сферически симметричную пробную функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ из класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, положительную при $\mathbf{x}=0$.

Любой линейный функционал, который определен для всех φ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяет так называемому условию непрерывности, сформулированному ниже в § 2.4, является распределением *на* (или *в*) $\mathbb{R}^n$.

В гл. 4 рассматривается более широкий класс $\mathcal{S}$ или $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ пробных функций (так называемый класс Шварца). Функция $\varphi(\mathbf{x})$ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ не обязательно является тождественным нулем вне ограниченной области или «носителя», но должна очень быстро стремиться к нулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$; соответствующие функционалы называются распределениями медленного роста. Ясно, что любая пробная функция из C_0^∞ автоматически принадлежит $\mathcal{S}$ (т. е. $C_0^\infty \subset \mathcal{S}$), так что любое распределение медленного роста является распределением.

Гельфанд и др. ([1959] и следующие выпуски) рассмотрели подкласс Z класса $\mathcal{S}$, состоящий из некоторых целых аналитических функций. Подкласс Z не содержит C_0^∞ и не содержится в последнем, поскольку аналитическая функция не может иметь компактный носитель, если она отлична от тождественного нуля. Определенные на Z функционалы являются обобщенными функциями, включающими в себя распределения медленного роста, но мы не будем в дальнейшем рассматривать эти функционалы (исключением является краткое замечание в § 4.5).

2.3. ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ. БИЛИНЕЙНАЯ ФОРМА

Напомним, что *линейный функционал* F на функциональном пространстве, например на $C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, представляет собой соответствие, по которому для каждой функции $\varphi(\mathbf{x})$ из C_0^∞ указывается число, обозначаемое через $F[\varphi]$, причем

$$F[a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2] = a_1F[\varphi_1] + a_2F[\varphi_2] \qquad (2.3.1)$$

для любых φ_1 и φ_2 из C_0^∞ и любых констант a_1 и a_2. Распределение на $\mathbb{R}^n$ является таким линейным функционалом. В то же время выражения вида $\left\langle\!\left\langle \int f(x)\varphi(x)\,dx \right\rangle\!\right\rangle$ в равенствах (2.1.1)—(2.1.4) очевидным образом линейны относительно тех обобщенных функций f, которые определяются при их помощи, и поэтому мы можем использовать принятые для билинейных форм обозначения. Линейный функционал, который определяет конкретное распределение f, обозначим через $\langle f, \cdot\rangle$, а через $\langle f, \varphi\rangle$ будем обозначать значение функционала, примененного к конкретной пробной функции φ. Здесь f можно считать произвольным символом, используемым для обозначения распределения (функционала). Будем считать в дальнейшем, что если f и g—два таких символа, а a и b—числа, то выражение $af+bg$ обозначает распределение, определенное как

$$\langle af+bg, \varphi\rangle = a\langle f, \varphi\rangle + b\langle g, \varphi\rangle. \qquad (2.3.2)$$

Например, если δ и δ' суть «функция» Дирака и ее «первая производная», то

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0), \qquad (2.3.3)$$

$$\langle \delta', \varphi\rangle = -\varphi'(0) \qquad (2.3.4)$$

для всех φ, а $a\delta+b\delta'$ является распределением (функционалом), для которого

$$\langle a\delta+b\delta', \varphi\rangle = a\varphi(0) - b\varphi'(0).$$

В комплексном случае, когда $C_0^\infty = {}^{\text{cpx}}C_0^\infty$, комплексно сопряженное к f распределение $\bar{f}$ представляет собой линейный функционал, для которого

$$\langle \bar{f}, \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \overline{\langle f, \bar{\varphi}\rangle} \quad \text{при любой } \varphi \in C_0^\infty. \qquad (2.3.5)$$

Интерпретация этого определения такова: если $\varphi(x)$—пробная функция, то $\overline{\varphi(x)}$—также пробная функция, так что $\langle f, \bar{\varphi}\rangle$ является при заданном f точно известным комплексным числом, а $\overline{\langle f, \bar{\varphi}\rangle}$—его комплексно сопряженное, которое, очевидно, зависит линейно от φ; тем самым значение $\langle \bar{f}, \varphi\rangle$ определено для каждой φ. Распределение f *вещественно*, если $f=\bar{f}$ (т. е. если f и $\bar{f}$—это одно и то же распределение), или, что то же самое, если значения $\langle f, \varphi\rangle$ вещественны для всех вещественных φ.

Часто бывает удобно указывать независимое переменное x явным образом—тогда запись распределений будет такой же, как и запись обычных функций, например $f(x)$, $g(x)$, $\delta(x)$. Если известен смысл некоторого распределения, например $\delta(x)$, то нетрудно придать смысл такому распределению при замене x другим аргументом (это будет сделано ниже в § 2.8), так что, например, для $\delta(x-a)$ или $\delta(x^3+x+1)$ не нужно вводить специальных обозначений.

В некоторых математических рассуждениях представляется возможным обозначать функцию через $f(\cdot)$, а ее значение при выбранном значении x ее аргумента—через $f(x)$. Но на практике последовательное применение такого подхода быстро становится неприемлемым: обозначение функции x^x как $\cdot^{\cdot}$ или функции $\sin(x^2+y^3)$ от двух переменных как $\sin(\cdot^2+\cdot^3)$ приводит к путанице; следовательно, обозначения $f(x)$, x^x, $\sin(x^2+y^3)$ должны служить для обеих целей. Но если говорится о *какой-то* (или о *конкретной*) *функции* $f(x)$, то ясно, что допустимы всевозможные функциональные соотношения. Так, $J_\nu(z)$ в зависимости от контекста может обозначать число, функцию от z или функцию от двух переменных ν и z. Поэтому мы считаем, что такие обозначения, как $f(x)$ и $\delta(x)$, являются вполне допустимыми для обобщенных функций или распределений, а наличие символа x не должно порождать мысль о значении обобщенной функции (и даже о его существовании) для конкретного значения x.

Для заданного распределения $f(x)$ его значение $\langle f, \varphi\rangle$ на конкретной пробной функции φ можно символически записать как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{2.3.6}$$

опуская применявшиеся в § 2.1 кавычки, если из контекста вполне ясен смысл каждой величины. Это позволяет использовать такие равенства, как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(3x-6)\,\varphi(x)\,dx = {}^1\!/_3\varphi(2),$$

которое получается путем замены независимого переменного на новое, $y=3x-6$, согласно § 2.8. Но в основном в этой и в следующих двух главах используются билинейные обозначения, чтобы подчеркнуть, что распределение—это прежде всего линейный функционал: его применение к пробной функции дает число.

2.4. ФОРМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛОВ

Как уже отмечалось выше, определенный на классе пробных функций линейный функционал будет *распределением* только в том случае, когда он удовлетворяет определенному условию непрерывности, которое мы теперь и собираемся рассмотреть. В большей части элементарной теории условие непрерывности не играет никакой роли, однако в некоторых случаях оно является существенным. В конце этого параграфа и в нескольких следующих мы постараемся объяснить, когда это условие действительно необходимо, а когда его следует иметь в виду лишь для возможного использования в дальнейшем.

