Глава 3

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Топология открытых и замкнутых множеств в евклидовом пространстве; покрытия; теоремы Больцано—Вейерштрасса и Гейне—Бореля; принцип стягивания; разбиения единицы; сравнение распределений на произвольном открытом множестве; принцип составления из частей; носитель распределения; производная как локальное свойство.

Предварительные сведения: гл. 2.

Хотя распределение не имеет определенного значения при конкретном значении x своего аргумента, можно рассматривать свойства распределения в любой произвольно малой окрестности x. Такие *локальные* свойства и обсуждаются в этой главе.

3.1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ОТКРЫТЫХ И ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ В $\mathbb{R}^n$

Точка $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ называется *внутренней* точкой множества $\mathbb{S}$, если при некотором достаточно малом $\varepsilon > 0$ шар $B = \{\mathbf{y}: \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| < \varepsilon\}$ с центром в точке $\mathbf{x}$ и радиусом ε лежит в $\mathbb{S}$ (т. е. если каждая точка $\mathbf{y}$ шара B принадлежит $\mathbb{S}$). Множество $\mathbb{S}$ называется *открытым*, если оно состоит из внутренних точек. Например, сам шар B является открытым множеством, потому что если $\mathbf{y}$—любая точка B и $\varepsilon' = \varepsilon - \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|$, то шар $B' = \{\mathbf{z}: \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\| < \varepsilon'\}$ лежит в B (см. рис. 3.1).

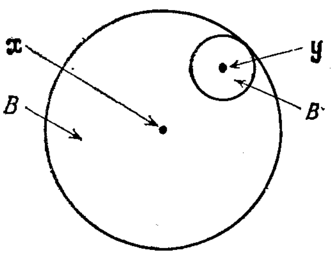

Рис. 3.1. Открытые множества (см. текст).

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Замкнутый шар $B = \{\mathbf{y}: \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon\}$ является замкнутым множеством (в него включены и точки поверхности). Множество $\mathbb{S}$ замкнуто, если его дополнение $\mathbb{R}^n - \mathbb{S}$ открыто, и наоборот. Множество $\mathbb{S}$ вместе со всеми своими предельными точками образует замкнутое множество, которое называется *замыканием* $\mathbb{S}$ и обозначается через $\bar{\mathbb{S}}$. Если $\mathbb{S}$ само замкнуто, то $\bar{\mathbb{S}} = \mathbb{S}$.

Упражнения

1. Покажите, что если $f(\mathrm{x})$ — непрерывная вещественная функция на $\mathbb{R}^n$, то множества

$$\{\mathrm{x}: f(\mathrm{x}) > 0\}, \quad \{\mathrm{x}: f(\mathrm{x}) \neq 0\}, \quad \{\mathrm{x}: a < f(\mathrm{x}) < b\}$$

являются открытыми, тогда как множества

$$\{\mathrm{x}: f(\mathrm{x}) \geqslant 0\}, \quad \{\mathrm{x}: f(\mathrm{x}) = 0\}, \quad \{\mathrm{x}: a \leqslant f(\mathrm{x}) \leqslant b\}$$

замкнуты.

Объединение произвольной совокупности открытых множеств открыто, так же как и пересечение конечного числа открытых множеств. В соответствующих утверждениях о замкнутых множествах слова «произвольная» и «конечное» должны быть переставлены.

2. Докажите предыдущие утверждения и рассмотрите объединения и пересечения следующих совокупностей интервалов на $\mathbb{R}$ (в каждом случае $k = 1, 2, \ldots$):

(1) $|x| < 1 - 1/k$, (2) $|x| \leqslant 1 - 1/k$, (3) $|x| < 1 + 1/k$, (4) $|x| \leqslant 1 + 1/k$.

Для любой функции f замыкание множества $\{\mathrm{x}: f(\mathrm{x}) \neq 0\}$ называется *носителем* f и обозначается через $\operatorname{supp} f$.

