

Глава 4

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕДЛЕННОГО РОСТА И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Класс \mathcal{S} быстро убывающих на бесконечности пробных функций; распределения медленного роста; рост на бесконечности; распределение медленного роста как производная некоторого порядка от медленно растущей непрерывной функции; преобразование Фурье на пространстве \mathcal{S} ; обращение методом Фейера; преобразование Фурье распределений медленного роста; энергетический спектр бесконечно осциллирующей функции.

Предварительные сведения: гл. 2 и 3; понятие интеграла Фурье.

Распределения медленного роста как функционалы непрерывны относительно чуть более слабой сходимости, чем та, которая описана в § 2.4, и поэтому несколько слабее как класс по сравнению с классом всех распределений Шварца. Эта слабость не носит локального характера (δ -функция и все ее производные—это распределения медленного роста), а отражается в поведении функционалов при $|x| \rightarrow \infty$. Преобразование Фурье распределения медленного роста определяется без труда и также является распределением медленного роста.

4.1. ПРОСТРАНСТВО \mathcal{S}

Если ограничиться классом распределений, имеющих определенную степень слабости (непрерывность относительно вполне определенного типа сходимости в пространстве пробных функций), то область определения функционалов $\langle f, \cdot \rangle$ и т. п. можно без потери непрерывности функционалов расширить до более широкого класса пробных функций. Ослабление распределений расширяет класс допустимых пробных функций. Для распределений медленного роста на \mathbb{R} соответствующий класс пробных функций—это пространство $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, определяемое следующим образом: функции из \mathcal{S} принадлежат классу C^∞ , но не обязательно имеют ограниченный носитель, а вместо этого должны стремиться к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой отрицательной степени x , причем таким же свойством обладают все их производные. Это означает, что функция φ из C^∞ принадлежит \mathcal{S} , если существуют такие постоянные K_{pk} , что

$$|x^p \varphi^{(k)}| < K_{pk} \quad \text{при } p, k = 0, 1, \dots \text{ и при всех } x. \quad (4.1.1)$$

Другими словами, при любых p и k

$$\sup_x |x^p \varphi^{(k)}(x)| < \infty. \quad (4.1.2)$$

Для распределений медленного роста на \mathbb{R}^n пространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ определяется аналогично: последнее неравенство должно быть заменено на следующее:

$$\sup_x \left\{ \|x\|^p \left| \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \varphi(x) \right| \right\} < \infty \quad (4.1.3)$$

при всех p и k . [В обоих случаях супремум в действительности является максимумом: из ограниченности функции $x^{p+1}\varphi^{(k)}$ следует, что $x^p\varphi^{(k)} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$.]

4.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МЕДЛЕННОГО РОСТА

Теперь определим распределения медленного роста на \mathbb{R} (обобщение на случай \mathbb{R}^n будет очевидным).

Определение 1 (сходимость в \mathcal{S}). Если ψ и φ_j ($j = 1, 2, \dots$) — пробные функции (из C_0^∞ или из \mathcal{S}), то $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$, если для всех p и k

$$\sup_x |x^p \{\varphi_j^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)\}| \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty. \quad (4.2.1)$$

Нетрудно видеть, что это эквивалентно следующим двум условиям: (1) существуют такие постоянные K_{pk}^0 , что

$$|x^p \varphi_j^{(k)}(x)| < K_{pk}^0 \quad \text{при } p, k = 0, 1, \dots \text{ и при всех } x, \quad (4.2.2)$$

причем K_{pk}^0 не зависит от j , и (2) при $j \rightarrow \infty$ функции $\varphi_j^{(k)}(x)$ сходятся к $\psi^{(k)}(x)$ равномерно по x на \mathbb{R} для каждого k .

УПРАЖНЕНИЕ

1. Покажите, что эти условия эквивалентны (4.2.1).

Замечание. Легко проверить, что при любых p и k функция

$$\|\varphi\|_{pk} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_x |x^p \varphi^{(k)}(x)| \quad (4.2.3)$$

обладает всеми свойствами нормы. Такие нормы определяют топологию в пространстве \mathcal{S} , и (4.2.1) показывает, что сходимость $\xrightarrow{\mathcal{S}}$ является сходимостью относительно этой топологии, т. е. (4.2.1) эквивалентно тому, что

$$\|\varphi_j - \psi\|_{pk} \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty \text{ для всех } p, k. \quad (4.2.4)$$

Пространство C_0^∞ плотно в \mathcal{S} , т. е. для $\psi \in \mathcal{S}$ найдется такая последовательность $\{\varphi_j\}$ из C_0^∞ , что $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$.

Определение 2. Распределение медленного роста f на \mathbb{R} является линейным функционалом на $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, непрерывным относительно только что указанной сходимости: это означает, что $\langle f, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle$, если $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$.

Из сходимости $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$ для функций из C_0^∞ следует, что $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$, и поэтому если f — распределение медленного роста, то ограничение $\langle f, \cdot \rangle$ на C_0^∞ представляет собой распределение в смысле гл. 2. Приведенное ниже упражнение показывает, что если два распределения медленного роста совпадают на C_0^∞ , то они совпадают и на всем \mathcal{S} . Поэтому распределение медленного роста f можно идентифицировать с его ограничением на C_0^∞ , а распределение f в смысле гл. 2 можно назвать «медленно растущим», если функционал $\langle f, \cdot \rangle$ допускает расширение на \mathcal{S} , непрерывное относительно сходимости в \mathcal{S} .