Начнем с того, что если определена сходимость $\varphi_j \to \psi$ пробных функций, то функционал $\langle f, \cdot\rangle$ будет непрерывным относительно этой сходимости, если

$$\langle f, \varphi_j\rangle \to \langle f, \psi\rangle \quad \text{при} \quad \varphi_j \to \psi. \tag{2.4.1}$$

Усиление сходимости пробных функций расширяет класс непрерывных функционалов. Следующее определение сходимости, обозначаемой через $\xrightarrow{\mathscr{D}}$, является наиболее сильным.

Определение. Если функции ψ и φ_j принадлежат $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} \psi$, если (1) в $\mathbb{R}^n$ найдется ограниченное множество, содержащее носители всех φ_j; (2) при $j \to \infty$ функции $\varphi_j(\mathbf{x})$ сходятся к $\psi(\mathbf{x})$ равномерно относительно $\mathbf{x}$ из $\mathbb{R}^n$; (3) аналогично этому каждая частная производная от $\varphi_j(\mathbf{x})$ (любого порядка, смешанная или нет) сходится равномерно на $\mathbb{R}^n$ к соответствующей производной от $\psi(\mathbf{x})$.

Теперь (2.4.1)—это условие, выделяющее распределения из множества всех линейных функционалов $\langle f, \cdot\rangle$. Опыт показывает, что это условие всегда выполняется в тех случаях, которые возникают на практике, однако пример разрывного линейного функционала на $C_0^\infty(\mathbb{R})$, приведенный в приложении к этой главе, показывает, что это условие не лишнее. Заметим, что для построения такого примера приходится использовать аксиому выбора.

Исходя из сформулированного выше определения сходимости, Лоран Шварц рассматривал $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ как топологическое пространство и обозначал его через $\mathscr{D}$. Пространство $\mathscr{D}'$, сопряженное к $\mathscr{D}$, т. е. множество всех распределений на $\mathbb{R}^n$, также можно различными способами превращать в топологическое пространство. Для ознакомления с топологическим аспектом теории мы рекомендуем читателю книги Шварца или Гельфанда и др.

Более слабая сходимость в C_0^∞ порождает более ограниченные или более «слабые» классы распределений. Чуть более слабое определение сходимости, обсуждаемое в гл. 4, приводит к так называемым распределениям медленного роста. Наиболее слабой является среднеквадратичная сходимость в C_0^∞, которая порождает элементы пространств L^2, рассматриваемые в гл. 5: элементы эти настолько «слабы», что часто их называют просто «функциями».

Пример 1

В § 2.1 отмечалось, что непрерывная функция $f(x)$ имеет обобщенные производные всех порядков. Частичное обращение этого результата было доказано Шварцем: для любого распределения g на $\mathbb{R}$ и любого конечного интервала (a, b) существуют такие непрерывная функция $f(x)$ и целое $k \geq 0$, что g равно $f^{(k)}(x)$ на (a, b), т. е. $\langle g, \varphi\rangle = \langle f^{(k)}, \varphi\rangle$ для любой пробной функции φ с лежащим в (a, b) носителем. Для справедливости этого результата необходима непрерывность функционала $\langle g, \cdot\rangle$.

Следующие два упражнения содержат основной результат относительно интегрирования и дифференцирования по параметру. В обоих случаях непрерывность функционала $\langle f, \cdot\rangle$ необходима.

Упражнение

1. Предположим, что для каждого y, принадлежащего конечному отрезку $[a, b]$, $\varphi(x, y)$ как функция от x является пробной (т. е. принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R})$) и тем самым при каждом y все производные $\partial_x^k\varphi$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ непрерывны и обращаются в нуль вне некоторого интервала $|x| < c = c(y)$. Предположим к тому же, что зависимость от параметра y «разумна» в том смысле, что c может быть выбрано не зависящим от y, а производные $\partial_y\partial_x^k\varphi$ также непрерывны при всех x из $\mathbb{R}$ и всех y из $[a, b]$ и также обращаются в нуль вне интервала $|x| < c$. Покажите, что если f — любое распределение на $\mathbb{R}$, то

$$\int_a^b \langle f, \varphi\rangle\, dy = \left\langle f, \int_a^b \varphi\, dy\right\rangle. \tag{2.4.2}$$

Указание. Покажите, что $\psi(x) \overset{\text{def}}{=} \int_a^b \varphi(x, y)\, dy$ — пробная функция, а сумма Римана для $\int_a^b \varphi\, dy$ сходится к $\psi(x)$ в смысле сходимости в $\mathcal{D}$.

Замечания. 1) Этот результат остается верным при несколько более слабых предположениях, которые читатель при желании может установить сам. 2) Если $\langle f, \varphi\rangle$ записать символически как интеграл (2.3.6), то вместо (2.4.2) будем иметь

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_a^b \varphi(x, y)\, dy\, dx. \tag{2.4.3}$$

Упражнение

2. Предположим дополнительно, что производные $\partial_y^2\partial_x^k\varphi$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ непрерывны и обращаются в нуль вне интервала $|x| < c$. Покажите, что

$$\partial_y\langle f, \varphi\rangle = \langle f, \partial_y\varphi\rangle.$$

Это утверждение верно также при более слабых предположениях.

Мы еще вернемся к этим результатам в § 2.6 в связи с рассмотрением операторов сглаживания.

2.5. ПРИМЕРЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пример 1

Пример функционала (2.1.5) можно обобщить на n-мерный случай. Если $f(\mathbf{x})$ — любая непрерывная на $\mathbb{R}^n$ функция, то ее можно отождествить с распределением, определенным как

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})\,\varphi(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.5.1}$$

Легко доказать непрерывность функционала $\langle f, \cdot\rangle$. Пусть $\{\varphi_j\}$ — последовательность пробных функций и $\varphi_j \xrightarrow{\mathscr{D}} \psi$ в смысле определения предыдущего параграфа. Пусть $\mathscr{K}$ — достаточно большой n-мерный куб, в котором содержатся носители ψ и всех φ_j; тогда

$$\langle f, \varphi_j\rangle - \langle f, \psi\rangle = \int_{\mathscr{K}} f(\mathbf{x})\,[\varphi_j(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})]\,d^n\mathbf{x}.$$

Равномерная сходимость $\varphi_j(\mathbf{x})$ к $\psi(\mathbf{x})$ означает, что

$$M_j \overset{\text{def}}{=} \max_{\mathbf{x}} |\varphi_j(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})| \to 0 \quad \text{при } j \to \infty.$$

Так как

$$|\langle f, \varphi_j\rangle - \langle f, \psi\rangle| \leqslant \int_{\mathscr{K}} |f(\mathbf{x})|\,d^n\mathbf{x} M_j,$$

мы имеем

$$\langle f, \varphi_j\rangle \to \langle f, \psi\rangle,$$

что и требовалось установить.

Непрерывность *функции* $f(\mathbf{x})$ в действительности не является необходимой. Приведенные выше рассуждения остаются верными, если $f(\mathbf{x})$ — любая интегрируемая функция, для которой интеграл от $|f(\mathbf{x})|$ по каждому ограниченному кубу $\mathscr{K}$ конечен. (Такие функции образуют класс $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ — см. также приведенное ниже замечание.) Функция $f(\mathbf{x})$ может иметь разрывы первого рода, а также может обладать интегрируемыми особенностями. Например, при $n \geqslant 2$ равенство

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (1/\|\mathbf{x}\|)\,\varphi(\mathbf{x})\,d^n\mathbf{x} \tag{2.5.2}$$

определяет распределение f, которое может быть отождествлено с функцией $f(\mathbf{x}) = 1/\|\mathbf{x}\|$.