Согласно *теореме Больцано — Вейерштрасса*, из любой последовательности $\{\mathrm{x}_j\}_1^\infty$, принадлежащей ограниченному множеству $\mathbb{S}$ из $\mathbb{R}^n$, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность; если $\mathbb{S}$ к тому же замкнуто, то предел этой подпоследовательности принадлежит $\mathbb{S}$.

Для любого множества $\mathbb{S}$ совокупность открытых множеств $\{\Omega, \Omega', \Omega'', \ldots\}$ (она может быть бесконечной или даже несчетной) называется *открытым покрытием* $\mathbb{S}$, если каждая точка x из $\mathbb{S}$ принадлежит хотя бы одному из множеств этой совокупности. Далее, если $\mathbb{S}$ — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, то, согласно *теореме Гейне — Бореля*, из каждого покрытия можно выделить конечную совокупность, которая также покроет $\mathbb{S}$ и которую мы обозначим как $\{\Omega_i: i = 1, \ldots, N\}$; это означает, что каждая точка из $\mathbb{S}$ принадлежит хотя бы одному из множеств Ω_i $(i = 1, \ldots, N)$. (Число N в общем случае зависит для данного множества $\mathbb{S}$ от выбранного открытого покрытия.) По поводу сказанного выше см. книгу Натансона [1950], где, однако, последняя теорема называется *теоремой Бореля о покрытиях*.

[В любом топологическом пространстве множество K называется *компактным*, если оно обладает указанным выше свойством, а именно если из каждого открытого покрытия K можно выделить конечное его покрытие; множество K называется *секвенциально компактным*, если каждая последовательность из K содержит сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит K. Для любого метрического пространства оба эти понятия эквивалентны. В $\mathbb{R}^n$ множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.]

Лемма 1. *Если K — замкнутое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, входящее в открытое множество Ω, то расстояние d от K до дополнения Ω положительно, т. е. в Ω вокруг K имеется окаймление, ширина которого нигде не меньше d.*

Доказательство. Расстояние d определяется так:

$$d = \inf\{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|: \mathbf{x} \in K, \mathbf{y} \notin \Omega\}. \tag{3.1.1}$$

Предположим, что $d=0$. Тогда найдется такая последовательность $\{\mathbf{x}_j\}$ из K, для которой расстояние между K и дополнением к Ω стремится к нулю. Согласно теореме Больцано—Вейерштрасса, из $\{\mathbf{x}_j\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит K и тем самым Ω, но не является внутренней точкой для Ω, однако это противоречит предположению о том, что Ω — открытое множество.

Лемма 2. *Если ограниченное замкнутое множество K лежит в открытом множестве Ω, то всегда найдется такое промежуточное открытое множество Ω', которое также содержит K и замыкание $\overline{\Omega'}$ которого содержится в Ω.*

Доказательство. Множество

$$\Omega' = \{\mathbf{x}: \text{расстояние } (\mathbf{x}, K) < {}^1/_2 d\},$$

где d определено согласно (3.1.1), обладает нужным свойством.

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВ

Если f и g — обычные функции на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{S}$ — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, то утверждение «$f=g$ на $\mathbb{S}$», очевидно, означает, что $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ для каждого $\mathbf{x}$ из $\mathbb{S}$. Если f и g — распределения, то для произвольного множества $\mathbb{S}$ такое утверждение сделать нельзя (в частности, нельзя, когда $\mathbb{S}$ состоит всего из одной точки), но для открытого множества этому утверждению можно придать вполне определенный смысл.

Определение 1. Если f и g — распределения на $\mathbb{R}^n$ и Ω — любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то утверждение «$f=g$ на Ω'» означает, что $\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle$ для каждой пробной функции φ, носитель которой лежит в Ω.

Определение 2. Если f и g — вещественные распределения, то утверждение «$f \geqslant g$ на Ω» означает, что $\langle f, \varphi\rangle \geqslant \langle g, \varphi\rangle$ для каждой неотрицательной пробной функции φ, носитель которой лежит в Ω.

