Глава 5

ПРОСТРАНСТВА L^2

Сходимость в среднем; квадратично интегрируемые функции и распределения и их свойства; пространства типа L^2, L^1, L^p, L^∞, L^2_0; преобразования Фурье и операторы сглаживания в пространствах L^2; пространства Соболева; граничные значения в пространствах Соболева.

Предварительные сведения: гл. 1—4.

Сочетание понятий гильбертова пространства, распределения и сходимости в среднем приводит к построению функциональных пространств, удобных для исследования дифференциальных операторов. С точки зрения квантовой механики элементы или «точки» таких пространств являются волновыми функциями, которые представляют состояния физической системы.

5.1. СХОДИМОСТЬ В СРЕДНЕМ. ПОЛНОТА СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

Сначала мы опишем несколько известных примеров сходимости в среднем. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом 2π. Ее коэффициентами Фурье являются

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \tag{5.1.1}$$

обозначим через $S_m(x)$ m-ю частную сумму ряда Фурье функции $f(x)$:

$$S_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}. \tag{5.1.2}$$

Функции $S_m(x)$ *сходятся* к $f(x)$ *в* L^2, или *в среднем*; это означает, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_m(x) - f(x)|^2\, dx \to 0 \quad \text{при } m \to \infty. \tag{5.1.3}$$

Позднее в этой главе мы увидим, что это верно и для значительно более широкого класса периодических функций $f(x)$, в то время как если даже $f(x)$ непрерывна, поточечная сходимость $S_m(x) \to f(x)$ при каждом x не может быть доказана без некоторых дополнительных предположений об $f(x)$, например, таких, как требование ограниченной вариации.

Рассмотрим более общий случай. Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция, периодическая по каждой переменной $x_1, \ldots, x_n$ с периодом 2π, и пусть $\mathbf{k}$ — вектор с целыми компонентами $k_1, \ldots, k_n$; тогда коэффициентами Фурье функции $f(\mathbf{x})$ являются числа

$$c_{\mathbf{k}} = (2\pi)^{-n} \int f(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n \mathbf{x}; \tag{5.1.4}$$

интегрирование здесь осуществляется по кубу

$$K = \{\mathbf{x}\colon |x_i| \leqslant \pi,\ i = 1, \ldots, n\}. \tag{5.1.5}$$

Обозначим m-ю частную сумму многомерного ряда Фурье функции $f(\mathbf{x})$ через

$$S_m(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in L_m} c_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{5.1.6}$$

где L_m — множество узлов целочисленной решетки куба с длиной ребра $2m$ в n-мерном пространстве векторов $\mathbf{k}$

$$L_m = \{\mathbf{k}\colon k_i = -m, \ldots, +m,\ i = 1, \ldots, n\}; \tag{5.1.7}$$

тогда

$$\int\limits_K |S_m(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^2 d^n\mathbf{x} \to 0 \text{ при } m \to \infty. \tag{5.1.8}$$

Более общие разложения по ортогональным системам функций (частным случаем которых являются разложения в ряды Фурье) также сходятся в среднем. Рассмотрим системы полиномов одной переменной. Пусть $\rho(x)$ — положительная непрерывная весовая функция на конечном интервале $[a, b]$; предположим, что $\{p_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — соответствующая ортонормированная система полиномов, т. е.

$$\int\limits_a^b p_k(x)\, p_l(x)\, \rho(x)\, dx = \delta_{kl}, \tag{5.1.9}$$

и для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ $p_k(x)$ — полином степени k.

[Напоминаем, что $p_k(x)$ можно построить с помощью ортонормирующей процедуры Грама — Шмидта (§ 1.6) из семейства полиномов $1, x, x^2, \ldots$, используя при этом скалярное произведение (p_k, p_l), задаваемое левой частью равенства (5.1.9). Это построение можно выполнять и в случае открытого или даже бесконечного интервала (a, b), если только $\int\limits_a^b \rho(x)\, dx$ конечен. Именно так можно получить известные семейства полиномов Лежандра, Эрмита, Лагерра, Чебышева и т. д. В дальнейшем, однако, мы ограничимся случаем непрерывной весовой функции $\rho(x)$ на конечном замкнутом интервале $[a, b]$.]

В этом случае обобщенные коэффициенты Фурье выглядят так:

$$c_k = \int_a^b p_k(x) f(x) \rho(x)\, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (5.1.10)$$

а частные суммы *обобщенного ряда Фурье*—так:

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k p_k(x); \qquad (5.1.11)$$

тогда

$$\int_a^b |S_m(x) - f(x)|^2 \rho(x)\, dx \to 0 \quad \text{при } m \to \infty. \qquad (5.1.12)$$

Наметим доказательство сходимости в среднем обобщенного ряда Фурье непрерывной функции. В нашем распоряжении сейчас $\boldsymbol{R}$—компактная область изменения независимой переменной x или $\mathbf{x}$ (интервал или куб), весовая функция ρ, скалярное произведение вида

$$(f, g) = \int_{\boldsymbol{R}} \overline{f(\mathbf{x})}\, g(\mathbf{x})\, \rho(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} \qquad (5.1.13)$$

и соответствующая норма $\|f\| = (f, f)^{1/2}$ функционального пространства, а также ортонормированная система $\{\varphi_k\}$. В полиномиальном случае $\varphi_k(x) = p_k(x)$; в случае ряда Фурье весовая функция $\rho(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n}$, а $\varphi_k(\mathbf{x})$ соответствует одной из функций $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ после надлежащей их нумерации. Сходимость в среднем означает сходимость по норме $\|f\|$; следовательно, нужно доказать, что ортонормированное семейство $\{\varphi_k\}$ полно в смысле § 1.6.