УПРАЖНЕНИЕ

1. Пусть φ — любая функция из \mathcal{S} , а ψ — такая функция из C_0^∞ , что $\varphi(0) = 1$, и пусть $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x)\psi(\varepsilon x)$. Тогда $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty$. Покажите, что $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и тем самым покажите, что если f — распределение медленного роста, то

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle f, \varphi_\varepsilon \rangle.$$

4.3. РОСТ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Распределения медленного роста характеризуются тем, что они имеют медленный рост на бесконечности. Говорят, что вещественная функция $f(x)$ имеет медленный рост, если существуют такие положительные постоянные X и ρ , что

$$-|x|^\rho \leq f(x) \leq |x|^\rho \quad \text{при } x < -X \text{ и при } x > X.$$

Это утверждение (в котором говорится только, что $|f(x)| \leq |x|^\rho$ при $|x| > X$) сформулировано так, чтобы его обобщение для распределений было вполне понятным, хотя пока в этом утверждении и нет ничего такого, что ассоциировалось бы с распределениями медленного роста. Чтобы сделать такое обобщение, введем f_δ — результат сглаживания распределения f на расстоянии δ под действием оператора сглаживания, как было объяснено в § 2.5. Тогда результат Шварца состоит в том, что f будет распределением медленного роста тогда и только тогда, когда функция $f_\delta(x)$ имеет медленный рост на $\pm \infty$ при каждом положительном δ .

Далее [Шварц, с. 95], f будет распределением медленного роста тогда и только тогда, когда найдутся такие целые положительные p и k , что f является производной порядка p от непрерывной функции $g(x)$, которая есть $O(|x|^k)$ при $x \rightarrow \pm \infty$.

ПРИМЕР 1

Функция e^x не является распределением медленного роста, потому что она слишком быстро возрастает на $+\infty$ и сглаживание не может подавить этот рост. Однако $e^x \cos(e^x)$ — распределение медленного роста. Хотя эта функция и не имеет медленного роста, но ее сглаживание (пусть сколь угодно малое) путем усреднения уменьшает порядок роста из-за взаимного уничтожения положительных и отрицательных вариаций функции при больших положительных x ; отметим, что эта функция является производной от ограниченной функции $\sin(e^x)$.

4.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ НА \mathcal{S}

Пусть функция φ принадлежит множеству $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$. [Здесь также будет ясно, как получается обобщение для пробных функций на \mathbb{R}^n .] Так как $\varphi(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$ быстрее любой отрицательной степени x , ясно, что преобразование Фурье

$$\hat{\varphi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-iyx} dx \quad (4.4.1)$$

существует для всех вещественных y . Аналогично для любого целого $q \geq 0$ интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^q \varphi(x) e^{-iyx} dx = \left(\frac{d}{dy}\right)^q \hat{\varphi}(y) \quad (4.4.2)$$

существует для всех вещественных y . [Указанное дифференцирование функции (4.4.1) может быть выполнено под знаком интеграла, потому что получающаяся при этом подынтегральная функция, которая стоит в (4.4.2), непрерывна и быстро стремится к нулю на бесконечности.] Поэтому функция $\hat{\varphi}(y)$ принадлежит C^∞ по y . Точно так же для любого целого $p \geq 0$

$$\begin{aligned} |(iy)^p \hat{\varphi}(y)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(p)}(x) e^{-iyx} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi^{(p)}(x)| dx < \infty, \end{aligned}$$

т. е. $\hat{\varphi}(y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm \infty$ быстрее любой отрицательной степени y . Наконец,

$$|y^p \hat{\varphi}^q(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x^q \varphi^{(p)}(x)| dx < \infty;$$

следовательно, преобразование Фурье любой функции из \mathcal{S} является функцией из \mathcal{S}' .

Теперь обоснуем известную формулу обращения (4.4.1), а именно

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(y) e^{iyx} dy, \quad (4.4.3)$$

путем модификации метода Фейера (1904 г.) для рядов Фурье. Правая часть последнего равенства равна

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n \hat{\varphi}(y) e^{iyx} \left(1 - \frac{|y|}{n}\right) dy = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x') e^{-iyx'} dx' \right] e^{iyx} \left(1 - \frac{|y|}{n}\right) dy. \end{aligned}$$

Здесь можно изменить порядок интегрирования, потому что модуль подынтегрального выражения интегрируем на указанных интервалах и результат такого интегрирования конечен. Далее

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{iy(x-x')} \left(1 - \frac{|y|}{n}\right) dy = \frac{1 - \cos n(x-x')}{\pi n(x-x')^2}. \quad (4.4.4)$$

Согласно (2.6.5), эти функции сходятся к $\delta(x-x')$ при $n \rightarrow \infty$, откуда и следует (4.4.3).

Итак, преобразование Фурье функций φ , рассматриваемое как оператор, отображает пространство \mathcal{S} пробных функций на себя. Это отображение непрерывно:

Теорема. Если $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$, то $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \hat{\psi}$.