Если функция $f(\mathbf{x})$ не является непрерывной, то соответствие между такими функциями и распределениями нельзя считать совершенно однозначным, так как изменение значения $f(\mathbf{x})$ в точке разрыва не меняет соответствующего распределения. Если $f(\mathbf{x})$ имеет *неинтегрируемые* особенности, это соответствие также становится неоднозначным, но уже в другом смысле: только что приведенное соображение представляется совершенно несущественным по сравнению с тем, что такие функции, как $f(x) = 1/x$ в одномерном случае, могут соответствовать многим различным распределениям, порождаемым различными регуляризациями, как это будет объяснено ниже в § 2.10.

Замечание. Ниже в § 2.9 будет разъяснено, почему мы предпочли ограничить определение (2.5.1) функциями, интегрируемыми в смысле Римана: при использовании интеграла Лебега могут возникнуть некоторые несоответствия.

Следующие три примера относятся к теории потенциала, в которой $\rho(\mathbf{x})$ обычно обозначает пространственную плотность заряда. Для так называемого объемного распределения заряда $\rho(\mathbf{x})$ — обычная и, как правило, кусочно непрерывная функция, но для поверхностного, линейного или точечного распределения заряда пространственная плотность бесконечна, и $\rho(\mathbf{x})$ следует рассматривать как обобщенную функцию, т. е. как распределение в принятом здесь смысле.

Пример 2. Заряд простого слоя

Пусть $\mathbb{S}$ — замкнутая гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$ и $\sigma(\mathbf{x})$ — непрерывная на $\mathbb{S}$ функция. Тогда распределение $\rho(\mathbf{x})$ определяется на $\mathbb{R}^3$ равенством

$$\langle\rho, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{S}} \sigma(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x})\, d\mathcal{A} \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \tag{2.5.3}$$

где $d\mathcal{A}$ — элемент площади на $\mathbb{S}$. Это распределение напоминает δ-функцию Дирака в каждой точке поверхности $\mathbb{S}$.

Пример 3. Заряд двойного слоя

Возьмем те же самые $\mathbb{S}$ и $\sigma(\mathbf{x})$ и обозначим через $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ единичный вектор внешней нормали к поверхности $\mathbb{S}$ в точке $\mathbf{x}$. Тогда распределение $\rho(\mathbf{x})$ определяется равенством

$$\langle\rho, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{S}} \sigma(\mathbf{x})\, \nabla\varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, d\mathcal{A} \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3). \tag{2.5.4}$$

Это распределение напоминает производную от δ-функции в каждой точке поверхности $\mathbb{S}$.

Пример 4. Монопольный и мультипольный точечные заряды

Распределение $\rho(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^3$, задаваемое равенством $\langle\rho, \varphi\rangle = \varphi(0)$ для любой φ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, представляет плотность точечного заряда в нуле. Согласно излагающимся ниже соображениям, оно может быть записано как $\rho(\mathbf{x}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$, хотя такое выражение и не отражает явным образом сферической симметрии $\rho(\mathbf{x})$ — см. § 2.8. Точно так же распределение

$$\langle\rho, \varphi\rangle = \partial_x^p \partial_y^q \partial_z^r \varphi(\mathbf{x})\,\big|_{\mathbf{x}=0} \quad \forall\varphi \tag{2.5.5}$$

представляет плотность мультиполя порядка 2^{p+q+r} в нуле. Это распределение можно записать также в виде

$$(-1)^{p+q+r}\, \delta^{(p)}(x)\, \delta^{(q)}(y)\, \delta^{(r)}(z). \tag{2.5.6}$$

Пример 5.

Одна из инвариантных относительно преобразований Лоренца δ-функций, применяемая в квантовой электродинамике и определенная Дираком [1947] как

$$\delta(t^2 - \|\mathbf{x}\|^2), \tag{2.5.7}$$

или, что то же самое, как

$$\frac{1}{2\|\mathbf{x}\|}\,[\delta(t - \|\mathbf{x}\|) + \delta(t + \|\mathbf{x}\|)] \tag{2.5.8}$$

(здесь $\mathbf{x}$ — трехмерный вектор, а скорость света считается равной единице), представляет собой распределение на $\mathbb{R}^4$, обозначаемое через D или $D(t, \mathbf{x})$

и задаваемое равенством

$$\langle D, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\|\mathbf{x}\|} [\varphi(\|\mathbf{x}\|, \mathbf{x}) + \varphi(-\|\mathbf{x}\|, \mathbf{x})]\, d^3\mathbf{x} \quad \forall\varphi(t, \mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4). \quad (2.5.9)$$

Это распределение сосредоточено на световом конусе

$$|t| = \|\mathbf{x}\|,$$

т. е. $\langle D, \varphi\rangle = 0$ для любой функции $\varphi(t, \mathbf{x})$, носитель которой не пересекается с этим конусом. Инвариантность $D(t, \mathbf{x})$ относительно преобразований Лоренца рассматривается в § 2.8.

Упражнение

1. Покажите, что (2.5.9) можно формально получить либо из (2.5.7), либо из (2.5.8), записав $\langle D, \varphi\rangle$ символически как интеграл $\int_{\mathbb{R}^4} D\varphi\, dt\, d^3\mathbf{x}$ и выполнив интегрирование по t.

Пример 6. Меры

Если функция $\sigma(x)$ вещественной переменной x имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале, то определяемый интегралом Стилтьеса функционал

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\sigma(x) \quad (2.5.10)$$

является распределением; распределения такого типа называют *мерами* — см. гл. 13.

Пример 7. Произведение

В общем случае нельзя определить произведение двух распределений (хотя в § 6.5 определяется так называемое прямое произведение распределений $f(x)$ и $g(y)$, имеющих различные независимые переменные). Однако если f — любое распределение на $\mathbb{R}^n$, а $\alpha(\mathbf{x})$ — любая функция класса C^∞ на $\mathbb{R}^n$ (не обязательно с ограниченным носителем), то обозначаемое через $f\alpha$ или αf распределение определяется как

$$\langle f\alpha, \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle f, \alpha\varphi\rangle. \quad (2.5.11)$$

Отметим, что если $\varphi(\mathbf{x})$ — любая пробная функция, то $\alpha(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$ — также пробная функция, так что определение (2.5.11) корректно.

2.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАК ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФУНКЦИЙ. СХОДИМОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Распределение $\delta(x)$ можно рассматривать как предел последовательности $\{f_n(x)\}$ функций, где

$$f_n(x) = (n/\sqrt{\pi})\, e^{-n^2x^2}, \quad (2.6.1)$$

потому что если $\varphi(x)$ — любая пробная (или даже любая ограниченная непрерывная) функция, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(0). \quad (2.6.2)$$

Это записывается как

$$(n/\sqrt{\pi})\, e^{-n^2x^2} \to \delta(x). \tag{2.6.3}$$

Обобщая этот факт, последовательность $\{f_n(x)\}$ функций, для которой существует предел интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\varphi(x)\,dx$ при каждой пробной функции $\varphi(x)$, назовем сходящейся к распределению f, определяемому как

$$\langle f,\ \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi \tag{2.6.4}$$

(см. замечание, приведенное несколько ниже).