Заметим, что так как носитель любой такой заданной функции φ является замкнутым множеством, а Ω — открытое множество, то, согласно лемме 1 из предыдущего параграфа, в Ω всегда имеется окаймление, отделяющее носитель φ от границы Ω. В предыдущих утверждениях ничего не говорится об f и g на окаймлении, однако каждая точка окаймления принадлежит носителю некоторой другой пробной функции φ, лежащему в Ω.

Уместность приведенных выше определений будет ясна из теорем этой главы; в частности, их согласованность с привычными представлениями об обычных функциях видна из теорем 1 и 2 (см. ниже).

Теорема 1. *Если f и g — непрерывные функции $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$, рассматриваемые как распределения, то $f=g$ на Ω в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда $f(\mathbf{x})=g(\mathbf{x})$ при всех $\mathbf{x}$ из Ω.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости предположим противное, а именно что $f(\mathbf{x}_0)\neq g(\mathbf{x}_0)$ при некотором $\mathbf{x}_0$ из Ω; тогда либо $\operatorname{Re} f(\mathbf{x}_0)\neq \operatorname{Re} g(\mathbf{x}_0)$, либо $\operatorname{Im} f(\mathbf{x}_0)\neq \operatorname{Im} g(\mathbf{x}_0)$; мы будем считать, что верно первое. В этом случае в некоторой окрестности Ω_0 точки $\mathbf{x}_0$ разность $\operatorname{Re} f(\mathbf{x})-\operatorname{Re} g(\mathbf{x})$ не меняет знака; пусть $\varphi(\mathbf{x})$ — пробная функция, которая неотрицательна при всех $\mathbf{x}$, больше нуля при $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ и имеет носитель, лежащий в Ω_0; тогда величина

$$\operatorname{Re}(\varphi,\ f-g)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\mathbf{x})\operatorname{Re}[f(\mathbf{x})-g(\mathbf{x})]\,dx_1\ldots dx_n$$

отлична от нуля, но это противоречит предположению о том, что $f=g$ на Ω.

Теорема 2 (ее доказательство теперь очевидно). *Если f и g — непрерывные вещественные функции, то $f\geqslant g$ на Ω в смысле определения 2 тогда и только тогда, когда $f(\mathbf{x})\geqslant g(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$ из Ω.*

Примеры

Распределение $\delta(x-x_0)$ (а также $\delta'(x-x_0)$, $\delta''(x-x_0)$ и т. д.) на $\mathbb{R}$ равно нулю на любом открытом интервале, не содержащем точку x_0. Далее, $\delta(x-x_0)\geqslant 0$ на любом интервале, тогда как $\delta'(x-x_0)$, $\delta''(x-x_0)$ и т. д. не обладают этим свойством на интервале, содержащем точку x_0.

Чтобы показать, что эти определения имеют действительно локальный характер, нужно доказать, что если Ω — объединение двух или более открытых множеств Ω_1, Ω_2, ..., то $f=g$ на Ω (или $f\geqslant g$ на Ω) тогда и только тогда, когда $f=g$ (или $f\geqslant g$) на каждом Ω_i в отдельности. То, что это не совсем тривиально, видно из рассмотрения двух перекрывающихся множеств Ω_1 и Ω_2. Если φ — пробная функция, носитель которой лежит в $\Omega_1\cup\Omega_2$, но не лежит целиком только в одном из множеств Ω_i (см. рис. 3.2), то для получения равенства $\langle f,\ \varphi\rangle=\langle g,\ \varphi\rangle$ из предположения о том, что $f=g$ на каждом Ω_i, необходимо представить φ как $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — пробные функции, носители которых целиком лежат соответственно в Ω_1 и в Ω_2. Тогда равенство $\langle f,\ \varphi\rangle=$ $=\langle g,\ \varphi\rangle$ будет следовать из того, что $\langle f,\ \varphi_i\rangle=\langle g,\ \varphi_i\rangle$ $(i=1,\ 2)$, в силу линейности функционалов $\langle f, \cdot\rangle$ и $\langle g, \cdot\rangle$. Такие разложения пробных функций и связанные с этим обстоятельства рассматриваются в следующих двух параграфах.