Доказательство. Без потери общности можно положить $\psi = \hat{\psi} = 0$. Тогда доказательство сводится к следующему:

Утверждение 1. Если последовательность $\{\chi_n\}$ такова, что $\chi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, то $\sup_y |\hat{\chi}_n(y)| \rightarrow 0$.

Для доказательства этого вспомним, что, согласно определению сходимости в \mathcal{S} , $\sup_x |x^p \chi_n^{(k)}(x)| \rightarrow 0$. Положив $k=0$, а $p=0$ и 2, получим, что

$$a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sup_x |(1+x^2) \chi_n(x)| \rightarrow 0;$$

поэтому

$$|\hat{\chi}_n(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} \chi_n(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{1+x^2} dx \rightarrow 0.$$

Третий член этой цепочки не зависит от y , откуда и следует утверждение 1.

Утверждение 2. Из предположения $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ вытекает, что при любых p и k также и $x^p \varphi^{(k)}(x) \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$.

Чтобы показать это, продифференцируем l раз функцию $x^p \varphi^{(k)}(x)$ и умножим результат на x^r , считая при этом l и r любыми; тогда получится конечная линейная комбинация членов, равномерно стремящихся к нулю, что и доказывает наше утверждение. Теперь заметим, что $y^k \hat{\varphi}_n^{(p)}(y)$ представляет собой (за исключением множителя i в некоторой степени) преобразование Фурье функции $\chi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^p \varphi^{(k)}(x)$, а последовательность этих функций всегда сходится к нулю в \mathcal{S} согласно утверждению 2. Тогда в силу утверждения 1 $\sup_y |y^k \hat{\varphi}_n^{(p)}(y)| \rightarrow 0$, т. е. $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, что и требовалось доказать.

4.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА

Пусть сначала $f(x)$ будет непрерывной функцией, преобразование Фурье $\hat{f}(y)$ которой существует в обычном смысле и непрерывно (например, f можно взять из \mathcal{S}). Рассматриваемые как распределения f и \hat{f} являются функционалами $\langle f, \varphi \rangle$ и $\langle \hat{f}, \varphi \rangle$ соответственно; связь между ними устанавливается с помощью равенства Парсеваля, одна из форм которого имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(y) e^{iyx} dy dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{iyx} dx \hat{\varphi}(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \hat{\varphi}(y) dy = \\ &= \langle f, \hat{\varphi} \rangle. \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

По аналогии с этим определим и преобразование Фурье распределения медленного роста:

Определение. Если f — любое распределение медленного роста, то его преобразование Фурье \hat{f} представляет собой распределение (функционал), определяемое как $\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$ для всех φ из \mathcal{S} .

Если φ_n ($n=1, 2, \dots$) и ψ — пробные функции и $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$, то $\hat{\varphi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\psi}$, и наоборот согласно теореме из предыдущего параграфа. Но тогда $\langle f, \hat{\varphi}_n \rangle \rightarrow \langle f, \hat{\psi} \rangle$, поскольку f — распределение медленного роста, и поэтому $\langle \hat{f}, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle \hat{f}, \psi \rangle$, откуда следует, что преобразование Фурье распределения медленного роста является распределением медленного роста.

Если преобразование Фурье применить к распределению медленного роста f дважды, то в результате получится распределение $\hat{\hat{f}}$, для которого $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$, так как ясно, что $\hat{\hat{\varphi}}(x) = \varphi(-x)$, и поэтому

$$\langle \hat{\hat{f}}, \varphi \rangle = \langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = \langle f, \hat{\hat{\varphi}} \rangle = \langle f(x), \varphi(-x) \rangle,$$

а последнее выражение равно $\langle f(-x), \varphi(x) \rangle$ согласно правилу замены независимой переменной в распределении — см. § 2.8.

Из приведенного выше определения следует, что если $\hat{f}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{f}$ в смысле сходимости распределений, то $\hat{f}_n \rightarrow \hat{f}$ в том же смысле. Иначе говоря, преобразование Фурье является непрерывным отображением в \mathcal{S}' .

Полная картина для n -мерного случая получается путем очевидного обобщения, начиная с пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ пробных функций, описанного в конце § 4.1. Функция $f(x)$ имеет медленный рост, если она ограничена постоянной плюс $\|x\|^p$ при некотором p . Приведенные в § 4.3 результаты Шварца обобщаются следующим образом:

1. Распределение f на \mathbb{R}^n будет медленно растущим тогда и только тогда, когда $J_\delta f$ — функция медленного роста при каждом $\delta > 0$.

2. Распределение f будет медленно растущим тогда и только тогда, когда оно является частной производной (чистой или смешанной) от некоторой непрерывной функции медленного роста.

Следствие. Если $D^q f$ — любая производная от распределения f , то $D^q f$ будет распределением медленного роста тогда и только тогда, когда этим свойством обладает f .

Вместо (4.4.1) для преобразования Фурье пробной функции будем иметь

$$\hat{\varphi}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-iy \cdot x} dx_1 \dots dx_n.$$

Переменная y в преобразованиях Фурье часто обозначается через k .