Наконец, если $\{f_n\}$ — любая последовательность распределений, например на $\mathbb{R}^n$, и f — такое распределение на $\mathbb{R}^n$, что $\langle f_n,\ \varphi\rangle \to \langle f,\ \varphi\rangle$ для каждой пробной функции φ, то будем говорить, что распределения f_n *сходятся* к распределению f. Это записывается или как $f_n \to f$, или как $f_n(\cdot) \to f(\cdot)$, или даже как $f_n(x) \to f(x)$, но при использовании последней формы записи не следует забывать, что при этом вовсе не имеется в виду поточечная сходимость.

Достаточно простой иллюстрацией введенного понятия является равномерная сходимость непрерывных функций $f_n(\mathbf{x})$ к $f(\mathbf{x})$ — тогда они сходятся к $f(\mathbf{x})$ и как распределения, одной лишь поточечной сходимости для этого оказывается недостаточно.

Замечание. Шварц показал, что если f_n — распределения (т. е. *непрерывные* линейные функционалы) и для каждой пробной функции φ существует предел последовательности $\langle f_n,\ \varphi\rangle$, то этот предел, являющийся, очевидно, линейным функционалом на пространстве пробных функций, всегда непрерывен в смысле § 2.4 и поэтому представляет собой распределение.

Упражнение

1. Проверьте (2.6.3), т. е. (2.6.2), если f_n заданы в виде (2.6.1).
2. Аналогично проверьте, что

$$\frac{1-\cos nx}{n\pi x^2} \to \delta(x) \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{2.6.5}$$

3 (сравните с упражнением 2 из § 2.4). Пусть f — распределение на $\mathbb{R}^n$ и $\varphi(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Будем рассматривать компоненты вектора $\mathbf{y}$ как параметры и писать $\varphi(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$. Покажите, что $\langle f,\ \varphi_{\mathbf{y}}\rangle$ — функция класса C_0^∞ по переменным $y_1, \ldots, y_n$. Покажите, что если $\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $\langle f,\ \varphi_{\mathbf{y}}\rangle$ — функция класса C^∞ по $y_1, \ldots, y_n$.

Этот результат можно применить к задаче о *сглаживании*. Пусть $\rho(\mathbf{x})$ — сферически симметричная неотрицательная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с принадлежащим единичному шару носителем и нормированная так, что $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} = 1$. Для любого $\delta > 0$ положим

$$\rho_{y\delta}(\mathbf{x}) = \rho\left(\frac{1}{\delta}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)\left(\frac{1}{\delta}\right)^n.$$

Тогда функция

$$f_\delta(\mathbf{y}) = \langle f, \rho_{y\delta}\rangle$$

называется результатом *сглаживания* распределения f усреднением по радиусу δ. Будем записывать это как $f_\delta = J_\delta f$; оператор J_δ называется *оператором сглаживания* или *сглаживателем*.

Упражнения

4. Покажите, что при $\delta \to 0$ функции f_δ сходятся к f в смысле сходимости распределений, т. е.

$$J_\delta f \to f. \qquad (2.6.6)$$

Более того, если D — любая частная производная $\partial/\partial x_j$, то

$$DJ_\delta f = J_\delta Df. \qquad (2.6.7)$$

Следовательно, производные от f_δ сходятся к производным от f. *Указание*. Сначала покажите, что

$$\langle J_\delta f, \varphi\rangle = \langle f, J_\delta\varphi\rangle, \qquad (2.6.8)$$

используя результат упражнения 1 из § 2.4 об интегрировании по параметру. Затем покажите, что если φ — любая пробная функция из C_0^∞, то $J_\delta\varphi \to \varphi$ в смысле сходимости пробных функций. Для этой цели лучше всего доказать, что $J_\delta D\varphi = DJ_\delta\varphi$, откуда и будет следовать (2.6.7).

Заметим также, что если $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, то $J_{\delta_1}J_{\delta_2} = J_{\delta_2}J_{\delta_1}$.

5. Покажите, что если $f_j \to f$ в смысле сходимости распределений, то $J_\delta f_j \to J_\delta f$ в том же смысле.

Эти упражнения показывают, что любое распределение можно приближать функциями из класса C^∞. Примерами таких приближений для δ-функции являются соотношения (2.6.3) и (2.6.5).

Результат сглаживания можно рассматривать как свертку распределения с пробной функцией $\rho(\mathbf{x}/\delta)(1/\delta)^n$, поскольку символически его можно записать как

$$f_\delta(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y})\, \rho\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\delta}\right)\left(\frac{1}{\delta}\right)^n d^n\mathbf{y}.$$

Свертка двух распределений определяется и изучается в гл. 6.

2.7. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Если f — любое распределение на $\mathbb{R}$, то распределение f', называемое *производной* от f, определяется как

$$\langle f', \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} -\langle f, \varphi'\rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty. \qquad (2.7.1)$$

Если $\varphi=\varphi(x)$ — любая пробная функция, то $\varphi'=\varphi'(x)$ — также пробная функция, так что (2.7.1) представляет собой определение функционала $\langle f', \cdot\rangle$. Если f и f' — обычные функции, то (2.7.1) есть в точности интегрирование по частям ($\varphi(x)$ тождественно обращается в нуль для тех положительных и отрицательных x, которые лежат вне носителя φ).

Производные высших порядков определяются аналогично путем дальнейшего формального интегрирования по частям. Таким же образом определяются и частные производные: например, если $f=f(x, y)$ — любое распределение на $\mathbb{R}^2$, то распределение $\partial_x\partial_y f$ определяется как

$$\langle \partial_x\partial_y f, \varphi\rangle = \langle f, \partial_x\partial_y\varphi\rangle \quad \text{для всех} \quad \varphi\in C_0^\infty. \tag{2.7.2}$$

Замечания о непрерывности функционалов.

(1) Прежде всего, если $f(x)$ — обычная дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, то

$$\frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)] \to f'(x) \quad \text{при} \quad h\to 0. \tag{2.7.3}$$

Это верно и для любого распределения f на $\mathbb{R}$ (распределение f' определяется при помощи (2.7.1), а не (2.7.3)), но для доказательства этого факта необходима непрерывность функционала $\langle f, \cdot\rangle$ в смысле § 2.4. А именно, определим распределение $f(x+h)$ как

$$\langle f(x+h), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), \varphi(x-h)\rangle; \tag{2.7.4}$$

следовательно, (2.7.3) будет иметь место, если нам удастся показать, что

$$\lim_{h\to 0}\left\langle f, \frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h}\right\rangle = \left\langle f, \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h}\right\rangle. \tag{2.7.5}$$

Это соотношение будет следовать из непрерывности функционала $\langle f, \cdot\rangle$, если мы сможем показать, что

$$\frac{\varphi(x-h)-\varphi(x)}{h} \xrightarrow{\mathcal{D}} -\varphi'(x) \quad \text{при} \quad h\to 0 \tag{2.7.6}$$

(см. упражнение 1 этого параграфа).

(2) Все это обязывает нас доказать, что если f — любое распределение на $\mathbb{R}$, то линейный функционал f', определенный в (2.7.1), непрерывен в смысле § 2.4 и поэтому представляет собой распределение (см. упражнение 2 этого параграфа).