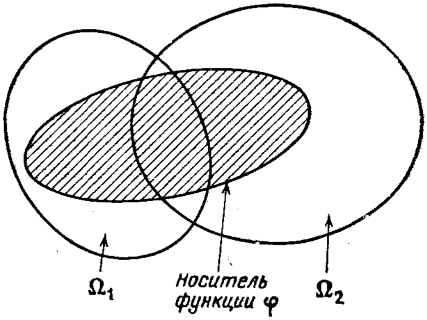

Рис. 3.2. Покрытие компактного множества двумя открытыми множествами.

3.3. ТЕОРЕМА ОБ ОТКРЫТЫХ ПОКРЫТИЯХ

Очевидно, если два открытых множества перекрываются, то они перекрываются краями и эти края всегда можно слегка стянуть без изменения объединения этих множеств: см. рис. 3.3. Это утверждение, обобщенное подходящим образом, будет сейчас доказано.

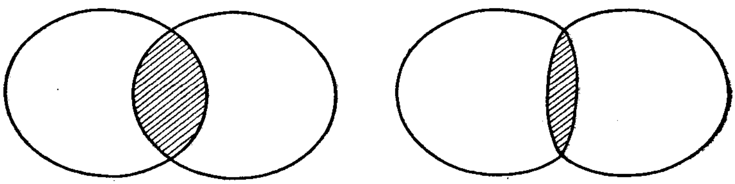

Рис. 3.3. Уменьшение перекрытия. Слева — исходные множества, справа — множества после уменьшения перекрытия.

Теорема 1 (принцип стягивания). *Пусть Z — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ (возможно, все $\mathbb{R}^n$). Пусть $\{\Omega_i\}$ — счетная (т. е. конечная или счетно бесконечная) совокупность открытых ограниченных множеств, которая покрывает Z, т. е. такая, что $Z \subset \bigcup_i \Omega_i$ (см. рис. 3.4). Тогда можно слегка стянуть все множества без того, чтобы получившаяся при этом совокупность перестала быть покрытием Z. Точнее, найдется такая совокупность $\{\Omega_i'\}$ открытых множеств, что замыкание $\overline{\Omega_i'}$ множества Ω_i' содержится в соответствующем Ω_i при каждом i, и при этом $Z \subset \bigcup_i \Omega_i'$.*

Доказательство. Сначала заметим, что пересечение Z с дополнением множества $\bigcup_{i=2}^{\infty} \Omega_i$ (здесь отброшено Ω_1) представляет собой ограниченное замкнутое множество K_1, лежащее в Ω_1. [Множество K_1 — это та часть Z, которая покрывается множеством Ω_1 и только им из всех Ω_i: см. рис. 3.5.] Согласно лемме 2 из § 3.1, найдется открытое множество Ω_1', которое содержит K_1 и замыкание которого лежит в Ω_1. Ясно, что в покрытии Ω_1 можно заменить на Ω_1'.

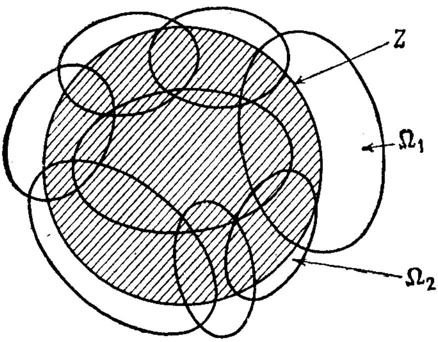

Рис. 3.4. Покрытие компактного множества открытыми множествами.

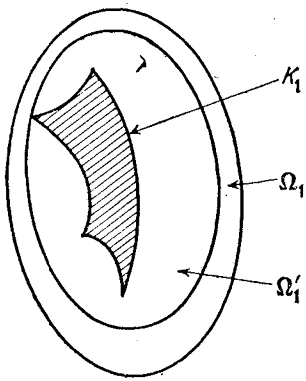

Рис. 3.5. Стягивание Ω_1.