Напомним, что для обычных интегралов Фурье порядок, с которым $\hat{f} \rightarrow 0$ на бесконечности, зависит от гладкости f , и обратно. То же самое верно и для распределений, как это видно на примере следующей теоремы:

Теорема. Если f — распределение медленного роста с ограниченным носителем в \mathbb{R}^n , то \hat{f} есть целая аналитическая функция $f(k)$, т. е. аналитическая по каждой компоненте k_j вектора k во всей комплексной плоскости переменной k_j .

Доказательство. Так как f имеет ограниченный носитель, то функционал $\langle f, \varphi \rangle$ вполне определен на любом элементе φ из C^∞ независимо от носителя последнего. Положим

$$e_k(x) = e^{-ik \cdot x}, \quad F(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \langle f, e_k \rangle$$

и покажем, что \hat{f} — это функция $F(k)$, которая, очевидно, аналитична по каждой компоненте вектора k согласно упражнению 2 из § 2.4 о дифференцировании по параметру. Действительно, для любого элемента φ из C_0^∞

$$\int F(k) \varphi(k) d^n k = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int \langle f, e_k \rangle \varphi(k) d^n k.$$

Согласно упражнению 1 об интегрировании по параметру из того же § 2.4, это есть $\langle f, \hat{\varphi} \rangle$, так что $\langle F, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$, и поэтому $F = \hat{f}$, что и требовалось доказать.

Преобразование Фурье на распределениях, не обязательно имеющих медленный рост, определяется у Гельфанда и Шилова в гл. 2 выпуска 1. Результатом преобразования является в общем случае не распределение в смысле Лорана Шварца, а непрерывный линейный функционал на пространстве Z пробных функций, упомянутом в конце § 2.2. Кратко опишем ситуацию для распределений на \mathbb{R} (по поводу распределений на \mathbb{R}^n и других подробностей см. книгу Гельфанда и Шилова). Напомним, что преобразование Фурье отображает класс пробных функций $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ на себя, а $C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R})$ лежит в \mathcal{S} . Поэтому C_0^∞ отображается на некоторое другое подмножество в \mathcal{S} , а именно на пространство $Z = Z(\mathbb{R})$, определяемое следующим образом: функция $\varphi(y) \in Z$, если

- (1) она является целой аналитической функцией от y ;
 (2) найдутся также положительные постоянные a, C_0, C_1, \dots ,
 что

$$|y^q \varphi(y)| \leq C_q e^{a|1m \nu|}, \quad q = 0, 1, 2, \dots, \forall y \in \mathbb{C}.$$

УПРАЖНЕНИЕ.

1. Покажите, что если функция $\varphi(x) \in C_0^\infty$ и носитель $\varphi(x)$ содержится в $[-a, a]$, то ее преобразование Фурье $\hat{\varphi}(y)$ удовлетворяет условиям (1) и (2) при постоянных C_q , выбранных надлежащим образом. Это показывает, что преобразование Фурье отображает C_0^∞ в Z ; то, что при этом и Z отображается в C_0^∞ , доказано у Гельфанда и Шилова.

Сходимость \xrightarrow{Z} пробных функций в Z определяется так, что $\hat{\varphi}_j \xrightarrow{Z} \hat{\varphi}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} \varphi$, после чего класс обобщенных функций определяется как класс непрерывных линейных функционалов на Z , т. е. элементов сопряженного пространства Z' . Теперь при помощи обобщенного равенства Парсеваля $\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle$, которое было использовано для определения преобразования Фурье от распределения, можно установить, что элементы пространства Z' представляют собой преобразования Фурье от элементов пространства \mathcal{D}' , т. е. от распределений в смысле Шварца.

Элементы пространства Z' определены на всей комплексной плоскости, тогда как элементы пространства \mathcal{D}' , рассматриваемые как обобщенные функции, определены только на \mathbb{R} . Гельфанд и Шиллов показывают, например, что преобразование Фурье от функции $f(x) = e^x$ (которая, как отмечалось выше, не является распределением *медленного роста*) есть $2\pi \delta(y - i)$, т. е. функционал на Z , определяемый для любой функции $\varphi(y)$ как

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = 2\pi \varphi(i)$$

(он вполне определен, потому что φ — целая функция). Дальнейшие детали см. у Гельфанда и Шилова.

Примеры нахождения преобразования Фурье от распределений

Пример 1

$$f(x) = \delta(x - x_0); \quad \hat{f}(y) = (2\pi)^{-1/2} e^{-iyx_0}.$$

Доказательство. Для любой пробной функции φ

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}, \varphi \rangle &= \langle f, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{-iyx_0} dy = \\ &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iyx_0}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2

$$f(x) = \delta'(x - x_0); \quad \hat{f}(y) = (2\pi)^{-1/2} i y e^{-iyx_0}.$$

ПРИМЕР 3

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n; \quad \hat{f}(y) = \sqrt{2\pi} [a_0 \delta(y) + i a_1 \delta'(y) + \dots + i^n a_n \delta^{(n)}(y)].$$

ПРИМЕР 4

Пусть $f(x)$ — периодическая функция, заданная сходящимся рядом Фурье $\sum_p c_p e^{ipx}$; тогда $\hat{f}(y) = \sqrt{2\pi} \sum_p c_p \delta(y - p)$.