(3) Если распределение f инвариантно относительно сдвигов, т. е. распределение $f(x+h)$ совпадает с распределением $f(x)$ при всех h, то из предыдущего следует, что f' есть функция $f'(x)\equiv 0$, так что f — тоже функция $f(x)=\text{const}$. Для справедливости этого рассуждения следует заранее предположить непрерывность функ-

ционала $\langle f, \cdot\rangle$. Однако в 1971 г. Майстерс довольно сложным путем показал, что инвариантный относительно сдвигов линейный функционал на $\mathbb{R}$ *обязательно* непрерывен в смысле § 2.4 и поэтому представляет собой распределение.

(4) Аналогично для распределения f на $\mathbb{R}^2$ из его непрерывности следует, что если $\partial_x f = 0$, то f не зависит от x в том смысле, что $f(x+h, y) = f(x, y)$ при любом y, поскольку $\varphi(x-h, y) - \varphi(x, y)$ всегда можно представить как $\partial_x\psi$ для некоторой пробной функции ψ, и поэтому $f(x+h, y)$ и $f(x, y)$ — это одно и то же распределение на $\mathbb{R}^2$.

Интегрирование

Теперь покажем, что для любого распределения g на $\mathbb{R}$ существует такое распределение f, называемое *первообразной* от g или *неопределенным интегралом* от g, что $f' = g$. Более того, f определяется однозначно с точностью до аддитивной постоянной. Для доказательства этого будем строить линейный функционал $\langle f, \cdot\rangle$ таким образом, что если $\psi = -\varphi'$ для некоторой пробной функции φ, то было бы $\langle f, \psi\rangle = \langle f, -\varphi'\rangle = \langle g, \varphi\rangle$. Для любой функции ψ из C_0^∞ положим

$$\varphi(x) = -\int_{-\infty}^{x} \psi(x')\, dx'.$$

Тогда φ всегда принадлежит C^∞ и $\varphi' = -\psi$. Ясно, что φ принадлежит также и C_0^∞ тогда и только тогда, когда $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x')\, dx' = 0$, и в этом случае положим $\langle f, \psi\rangle = \langle g, \varphi\rangle$, как это и требуется. Чтобы теперь определить $\langle f, \psi\rangle$ для произвольной функции ψ из C_0^∞, выберем такую пробную функцию ψ_1, для которой $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\, dx = 1$; произвольную постоянную c также зафиксируем и положим $\langle f, \psi_1\rangle$ равным c. Это полностью определяет функционал $\langle f, \cdot\rangle$, потому что любая функция ψ может быть представлена в виде $\psi = \psi_0 + a\psi_1$, где

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x)\, dx = 0, \quad a = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx;$$

тогда

$$\begin{aligned}\langle f, \psi\rangle &= \langle f, \psi_0\rangle + \langle f, a\psi_1\rangle = \\ &= \langle f, \psi_0\rangle + a\langle f, \psi_1\rangle = \langle f, \psi_0\rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, dx \cdot c = \\ &= \langle f, \psi_0\rangle + \langle c, \psi\rangle,\end{aligned}$$

где последний член представляет собой аддитивную постоянную функцию c.

Упражнения

1. Докажите (2.7.6), проверив условия сходимости в $\mathcal{D}$, сформулированные в § 2.4.

2. Докажите непрерывность определенного в (2.7.1) функционала $\langle f', \cdot \rangle$, проверив, что если $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, то $\varphi_n' \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi'$.

Если f — неопределенный интеграл от g, то символически это записывается как

$$f = \int^x g \quad \text{или} \quad \int^x g\,dx$$

или даже как

$$f(x) = \int g(x)\,dx,$$

но, конечно, при этом не нужно забывать, что f и g являются распределениями.

Упражнения

3. Пусть функция $f(x)$ на $\mathbb{R}$, а именно $f(x) = |x|$, рассматривается как распределение. Найдите распределения f' и f'', используя определение (2.7.1).

4. Пусть f — любое распределение на $\mathbb{R}$ и функция α принадлежит C^∞, а произведение αf определяется равенством (2.5.11). Покажите, что $(\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'$.

5. Пусть $f = f(x)$ — неубывающая функция (не обязательно дифференцируемая или даже непрерывная). Тогда она интегрируема по Риману на любом конечном интервале, и поэтому к ней применим результат примера 1 из § 2.5. Покажите, что $f' \geq 0$ на всем $\mathbb{R}$; это означает, согласно следующей главе, что $\langle f', \varphi \rangle \geq 0$ для каждой пробной функции $\varphi(x)$, которая неотрицательна при всех x. *Указание*. Покажите, что $\int f\varphi'\,dx$ можно приблизить суммами Римана вида $\sum_{j=1}^{N} f(x_j)\,[\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})]$.

6. Покажите, что если $g = g(x, y)$ — любое распределение на $\mathbb{R}^2$, то найдется такое распределение $f = f(x, y)$, что $\partial_x f = g$. Покажите, что f определяется однозначно с точностью до аддитивного распределения h, которое не зависит от x в смысле замечания 4 этого параграфа.

7. Покажите, что если распределение $f(x, y)$ на $\mathbb{R}^2$ не зависит от x, то найдется такое распределение $g(y)$ на $\mathbb{R}$, что для любой пробной функции вида $\varphi(x, y) = \psi(x)\,\chi(y)$

$$\langle f, \varphi \rangle = a \langle g, \chi \rangle, \tag{2.7.7}$$

где

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx. \tag{2.7.8}$$

Замечание. Этот результат получается формально, если положить $f(x, y) = g(y)$ и затем выполнить интегрирование по x в правой части равенства

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\int f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy. \tag{2.7.9}$$

8. Покажите, что если $g=g(x, y)$ — любое распределение на $\mathbb{R}^2$, то найдется такое распределение $f=f(x, y)$, что $\partial_x\partial_y f=g$; покажите, что f определяется однозначно с точностью до аддитивного распределения вида h_1+h_2, где h_1 не зависит от x, а h_2 не зависит от y.

2.8. ЗАМЕНА НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. СИММЕТРИИ

Выражениям вида $f(\alpha(x))$ можно придать смысл только при выполнении определенных условий. Если α — вещественная функция из C^∞ на $\mathbb{R}$ и уравнение $y=\alpha(x)$ имеет единственное решение $x=\beta(y)$, также принадлежащее C^∞, то для любой непрерывной функции $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha(x))\,\varphi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\varphi(\beta(y))\,|\beta'(y)|\,dy. \tag{2.8.1}$$

Замечание. Функция $\beta'(y)$ не может изменить знака, так что $|\beta'(y)|$ при всех y равен либо $\beta'(y)$, либо $-\beta'(y)$.

Это равенство верно и для любого распределения $f(x)$ на $\mathbb{R}$, если определить распределение $g(x)=f(\alpha(x))$ на $\mathbb{R}$ как

$$\langle g, \varphi\rangle=\langle f, \psi\rangle \quad \forall\varphi, \tag{2.8.2}$$

где

$$\psi(y)=\varphi(\beta(y))\,|\beta'(y)| \tag{2.8.3}$$

($\psi(y)$ является пробной функцией, если таковой является $\varphi(x)$).

Простейшим примером является распределение $\delta(ax)=\delta(x)/|a|$, где $\alpha(x)=ax$, $\beta(y)=y/a$ $(a\neq 0)$.

Замечание. Если $x\to\alpha(x)$ — взаимно однозначное отображение $\mathbb{R}$ на себя класса C^∞, то обратное ему отображение $y\to\beta(y)$ не обязательно принадлежит C^∞, как показывает пример $\alpha(x)=x^3$.