Теперь предположим, что $\{\Omega_1', \ldots, \Omega_{k-1}', \Omega_k, \ldots\}$ — это покрытие, получившееся после стягивания первых $k-1$ открытых множеств. Тогда пересечение Z с дополнением множества $\Omega_1' \cup \ldots \cup \Omega_{k-1}' \cup \Omega_{k+1} \cup \ldots$ (теперь отброшено Ω_k) есть ограниченное замкнутое множество K_k, лежащее в Ω_k; множество Ω_k' строится так же, как и Ω_1'; индукция по k завершает доказательство.

3.4. ТЕОРЕМЫ О ПРОБНЫХ ФУНКЦИЯХ. РАЗБИЕНИЯ ЕДИНИЦЫ

[Теоремы этого параграфа применяются во многих разделах анализа.]

Теорема 1. *Если K — ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, содержащееся в открытом множестве Ω, то найдется такая пробная функция φ (функция из C_0^∞), что* (1) $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ *при* $\mathbf{x} \in K$, (2) *носитель φ лежит в Ω и* (3) $0 \leqslant \varphi(\mathbf{x}) \leqslant 1$ *при всех* $\mathbf{x}$; *см. рис.* 3.6. [Это вариант для C^∞ специального случая леммы Урысона — см. книги Келли [1955] или Трона [1966].]

Доказательство. Положим

$$\delta = {}^1/_3 \cdot (\text{расстояние от } K \text{ до дополнения к } \Omega) = {}^1/_3 \inf \{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|: \mathbf{x} \in K, \mathbf{y} \notin \Omega\}.$$

В силу леммы 1 из § 3.1 $\delta > 0$. Пусть $d(\mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x}$ представляет собой расстояние от $\mathbf{x}$ до дополнения к Ω. Определим функцию f так:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } d(\mathbf{x}) \leqslant \delta, \\ [d(\mathbf{x}) - \delta]/\delta & \text{при } \delta \leqslant d(\mathbf{x}) \leqslant 2\delta, \\ 1 & \text{при } 2\delta \leqslant d(\mathbf{x}) \end{cases}$$

(см. рис. 3.7).

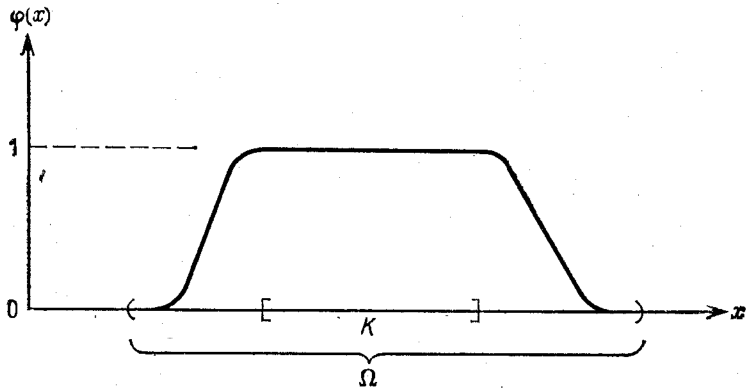

Рис. 3.6. Функция $\varphi(x)$.

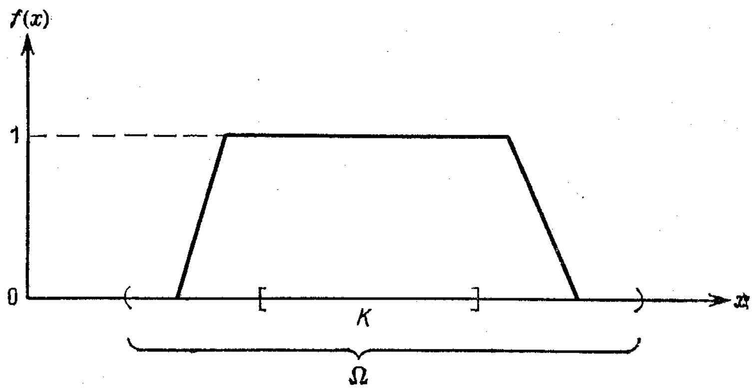

Рис. 3.7. Функция $f(x)$.