ПРИМЕР 5

Пусть $f(x)$ — распределение с периодом 2π , т. е. $f(x)$ и $f(x + 2\pi)$ — это одно и то же распределение. [В этом случае $f(x)$ автоматически имеет медленный рост согласно теореме Шварца о порядке роста — см. § 4.3.] Тогда для любой пробной функции φ

$$\begin{aligned} \langle \hat{f}(y), \varphi(y) \rangle &= \langle f(x), \hat{\varphi}(x) \rangle = \langle f(x + 2\pi), \hat{\varphi}(x) \rangle = \\ &= \langle f(x), \hat{\varphi}(x - 2\pi) \rangle; \end{aligned}$$

но $\hat{\varphi}(x - 2\pi)$ — преобразование Фурье от $e^{2\pi i y} \varphi(y)$, так что

$$\langle \hat{f}(y), \varphi(y) \rangle = \langle \hat{f}(y), e^{2\pi i y} \varphi(y) \rangle$$

для всех φ из \mathcal{S} , т. е. $(1 - e^{2\pi i y}) \hat{f}(y)$ обращается в нуль как распределение. Тогда в силу упражнения 2 из § 3.5 $\hat{f} = 0$ в области Ω , где Ω — вещественная ось с выколотыми точками $y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, т. е. распределение \hat{f} сосредоточено в целых точках. Поэтому, согласно упражнению из § 3.6, \hat{f} в такой точке k является линейной комбинацией $\delta(x - k)$ и некоторых ее производных. Однако приведенное ниже упражнение 2 показывает, что в действительности производные не входят в эту комбинацию, и поэтому \hat{f} записывается как

$$\hat{f}(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(y - k), \quad (4.5.2)$$

Таков общий вид преобразования Фурье от периодического распределения.

УПРАЖНЕНИЯ

2. Используя упражнение из § 3.6, сначала представьте $\hat{f}(y)$ как

$$\hat{f}(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{J_k} e_{kj} \delta^{(j)}(y - k),$$

затем покажите, что так как $\hat{f}(y)$ — распределение медленного роста, то найдется такое целое p , для которого $J_k \leq p$ при всех k . Наконец, используя периодичность \hat{f} , покажите, что $p = 0$.

3. Покажите, что, так как $\hat{f}(y)$ — распределение медленного роста, коэффициенты c_k в (4.5.2) не могут расти быстрее, чем некоторая степень $|k|$ при $k \rightarrow \pm \infty$.

4. Найдите распределение, преобразованием Фурье которого является

$$\hat{f}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) \delta'(y - k),$$

и обобщите этот результат.

4.6. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР

Пусть $f(t)$ — ограниченная непрерывная функция, которая осциллирует более или менее нерегулярно при всех t , $t \in (-\infty, \infty)$; ее можно представить себе как одну из компонент электрического поля в некоторой точке пространства при прохождении излучения от источника света или как компоненту скорости в некоторой точке турбулентного течения. (Тогда $f(t)$ имеет вещественные значения, но это обстоятельство несущественно.) Ясно, что функцию $f(t)$ нельзя представить ни в виде классического ряда Фурье, поскольку она не является периодической, ни в виде классического интеграла Фурье, поскольку она не является квадратично интегрируемой, но она представляет собой распределение медленного роста и поэтому имеет преобразование Фурье $\hat{f} = \hat{f}(\omega)$, которое, как нетрудно увидеть, является второй производной $F''(\omega)$ в смысле распределений от непрерывной функции

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{t^2} \left(-e^{-i\omega t} + \frac{1-i\omega t}{1+t^2} \right) dt. \quad (4.6.1)$$

Действительно, сначала можно элементарно проверить, что функция $F(\omega)$ даже непрерывна по Липшицу; далее, для любой пробной функции φ

$$\langle F'', \varphi \rangle = \langle F, \varphi'' \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \varphi''(\omega) d\omega;$$

подставляя (4.6.1) вместо F и дважды интегрируя по частям относительно ω , получаем $\langle f, \hat{\varphi} \rangle$, но это и означает, что $F'' = \hat{f}$.

Мы хотим определить, как интенсивность или энергия, связанная с функцией $f(t)$, распределяется по частоте ω , т. е. определить спектр $f(t)$. Чтобы это понятие имело смысл, мы должны предположить, что статистические свойства $f(t)$ на больших временных интервалах вполне определены. В частности, предположим, что автоковариационная функция

$$R(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{f(t+\tau)} f(t) dt \quad (4.6.2)$$

существует для всех τ (тогда отношение $R(\tau)/R(0)$ есть автокорреляция $f(t)$ для временной разности τ).

Предположим далее, что сходимость в (4.6.2) равномерна по τ в любом конечном интервале, т. е. что $R(\tau)$ — непрерывная функция. Некоторые следствия из этих предположений указываются в приводимых ниже примерах. Нетрудно показать, что $R(\tau)$

может быть представлена также как

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{f(t+s+\tau)} f(t+s) dt \quad (4.6.3)$$

при любом вещественном s ; иначе говоря, если статистические свойства на больших временных интервалах вполне определены в целом, то они не меняются при сдвиге функции $f(t)$ вперед или назад по времени. Отметим, что $R(-\tau) = \overline{R(\tau)}$. Из неравенства Шварца следует, что $|R(\tau)| \leq R(0)$.