Обратимые преобразования переменных класса C^∞ могут быть точно так же применены к распределениям, заданным на $\mathbb{R}^n$. Вместо $|\beta'|$ в (2.8.3) появляется $|J|$, где J — якобиан обратного преобразования. Если преобразование линейно, т. е. $\alpha(\mathrm{x})=A\mathrm{x}+\mathrm{x}_0$, и матрица A невырожденная, то

$$\langle f(\alpha(\mathrm{x})), \varphi(\mathrm{x})\rangle=|\det A|^{-1}\langle f(\mathrm{y}), \varphi(A^{-1}(\mathrm{y}-\mathrm{x}_0))\rangle. \tag{2.8.4}$$

Для нас важны два следующих случая.

(1) $n=2$ или 3, $\mathrm{x}_0=0$, а A является матрицей вращения (следовательно, $\det A=1$). Тогда

$$\langle f(A\mathrm{x}), \varphi(\mathrm{x})\rangle=\langle f(\mathrm{y}), \varphi(A^{-1}\mathrm{x})\rangle. \tag{2.8.5}$$

Распределение $f(A\mathrm{x})$ получается из $f(\mathrm{x})$ путем вращения в пространстве. Если $f(\mathrm{x})=\rho(\mathrm{x})$, где $\rho(\mathrm{x})$ — плотность точечного заряда в нуле, определенная в примере 4 из § 2.5, а именно

$$\rho(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z),$$

т. е.

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \varphi(0, 0, 0), \tag{2.8.6}$$

то, как видно из последнего равенства, $\rho(A\mathrm{x}) = \rho(\mathrm{x})$, т. е. это распределение сферически симметрично относительно нуля. Но нельзя утверждать, что любое сосредоточенное в нуле распределение обладает такой симметрией: ее нет, например, у мультипольного распределения (2.5.5).

(2) $n = 4$, $x_0 = 0$, а A — матрица преобразования Лоренца (снова $\det A = 1$). В этом случае $f(A\mathrm{x})$ получается из $f(\mathrm{x})$ при помощи однородного преобразования Лоренца.

Упражнение

1. Покажите, что распределение $D(t, \mathrm{x})$, определенное в (2.5.9), инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Если подстановка $x \to \alpha(x)$ не взаимно однозначна, или не определена на всем $\mathbb{R}$, или не отображает на все $\mathbb{R}$, то часто оказывается возможным дать специальные определения таким образом, чтобы при этом сохранились формальные правила действий. Например, Дирак определяет $\delta(x^2 - a^2)$ при $a \neq 0$ как

$$\delta(x^2 - a^2) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2|a|}[\delta(x+a) + \delta(x-a)]. \tag{2.8.7}$$

Если учесть, что при изменении x от $-\infty$ до ∞ величина $y = x^2 - a^2$ изменяется от ∞ до $-a^2$ и затем проходит обратный путь до ∞, то формальная подстановка y в $\int \delta(x^2 - a^2)\varphi(x)\,dx$ дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - a^2)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_{-a^2}^{\infty} \delta(y)\left[\varphi\left(\sqrt{y+a^2}\right) + \varphi\left(-\sqrt{y+a^2}\right)\right] \frac{dy}{2\sqrt{y+a^2}}, \tag{2.8.8}$$

что согласуется с (2.8.7).

2.9. ОГРАНИЧЕНИЯ И ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЯ

Распределения во многих отношениях напоминают обычные функции и подчиняются многим из обычных правил выполнения операций. В действительности для распределений многие ограничения на эти правила отпадают. Например, каждое распределение можно дифференцировать и интегрировать, а интегрирование всегда есть обращение дифференцирования (обратное также верно) — в этом заключается основная теорема анализа распределений. Для распределений на $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^n$ операторы ∂_x и ∂_y всегда перестановочны (см. пример ниже). Как мы увидим чуть позже, для каждого распределения медленного роста существует преобразование Фурье, а для любых распределений f и g, одно из которых имеет компактный носитель, всегда существует свертка $f*g$; преобразования Фурье и свертки удовлетворяют всем обычным правилам. Уравнение Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ на $\mathbb{R}^3$ или в ограниченной области Ω всегда может быть решено при помощи функции Грина для любого распределения ρ с компактным носителем и т. д.

Еще более важно то, что теория распределений представляет собой очень естественный аппарат для изучения используемых в физике дифференциальных операторов, как мы увидим в гл. 10 и 11.

В то же время теория распределений имеет определенные ограничения. Некоторые из них обсуждаются в этом параграфе. Необдуманная манипуляция формулами здесь не менее опасна, чем в любом другом разделе математики или физики.

Ограничения на $\langle f, g\rangle$

Если f — распределение, то значение $\langle f, g\rangle$ не всегда определяется: его можно определить как для пробной функции g, так и для некоторых функций или распределений g из более широких классов, чем C_0^∞. Здесь в некотором смысле предельным является тот случай, когда f и g принадлежат одному из пространств L^2, рассматриваемых в гл. 5: тогда $\langle f, g\rangle$ определено, а $\langle \bar f, g\rangle$ — скалярное произведение, которое превращает L^2 в гильбертово пространство.

Ограничения на произведение $f(x)\,g(x)$

Если f — распределение, а g — функция класса C^∞, то произведение $fg\,(=gf)$ было определено в § 2.5: см. там пример 7. Для распределений f из некоторых классов произведение fg имеет смысл, если функции или распределения g принадлежат более широкому классу, чем C^∞. Здесь в некотором смысле предельным является тот случай, когда f и g принадлежат пространству L^2: тогда произведение fg вполне определено как распределение (в общем случае оно принадлежит L^1, а не L^2). Если f, g, f' и g' все принадлежат $L^2(\mathbb{R})$, то верна формула интегрирования по частям — см. гл. 5. Выражение $(\delta(x))^2$ не имеет смысла.

Ограничения на $f(g(x))$

Мы определили в § 2.5 $f(g(x))$ в том случае, когда функция $g(x)$ и обратная ей принадлежат классу C^∞. Обобщения в этом направлении почти невозможны, за исключением тех случаев, когда g и f — обычные функции или f линейна. Такие выражения, как $\delta(x^2)$ и $e^{\delta(x)}$, не имеют смысла.

Нелинейные задачи

В силу указанных выше ограничений распределения используются главным образом в линейном анализе, например при исследовании линейных дифференциальных уравнений или линейных аспектов квантовой механики; их применение к нелинейным задачам может приводить к некоторой неопределенности. Дифференциальное уравнение

$$\partial_t u + u\partial_x u = 0 \tag{2.9.1}$$

для функции $u(t, x)$ часто изучается как простейший прототип уравнений гидродинамики. Его решение за конечное время может стать из гладкого разрывным при образовании ударной волны. Для изучения таких решений уравнение (2.9.1) сначала переписывается в так называемой форме закона сохранения

$$\partial_t u + \partial_x ({}^1/_2 u^2) = 0; \tag{2.9.2}$$

назовем теперь функцию $u(t, u)$ *слабым решением* этого уравнения, если

$$\iint (u\partial_t\varphi + {}^1/_2 u^2 \partial_x \varphi)\, dt\, dx = 0 \tag{2.9.3}$$

для всех пробных функций $\varphi(t, x)$. [Тогда $u(t, x)$ — такая функция, что обобщенная производная от u по t и обобщенная производная от u^2 по x удовлетворяют (2.9.2).] Известно, что слабые решения записанных в виде соответствующих законов сохранения уравнений гидродинамики отражают физическую реальность: в частности, в точках разрыва эти решения удовлетворяют так называемым условиям Ренкина — Гюгонио на фронте ударной волны. Однако правильная форма закона сохранения определяется физическими соображениями: действительно, (2.9.1) можно записать также в виде

$$\partial_t ({}^1/_2 u^2) + \partial_x ({}^1/_3 u^3) = 0, \tag{2.9.4}$$

но слабые решения этого уравнения не совпадают со слабыми решениями уравнения (2.9.2). Нет никаких математических аргументов в пользу того, слабые решения какого из этих двух уравнений следует называть обобщенными решениями исходного уравнения (2.9.1). Слабое решение уравнения (2.9.2) может совпадать со слабым решением уравнения (2.9.4) до появления разрывов (т. е. до тех пор, пока они остаются обычными решениями) и отличаться от него после этого.