Интуитивно ясно, что функция $f(\mathbf{x})$ непрерывна, и доказательство этого является хорошим упражнением. Ясно, что $f(\mathbf{x})$ обладает всеми свойствами, требуемыми от $\varphi(\mathbf{x})$, за исключением того, что ее необходимо сгладить, чтобы она стала функцией класса C^∞. Множитель $1/_3$ в определении δ распределяет поля в области между K и дополнением к Ω так, чтобы сглаживание было возможно без потери других свойств. Проведем сглаживание с помощью сглаживающей функции $\alpha(\mathbf{x})$ из C^∞, выбранной так, что

1) носитель $\alpha(\mathbf{x})$ лежит в шаре $\|\mathbf{x}\| < \delta$;

2) $\int \ldots \int \alpha(\mathbf{x})\, dx_1 \ldots dx_n = 1$;

3) $\alpha(\mathbf{x}) \geqslant 0$ при всех $\mathbf{x}$.

Тогда функция

$$\varphi(x) = \int \ldots \int f(y)\,\alpha(x-y)\,dy_1 \ldots dy_n$$

обладает всеми свойствами, указанными в теореме (см. § 2.6).

Теорема 2. *Пусть $\{\Omega_i\}$ — счетное покрытие пространства $\mathbb{R}^n$ ограниченными открытыми множествами. Предположим, что любая ограниченная область в $\mathbb{R}$ пересекает только конечное число множеств покрытия $\{\Omega_i\}$. [Данное предположение может быть ослаблено, но для наших целей это не дает ничего нового.] Тогда найдется последовательность $\{\alpha_i(x)\}$ таких функций класса C^∞, что (1) при каждом i носитель α_i лежит в Ω_i и (2) при всех x имеет место равенство $\sum_{i\to 1}^{\infty} \alpha_i(x) = 1$. Такая последовательность функций называется разбиением единицы.*

Доказательство. Пусть $\{\Omega_i'\}$ — покрытие, полученное из $\{\Omega_i\}$ стягиванием согласно теореме из предыдущего параграфа. На основании теоремы 1 при каждом i построим функцию $\varphi_i(x)$, которая принадлежит классу C^∞, равна единице на Ω_i', имеет носитель, лежащий в Ω_i, и всюду неотрицательна. Положим

$$\alpha_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\sum_i \varphi_i(x)}.$$

Знаменатель не может обратиться в нуль, потому что $\{\Omega_i'\}$ является покрытием $\mathbb{R}^n$; он содержит только конечное число ненулевых слагаемых в любой ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$, и поэтому $\alpha_i(x)$ принадлежит классу C^∞. Наконец, $\sum \alpha_i(x) = 1$ при всех x по построению.

Теорема 2'. *Пусть $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\}$ — конечное покрытие компактного (т. е. замкнутого ограниченного) множества K в $\mathbb{R}^n$ открытыми множествами. Тогда найдется конечная последовательность $\{\alpha_1(x), \ldots, \alpha_N(x)\}$ таких функций класса C^∞, что (1) при каждом i носитель $\alpha_i(x)$ лежит в Ω_i и (2) при всех $x \in K$ имеет место равенство $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x) = 1$.*

Это простое следствие теоремы 2, получающееся из первоначального предположения об ограниченности множеств Ω_i (что не приводит к потере общности, так как множество K ограничено) и последующего очевидного расширения совокупности $\{\Omega_i\}$ путем добавления ограниченных открытых множеств так, чтобы покрыть все пространство $\mathbb{R}^n$, после чего остается применить теорему 2