Если мы предположим, что $f(t)$ — это приложенное к нагрузке с единичным сопротивлением напряжение, то $R(0)$ будет усредненным по времени выделением энергии на нагрузке. Будем искать неубывающую функцию $S(\omega)$, называемую *энергетическим спектром* $f(t)$, такую, что при $\omega_2 > \omega_1$ разность $S(\omega_2) - S(\omega_1)$ есть энергия, относящаяся к частотам из интервала (ω_1, ω_2) . Если такую функцию удастся найти, то ее скачки соответствуют спектральным линиям, а значение $S'(\omega)$ там, где эта производная существует в обычном смысле, является интенсивностью непрерывного спектра на частоте ω .

Образно говоря, $S(\omega)$ получается путем включения электрического фильтра между источником и нагрузкой, как показано схематически на рис. 4.1. (Предполагается, что источник имеет

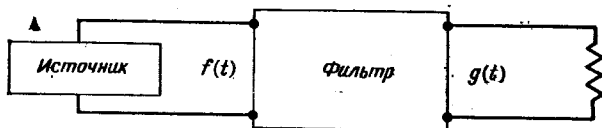


Рис. 4.1. Схема контура,

бесконечный импеданс, вследствие чего сигнал $f(t)$ не должен меняться из-за наличия фильтра.) Пусть передаточная характеристика фильтра задается (в общем случае комплекснозначной) функцией $\psi(\omega)$: если на вход фильтра подано единичное синусоидальное напряжение с частотой ω , то $\psi(\omega)$ дает амплитуду и фазу на выходе. Для идеального полосового фильтра, т. е. когда $|\psi(\omega)| = 1$ при $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$ и $\psi(\omega) = 0$ в противном случае, выделение энергии на нагрузке должно равняться $S(\omega_2) - S(\omega_1)$. С другой стороны, эта величина равна интегралу Стилтеса

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 dS(\omega), \quad (4.6.4)$$

потому что $|\psi(\omega)|^2$ — коэффициент затухания энергии для фильтра на частоте ω . Следовательно, $S(\omega)$ нужно выбрать так, чтобы для любой пробной функции $\psi(\omega)$ последний интеграл был равен

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt. \quad (4.6.5)$$

где $g(t)$ — напряжение на выходе фильтра (см. рис. 4.1).

Мы утверждаем, что $S(\omega)$ имеет вид

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \frac{e^{i\omega\tau} - 1}{2\pi i \tau} d\tau. \quad (4.6.6)$$

Это основная формула для энергетического спектра функции $f(t)$. Она широко используется в гидродинамике, эргодической теории, статистической физике и теории динамических систем. В теории турбулентности она применяется, например, для выражения зависимости компоненты скорости от декартовой координаты при заданном значении времени, и компонента эта обозначается тогда через $v(x)$ вместо $f(t)$; в этом случае $R(\tau)$ является уже пространственной, а не временной корреляцией.

Функция $R(\tau)$ хотя и ограничена, но в общем случае не стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, как показывают простые примеры $f(t) = c$ и $f(t) = \sin t$; следовательно, сходимость последнего интеграла априори не очевидна; она была установлена Норбертом Винером в 1926 г. при очень общих предположениях (Винер [1930]). Иногда, как в приводимом ниже примере 3 (когда одна из частот ω_n оказывается равной нулю), равенство (4.6.6) можно интерпретировать как

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T R(\tau) \frac{e^{i\omega\tau} - 1}{2\pi i \tau} d\tau. \quad (4.6.7)$$

В дальнейшем будем считать выражение в правой части (4.6.7) обычной функцией.

Чтобы вывести формулу для $S(\omega)$ из (4.6.4) и (4.6.5), нам нужно знать напряжение $g(t)$ на выходе фильтра. Ясно, что $g(t)$ — это функция, преобразование Фурье которой представляет собой $\hat{f}(\omega)\psi(\omega)$. Поэтому

$$\langle \hat{g}, \varphi \rangle = \langle \hat{f}\psi, \varphi \rangle = \langle \hat{f}, \psi\varphi \rangle = \langle f, \widehat{\psi\varphi} \rangle$$

для любой пробной функции φ . Преобразование Фурье от произведения $\psi\varphi$ является сверткой преобразований Фурье $\hat{\psi}$ и $\hat{\varphi}$, т. е.

$$\widehat{\psi\varphi}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(s-t) \hat{\varphi}(t) dt. \quad (4.6.8)$$

Поэтому

$$\langle g, \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{g}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(s-t) \hat{\varphi}(t) dt ds,$$

откуда видно, что

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(s) \hat{\psi}(s-t) ds = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t+s) \hat{\psi}(s) ds. \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

Эта формула показывает, как фильтр преобразует сигнал $f(t)$ в $g(t)$; интерпретация функции $\hat{\psi}(t)$, которая входит в (4.6.9), будет рассмотрена ниже.