Смешанные частные производные

Следующий пример иллюстрирует то положение, согласно которому в общем случае не следует стремиться придать распределению значение в отдельной точке. Рассмотрим непрерывную функцию на $\mathbb{R}^2$, определенную следующим образом:

$$f(x, y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} \quad \text{при} \quad x^2+y^2 \neq 0, \qquad f(0, 0) = 0. \tag{2.9.5}$$

Первые и вторые частные производные существуют в обычном смысле для всех x и всех y. В частности,

$$\partial_x f = -y \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{и всех } y,$$
$$\partial_y f = +x \quad \text{при} \quad y=0 \quad \text{и всех } x$$

и поэтому

$$\partial_y \partial_x f = -1 \quad \text{при} \quad x=y=0,$$
$$\partial_x \partial_y f = +1 \quad \text{при} \quad x=y=0,$$

тогда как *распределения* $\partial_y \partial_x f$ и $\partial_x \partial_y f$ равны (они являются одним и тем же распределением просто потому, что $\partial_x \partial_y \varphi = \partial_y \partial_x \varphi$ в обычном смысле для любой пробной функции). Распределению $\partial_y \partial_x f$ нельзя приписать никакого значения (ни $+1$, ни -1) при $x = y = 0$, и это оказывается разумным для большинства приложений, потому что поведение функции $\partial_y \partial_x f$ крайне сингулярно при стремлении точки (x, y) к точке $(0, 0)$ по любой прямой, отличной от координатных осей x и y.

Идентификация функций с распределениями

В § 2.5 функция $f(x)$ отождествлялась с распределением f, определенным как

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty,$$

только тогда, когда существует интеграл в смысле Римана. Пусть теперь $f(x)$ — функция Кантора, которая будет описана в гл. 13: $f(x)$ непрерывна и возрастает от $f(0) = 0$ до $f(1) = 1$ таким образом, что ее производная $f'(x)$ существует почти при всех x

(т. е. везде, кроме множества меры нуль) и равна нулю там, где она существует. Положим $f(x)=0$ при $x<0$ и $f(x)=1$ при $x>1$. Тогда функция $f'(x)$ будет интегрируемой по Лебегу и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,\varphi(x)\,dx=0 \quad \forall\varphi\in C_0^\infty.$$

Следовательно, если использовать интегралы Лебега, то распределение, отождествленное с $f'(x)$, не будет совпадать с производной от распределения, отождествленного с $f(x)$.

Не впадайте в мистику

(1) В книге Дирака есть формула

$$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}-i\pi\delta(x),$$

которую он использует в теории столкновений. Эта формула, несомненно, должна рассматриваться при некоторых специальных ограничениях — иначе непонятен выбор коэффициента при $\delta(x)$.

(2) В одной из книг по теории распределений говорится, что для любых распределений f и g (заданных, например, на $\mathbb{R}$) можно определить свертку $f*g$, рассматривая ее как распределение. Это неверно уже для функций: если $f(x)=g(x)=1$ при всех x, то $f*g$ обратится в ∞ при всех x, так что эту свертку нельзя отождествить ни с функцией, ни с распределением, ни с какой-либо другой из известных до сих пор обобщенных функций.

(3) Гельфанд и Шилов приводят формулу для $\delta(x)$ при комплексных значениях x. Они основывают свою формулу на определениях, выходящих за рамки теории распределений Шварца, и поэтому она не имеет смысла в любом контексте, не содержащем этих определений.

Операторнозначные распределения

В квантовой теории поля часто определяют операторнозначное распределение $T(\mathbf{x})$, говоря, что для каждой пробной функции $\varphi(\mathbf{x})$ величина $\langle T, \varphi\rangle$ является ограниченным линейным оператором на некотором гильбертовом пространстве. Под линейностью функционала $\langle T, \cdot\rangle$ понимается то же самое, что и выше, а его непрерывность требует дополнительного разъяснения. А именно, если последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится, $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$, как в § 2.4, то непрерывность означает, что $\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle$, и следует лишь решить, какая сходимость операторов здесь подразумевается: слабая, сильная или равномерная (см. гл. 7).

Сходимость функций

Как отмечалось в § 2.6, поточечная сходимость функций $f_n(x)$ к $f(x)$ ни необходима, ни достаточна для сходимости $f_n \to f$ как распределений. В этом нет ничего удивительного: уже из элементарной теории рядов Фурье и ортогональных систем функций видно, что в физике обычно существенна не поточечная сходимость, а сходимость в среднем (т. е. в L^2). Сходимость в среднем представляет собой частный случай сходимости в смысле теории распределений, причем поточечная сходимость не является для нее ни необходимой, ни достаточной.

Если $f_n \to f$ в смысле распределений, то точно так же и $f_n' \to f_n'$ и т. д.

2.10. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

До сих пор у нас еще не было метода для сопоставления распределений с такими функциями, как $f(x) = 1/x$ или $1/x^2$, которые имеют неинтегрируемые особенности. В общем случае, если функция $f(x)$ имеет особенность некоторого типа в точке $x = x_0$ и непрерывна при $x \neq x_0$, будем искать распределение f, называемое *регуляризацией* $f(x)$, такое, что

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx \tag{2.10.1}$$

для каждой пробной функции φ, носитель которой не содержит точки x_0. Так как значение $\langle f, \varphi\rangle$ должно быть определено для *всех* пробных функций (хотя и не обязательно с помощью этого интеграла), регуляризация не единственна.

Положим для удобства $x_0 = 0$. Если функция $x^m f(x)$ при некотором целом положительном m ограничена в некоторой окрестности нуля (тогда говорят, что особенность в точке $x = 0$ алгебраическая[1])), то одна из возможных регуляризаций определяется как

$$\langle f, \varphi\rangle = \int_{|x|>a} f(x)\,\varphi(x)\,dx + \int_{|x|<a} f(x)\left[\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0) - \ldots - \frac{1}{m!}x^m\varphi^m(0)\right]dx,$$

$$\forall\varphi \in C_0^\infty, \tag{2.10.2}$$

[1]) Обычно такая особенность называется степенной. — *Прим. перев.*

для некоторого фиксированного заданного $a>0$, потому что, во-первых, это, очевидно, линейный функционал на C_0^∞ и, во-вторых, если носитель функции φ не содержит нуля, то $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^m = 0$, так что (2.10.2) согласуется с (2.10.1).