3.5. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ

Теорема 1. *Если f и g — распределения на $\mathbb{R}^n$, а Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, то $f = g$ на Ω (в смысле определения 1 из § 3.2) тогда и только тогда, когда $f = g$ в некоторой окрестности (т. е. на открытом множестве) каждой точки из Ω.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Поэтому остается только доказать, что если $f=g$ в окрестности каждой точки и ψ — любая пробная функция, носитель K которой содержится в объединении всех этих окрестностей, то $\langle f, \psi\rangle = \langle g, \psi\rangle$. По теореме Гейне — Бореля K покрывается конечным подмножеством $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_N\}$ таких окрестностей. Пусть $\{\Omega_1', \ldots, \Omega_N'\}$ — покрытие K стянутыми окрестностями, как в теореме 2 из § 3.4, а $\{\alpha_1(\mathbf{x}), \ldots, \alpha_N(\mathbf{x})\}$ — соответствующее разбиение единицы. Тогда при каждом i функция $\alpha_i(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$ является пробной, а ее носитель лежит в Ω_i. Поэтому

$$\langle f-g, \alpha_i\psi\rangle = 0 \quad \forall i;$$

следовательно,

$$\sum_i \langle f-g, \alpha_i\psi\rangle = \langle f-g, \sum_i \alpha_i\psi\rangle = \langle f-g, \psi\rangle = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 $f \geqslant g$ на Ω тогда и только тогда, когда $f \geqslant g$ в некоторой окрестности каждой точки из Ω.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. При этом используется неотрицательность $\alpha_i(\mathbf{x})$.

Упражнения

1. Используя аналогичным образом разбиение единицы, обоснуйте *принцип составления из частей:*

Пусть $\{\Omega_i\}$ — некоторое семейство открытых множеств, объединение которых есть Ω, и пусть $\{f_i\}$ — соответствущее семейство распределений, обладающих тем свойством, что если пересечение Ω_j и Ω_k непусто, то $f_j = f_k$ на $\Omega_j \cap \Omega_k$. Тогда найдется единственное распределение f, такое, что при каждом i будет $f = f_i$ на Ω_i. [Единственность здесь означает, что если f и g — любые два таких распределения, то $f=g$ на Ω. Конечно, в качестве Ω можно взять все $\mathbb{R}^n$.]

2. Если $f=f(\mathbf{x})$ — любое распределение на $\mathbb{R}^n$, а $\alpha=\alpha(\mathbf{x})$ — любая функция класса C^∞ на $\mathbb{R}^n$, то распределение αf было определено в § 2.5. Покажите, что если $\alpha f=0$ (в смысле распределений), а Ω — любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$, на котором функция $\alpha(\mathbf{x})$ отлична от нуля, то $f=0$ на Ω.

Этот результат используется в следующей главе в связи с преобразованием Фурье от периодического распределения.

Упражнение

3. Покажите, что если f и g — распределения на $\mathbb{R}$, Ω — открытое множество и $f=g$ на Ω, то $f'=g'$ на Ω. (Это показывает, что дифференцирование является локальной операцией.) Как будет выглядеть обратное утверждение?

3.6. НОСИТЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Носитель распределения f на $\mathbb{R}^n$, как и носитель непрерывной функции является дополнением наибольшего из всех открытых множеств, на которых $f=0$. Это означает следующее. Рассмотрим объединение $\{\Omega_\alpha\}$ всех открытых множеств (если они существуют), таких, что $f=0$ на каждом Ω_α. Это объединение представляет собой открытое множество Ω, такое, что $f=0$ на Ω, а $\mathbb{R}^n - \Omega$ — *носитель* f.

Упражнение

1. Предположим, что носитель распределения f на вещественной прямой $\mathbb{R}$ состоит всего из одной точки, за которую можно принять $x=0$ Согласно теореме Шварца, приведенной без доказательства в примере 1 из § 2.4, f на интервале $-1 < x < 1$ равняется k-й производной (при некотором k) от непрерывной функции g. Так как $g^{(k)}=0$ на $(-1,0)$ и на $(0,1)$, мы имеем

$$g(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{при } x > 0, \\ p_2(x) & \text{при } x < 0, \end{cases} \tag{3.6.1}$$

где p_1 и p_2 — полиномы степени не выше $k-1$ с одинаковыми свободными членами, равными $g(0)$. (Нетрудно видеть, что f является k-й производной от функции (3.6.1) не только на $(-1,1)$, но и на всей прямой $\mathbb{R}$.) Исходя из этого, покажите, что f равняется конечной линейной комбинации функции $\delta(x)$ и некоторых ее производных.