Из формулы для $g(t)$ находим, что

$$\int_{-T}^T |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T dt \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t+s')} \overline{\hat{\psi}(s')} ds' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t+s) \hat{\psi}(s) ds.$$

При фиксированном s в качестве новой переменной вместо s' возьмем $\tau = s' - s$, разделим обе части равенства на 2π и устремим T к бесконечности; равномерная сходимость выражения (4.6.3) для автоковариационной функции позволяет совершить предельный переход под знаком интеграла, и поэтому

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \overline{\hat{\psi}(s+\tau)} \hat{\psi}(s) ds d\tau.$$

Снова используем связь между преобразованием Фурье и сверткой в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(s+\tau)} \hat{\psi}(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega$$

и получим

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 e^{i\omega\tau} d\omega d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 d\omega \left(\frac{e^{i\omega\tau} - 1}{i\tau} \right) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 dS(\omega) \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

в предположении, что сходимость в (4.6.7) равномерна относительно ω .

Наконец, из неотрицательности левой части (4.6.10) видно, что $S(\omega)$ — неубывающая вещественная функция.

ПРИМЕРЫ

В некоторых из этих примеров удобно считать функцию $f(t)$ лишь кусочно непрерывной; на теории это не отражается, а на самом деле Винер рассматривал еще более широкий класс функций. Читатель при желании может без труда сгладить разрывы $f(t)$.

ПРИМЕР 1

Пусть $f(t) = 1$ при $1 \leq |t| \leq 2$, $4 \leq |t| \leq 8$, $16 \leq |t| \leq 32$ и т. д. и обращается в нуль в противном случае. Тогда величина

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t+\tau) f(t) dt$$

при $T \rightarrow \infty$ осциллирует между $\approx \frac{1}{3}$ и $\approx \frac{2}{3}$; поэтому при $T \rightarrow \infty$ и любом τ предел в (4.6.2) не существует. Статистические свойства $f(t)$ на больших временных интервалах не являются вполне определенными.

ПРИМЕР 2

Пусть $f(t) = e^{it^2}$. Здесь $R(0) = 1$, тогда как $R(\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$. Таким образом, $R(\tau)$ не является непрерывной, как это нам требуется, и $S(\omega) \equiv 0$. Грубо говоря, вследствие быстрых осцилляций функции e^{it^2} при больших t здесь вся энергия приходится на бесконечные частоты. Аналогично ведут себя функции $\sin t^2$ и $\cos t^2$.

ПРИМЕР 3

Пусть $f(t)$ — почти периодическая функция. Тогда ее можно представить в виде ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}, \quad (4.6.11)$$

где ω_n — вещественные, а c_n — комплексные постоянные; этот ряд сходится к $f(t)$ по норме $\|f\|$, порождаемой скалярным произведением

$$(f, g) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \overline{f(t)} g(t) dt; \quad (4.6.12)$$

коэффициенты c_n удовлетворяют равенству Парсеваля

$$\sum |c_n|^2 = \|f\|^2 = R(0)$$

(Рисс и Секефальви-Надь [1953]). Отметим, что $\|f\|$ — это не обычная L^2 -норма на \mathbb{R} из-за множителя $1/(2T)$ в (4.6.12). Для простоты будем считать $f(t)$ таковой, что ряд (4.6.11) сходится абсолютно. Тогда

$$R(\tau) = \sum |c_n|^2 e^{i\omega_n \tau} \quad (4.6.13)$$

и из (4.6.7) нетрудно видеть, что

$$S(\omega) = \text{const} + \sum_{\omega_n < \omega} |c_n|^2. \quad (4.6.14)$$

(При этом предполагается, что ω отличается от всех ω_n ; если $\omega = \omega_m$ при некотором m , то к правой части (4.6.14) нужно прибавить $1/2 |c_m|^2$.) Следовательно, функция $f(t)$ имеет чисто линейчатый спектр; линия с частотой ω_n имеет интенсивность $|c_n|^2$.

Этот пример включает случай периодической функции, когда ω_n являются целыми кратными некоторой основной частоты и (4.6.11) представляет собой обычный ряд Фурье.

ПРИМЕР 4

Предположим, что функция $f(t)$ задана в виде обычного интеграла Фурье

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где f и \hat{f} — квадратично интегрируемые обычные функции. Нетрудно видеть, что в этом случае $R(0) = 0$, так что $R(\tau) \equiv 0$. Функция $f(t)$ соответствует конечной энергии, но когда эта энергия усредняется по всем значениям времени, средняя энергия оказывается равной нулю.

ПРИМЕР 5

Можно предположить, что интеграл Фурье — Стильтеса

$$f(t) = \int e^{i\omega t} d\sigma(\omega), \quad (4.6.15)$$

где $\sigma(\omega)$ — функция ограниченной вариации, будет подходящим обобщением рядов Фурье и интегралов Фурье, но и здесь опять получается лишь линейчатый спектр с линиями на тех частотах ω (если они существуют), где $\sigma(\omega)$ имеет разрывы. Преобразование Фурье от (4.6.15) — это первая производная от обычной функции $\sigma(\omega)$, и мы уже видели, что преобразование от интересующей нас функции есть *вторая* производная в смысле распределений от обычной функции $F(\omega)$, определенной в (4.6.1).