Упражнение

1. Покажите, что функционал (2.10.2) непрерывен в смысле § 2.4.

Неединственность

Если f — указанная выше регуляризация, то другие регуляризации могут быть получены путем прибавления к f любого распределения g, которое сосредоточено в нуле, т. е. дает нуль при действии на любую пробную функцию, носитель которой не содержит нуля. В качестве g можно взять, например, распределение вида

$$g(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j \delta^{(j)}(x),$$

что эквивалентно прибавлению к (2.10.2) линейного функционала

$$\sum_{j=0}^{k} a_j (-1)^j \varphi^{(j)}(0).$$

Любая функция $f(x)$, имеющая не более чем конечное число алгебраических особенностей в любом конечном интервале, может быть регуляризована аналогичным образом. Неединственность порождает вопрос о том, какую регуляризацию из всех возможных лучше всего выбрать. Для указанного выше класса функций этот вопрос был рассмотрен Гельфандом и Шиловым. Они показали, что для каждой функции из этого класса можно выбрать *каноническую регуляризацию*[1]), обладающую следующими свойствами: (1) регуляризация суммы $f(x)+g(x)$ есть сумма регуляризаций $f(x)$ и $g(x)$; (2) регуляризация обычной производной от $f(x)$ есть производная в смысле распределений от регуляризации $f(x)$ и (3) если $\alpha(x)$ — любая функция из C^∞ на $\mathbb{R}$, то регуляризация $\alpha(x) f(x)$ есть произведение $\alpha(x)$ на регуляризацию $f(x)$.

Упражнение

2. Пусть функция

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0 \end{cases}$$

отождествлена с распределением f. Найдите f' и f'' и сравните их с регуляризациями функций $f'(x)$ и $f''(x)$, получающимися согласно (2.10.2).

---

[1]) Они показали также, что каноническая регуляризация определяется единственным образом. — *Прим. перев.*

Приложение к главе 2.

РАЗРЫВНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ

Здесь на пространстве $C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R})$ пробных функций $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}$ будет построен линейный функционал, который не является непрерывным в смысле § 2.4 и тем самым не является распределением в смысле Шварца.

Возьмем некоторую функцию $\rho(x)$ из C_0^∞ и зафиксируем ее для всех дальнейших построений, предполагая лишь, что носитель функции ρ содержится в некотором интервале (a, b). Положим

$$X = \{\psi(x):\ \exists\varphi \in C_0^\infty,\quad \psi(x) = \rho(x)\,\varphi(x)\};\tag{2.A.1}$$

X — это линейное пространство. Сначала определим разрывный линейный функционал на пространстве X. В X, как и во всяком линейном пространстве, можно выбрать базис Хамеля (см. книгу Данфорда и Шварца [1958]), т. е. множество $B = \{\psi_a:\ a \in A\}$ элементов из X, где A — несчетное множество индексов, так что любой элемент ψ из X имеет единственное представление

$$\psi = c\psi_a + c'\psi_{a'} + \ldots + c^{(m)}\psi_{a^{(m)}}\tag{2.A.2}$$

в виде конечной линейной комбинации элементов базиса B (m зависит от ψ). Можно определить $\langle f, \psi_a\rangle$ произвольно для каждого элемента ψ_a базиса B, после чего для элемента ψ, имеющего вид (2.A.2), $\langle f, \psi\rangle$ определится как

$$\langle f, \psi\rangle = c\langle f, \psi_a\rangle + c'\langle f, \psi_{a'}\rangle + \ldots + c^{(m)}\langle f, \psi_{a^{(m)}}\rangle.\tag{2.A.3}$$

Произвольно выберем счетную последовательность $\{\psi_{a_k}\}_{k=1}^\infty$ различных элементов базиса B. Для каждого k выберем такую функцию $\varphi_k \in C_0^\infty$, что (1) $\psi_{a_k}(x) = \rho(x)\,\varphi_k(x)$ и (2) носитель $\varphi_k \subset (a, b)$. Ясно, что это всегда возможно, потому что носитель функции ρ — это замкнутое множество внутри (a, b), а условие (1) фиксирует значения φ_k только на носителе ρ. Положим

$$N_k = \sup\left\{\left|\psi_{a_k}^{(j)}(x)\right|,\quad \left|\varphi_k^{(j)}(x)\right|:\ x \in \mathbb{R},\quad j = 1, \ldots, k\right\}.$$

Определим теперь функционал $\langle f, \cdot\rangle$ на элементах базиса B следующим образом:

$$\langle f, \psi_{a_k}\rangle = kN_k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$
$$\langle f, \psi_a\rangle = 0 \quad \text{при} \quad \psi_a \notin \{\psi_{a_k}\}.$$

Пусть

$$\tilde\psi_k = \frac{1}{kN_k}\psi_{a_k},\quad \tilde\varphi_k = \frac{1}{kN_k}\varphi_k;$$

тогда

$$\tilde\psi_k \longrightarrow 0 \quad \text{и} \quad \tilde\varphi_k \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \longrightarrow \infty$$

в смысле сходимости пробных функций (сходимости в $\mathscr{D}$). Но

$$\langle f, \tilde\psi_k\rangle = 1 \quad \text{при всех} \quad k = 1, 2, \ldots$$

и поэтому функционал $\langle f, \cdot\rangle$ не является непрерывным. Наконец, определим функционал g на C_0^∞ как

$$\langle g, \varphi\rangle = \langle f, \rho\varphi\rangle \quad \forall\varphi \in C_0^\infty.$$

Так как $\langle g, \tilde\varphi_k\rangle = \langle f, \tilde\psi_k\rangle = 1$, функционал g также разрывен.

Пояснение. Понятие базиса Хамеля в бесконечномерном пространстве многие считают слишком абстрактным, потому что оно опирается на несчетную аксиому выбора и пока еще не найден способ построения такого базиса. Однако эта аксиома в ее несчетной форме входит в классическую систему аксиом Цермело — Френкеля, на которой основывается современная математика, и оказалась очень полезной во многих разделах математики. До тех пор пока мы исходим из этой системы аксиом, непрерывность различных линейных функционалов, вводимых в качестве распределений, не может считаться заранее верной, а должна доказываться, если мы собираемся опираться на эту непрерывность (а часто это совершенно необходимо). Недавно была предложена другая система аксиом как возможное альтернативное логическое основание математики. Она обсуждается в деталях у Соловэя [1970] и в других работах. В ее основе лежит модель теории множеств, которая содержит среди прочего систему Цермело — Френкеля, модифицированную путем включения только счетной аксиомы выбора, т. е. аксиомы, применяемой лишь к счетному набору множеств. В этой модели отсутствуют многие из так называемых патологических особенностей, присущих принятым в настоящее время основаниям теории: каждое множество в $\mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу; линейный оператор, определенный на всем гильбертовом пространстве, всегда ограничен и т. д. Из теоремы Райта [1973] следует, что в этой модели каждый линейный функционал на пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ или $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ пробных функций (и на других пространствах тоже) автоматически будет непрерывным в смысле § 2.4.

В модели Соловэя используются сложные методы современной теории множеств, и она не может быть здесь рассмотрена. Пока еще неизвестно, к чему приведет в различных приложениях замена несчетности на счетность в аксиоме выбора, и поэтому в настоящее время не следует спешить с окончательными выводами относительно модели Соловэя.