ПРИМЕР 6

Теперь опишем функцию $f(t)$, предложенную Винером, которая имеет непрерывный спектр. Она принимает только значения ± 1 и постоянна на каждом интервале между двумя последовательными целыми точками. На любой цепочке из m таких интервалов $f(t)$ может быть описана последовательностью m знаков «+» или «-», которую мы назовем *шаблоном* длины m . Функция строится так, что если число N_1 показывает, сколько раз данный такой шаблон встретится на интервале длины N (считается, что $N \gg m$), то

$$\frac{N_1}{N} \rightarrow 2^{-m} \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Можно сказать, что асимптотически появление любого из 2^m шаблонов длины m равновероятно. Теперь рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t+\tau) f(t) dt,$$

где τ — отличное от нуля целое число. Вклад интервала $n < t < n+1$ в этот интеграл равен ± 1 в зависимости от того, одинаковые или противоположные знаки имеет шаблон длины $\tau+1$ для $f(t)$ на концах своего интервала $n < t < n+\tau+1$. Так как оба эти случая равновероятны, мы видим, полагая $T \rightarrow \infty$,

что $R(\tau) = 0$, если τ — отличное от нуля целое число. Ясно, что $R(0) = 1$, и нетрудно видеть, что $R(\tau)$ меняется линейно при изменении τ между последовательными целыми числами. Поэтому

$$R(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & \text{при } |\tau| < 1, \\ 0 & \text{при всех прочих } \tau, \end{cases} \quad (4.6.16)$$

откуда с учетом (4.6.6) находим, что

$$S(\omega) = \int_0^1 (1 - \tau) \frac{\sin \omega \tau}{\pi \tau} d\tau. \quad (4.6.17)$$

Таким образом, в этом случае спектр непрерывен и плотность спектра равна

$$S'(\omega) = \frac{1 - \cos \omega}{\pi \omega^2}. \quad (4.6.18)$$

Осталось построить функцию $f(t)$, что мы и сделаем для $t > 0$, имея в виду, что $f(-t) = f(t)$. Последовательность знаков для $f(t)$ при $t > 0$ такова:

$$\begin{aligned} &+, -; \\ &+, +, +, -, -, +, - (этот набор повторяется 2 раза); \\ &+, +, +, +, +, -, +, -, -, -, -, +, +, -, -, -, - (этот \\ &\hspace{10em} \text{набор повторяется 4 раза);} \\ &+, +, +, +, +, +, +, - \text{ и т. д. (этот набор повторяется 8 раз);} \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.6.19)$$

Запятые здесь служат лишь для разделения групп знаков с целью облегчить понимание дальнейшего. Теперь рассмотрим шаблоны длины m и возьмем строку указанной схемы, в которой расстояние между запятыми много больше m ; среди шаблонов, внутрь которых не попадает запятая, все шаблоны длины m встречаются одинаково часто, а вероятность встретить такой шаблон с запятой внутри стремится к нулю с ростом расстояния между запятыми. Далее, вследствие повторений каждая строка схемы мажорирует все предыдущие строки, откуда и видно, что $f(t)$ обладает требуемыми свойствами.

Значение этого примера не зависит от некоторой искусственности схемы (4.6.19). Если последовательность знаков «+» и «-» определяется некоторым физическим процессом, т. е. полностью случайным образом, то получается тот же самый непрерывный спектр (4.6.17) с плотностью (4.6.18). По-видимому, излучение нагретого тела и белый шум имеют такой общий характер.

Наконец, следует упомянуть другой пример, приведенный Винером [1930] со ссылкой на К. Малера, в котором появляется так называемый сингулярный непрерывный спектр (мы опускаем его описание, поскольку оно довольно длинное). Напомним, что неубывающая функция $S(\omega)$ может быть представлена в виде суммы трех слагаемых: функции скачков со счетным числом последних, абсолютно непрерывной функции и непрерывной функции, имеющей равную нулю производную почти всюду, как функция Кантора, о которой пойдет речь в гл. 13. Первое слагаемое дает линейчатый спектр, второе — непрерывный спектр в обычном физическом смысле, а третье — сингулярный непрерывный

ный спектр, который обычно не встречается в физических задачах, хотя пример Малера и показывает, что в принципе он возможен.

Входящая в (4.6.9) функция $\hat{\psi}(t)$ представляет собой отклик фильтра на единичный импульс $\delta(t)$, поданный в момент $t=0$. Независимо от принципа работы фильтра по соображениям причинности функция $\hat{\psi}(t)$ должна обращаться в нуль при $t < 0$. Однако это не накладывает существенного ограничения на наши рассуждения. Если $\hat{\psi}_1$ — любая функция из C_0^∞ , являющаяся преобразованием Фурье от функции $\psi_1(\omega)$, то для некоторого вещественного a преобразование Фурье от функции $\psi(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\omega a} \psi_1(\omega)$ имеет носитель на полуоси $t \geq 0$ и поэтому удовлетворяет условию причинности. Следовательно, так как $|\psi(\omega)|^2 = |\psi_1(\omega)|^2$, функцию $|\psi(\omega)|^2$ в (4.6.4) можно рассматривать как произвольную неотрицательную пробную функцию, преобразование Фурье которой принадлежит C_0^∞ .