Прежде всего покажем, что произвольную непрерывную функцию $f(\mathbf{x})$ можно сколь угодно точно аппроксимировать равномерно на области $\boldsymbol{R}$ конечной линейной комбинацией функций φ_k. Для этого используется *аппроксимационная теорема Вейерштрасса* (см. Курант и Гильберт, т. 1): если функция $F(\mathbf{X})$ непрерывна на компактном (т. е. замкнутом ограниченном) множестве S в N-мерном пространстве, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой полином $P(\mathbf{X})$, что

$$|F(\mathbf{X}) - P(\mathbf{X})| < \varepsilon \quad \forall \mathbf{X} \in S.$$

Рассмотрим сначала задачу о разложении по ортогональным полиномам $\{\varphi_k(x)\}$; здесь S—интервал $[a, b]$ вещественной оси, $X = x$, а $F(X) = f(x)$. Полином $P(x)$ является линейной комбинацией $1, x, x^2, \ldots, x^q$, где q—степень $P(x)$; каждое x^k можно записать как линейную комбинацию функций $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_k(x)$ и поэтому $P(x)$ можно представить в виде

$$P(x) = \sum_{j=0}^{q} a_j \varphi_j(x).$$

Рассмотрим теперь одномерные ряды Фурье; положим $X=\cos x$, $Y=\sin x$. Равенство $F(X, Y)=f(x)$ определяет функцию F на единичной окружности $S=\{X, Y\colon X^2+Y^2=1\}$; S — компактное множество в плоскости X, Y. Соответствующий полином $P(X, Y)$ является полиномом по $\cos x$ и $\sin x$, а значит, и по e^{ix} и e^{-ix}, т. е. является линейной комбинацией e^{ikx}:

$$P(X, Y)=\sum_{k=-q}^{q} a_k e^{ikx}.$$

Наконец, в случае n-мерных рядов Фурье единичную окружность нужно заменить n-мерным тором, а именно если записать

$$e^{ix_k}=X_{2k-1}+iX_{2k} \quad (k=1, \ldots, n),$$

то равенство $f(\mathbf{x})=F(\mathbf{X})$, где $\mathbf{X}$ есть $2n$-мерный вектор, определит функцию F на торе

$$S=\{\mathbf{X}\colon X_1^2+X_2^2=1, \ldots, X_{2n-1}^2+X_{2n}^2=1\},$$

который является компактным множеством в $\mathbb{R}^{2n}$. Соответствующий полином $P(\mathbf{X})$ или $P(X_1, \ldots, X_{2n})$ представляет собой полином по $e^{\pm ix_1}$, $e^{\pm ix_2}$ и т. д.; следовательно, его можно записать в виде

$$\sum_{\mathbf{k}\in L_q} a_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

для некоторого целого q.

Итак, в каждом случае было показано, что если $f(\mathbf{x})$ непрерывна на области $R\subset\mathbb{R}^n$ и $\varepsilon>0$, то для некоторого q и некоторых коэффициентов a_j

$$\left|f(\mathbf{x})-\sum_{j=0}^{q} a_j\varphi_j(\mathbf{x})\right|<\varepsilon \quad \text{для всех } \mathbf{x} \text{ из } R. \tag{5.1.14}$$

Поэтому

$$\int_R \left|f(\mathbf{x})-\sum_{j=0}^{q} a_j\varphi_j(\mathbf{x})\right|^2 \rho(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x}\leqslant \varepsilon^2 M,$$

где

$$M=\int_R \rho(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x};$$

иначе говоря,

$$\|f-\sum a_j\varphi_j\|\leqslant\varepsilon\sqrt{M}, \tag{5.1.15}$$

где $\|\cdot\|$ означает норму, соответствующую скалярному произведению (5.1.13), относительно которого φ_j образуют ортонормированную систему.

Числа a_j не обязательно равны обобщенным коэффициентам Фурье

$$c_j = (\varphi_j, f), \tag{5.1.16}$$

однако можно показать, что *наилучшее* приближение в среднем функции f выражениями вида $\sum_{j=0}^{q} a_j\varphi_j$ для данного q получается при $a_j = c_j$ $(j = 0, \ldots, q)$. Действительно, если мы минимизируем

$$\|f - \sum a_j\varphi_j\|^2 = \|f\|^2 - \sum(\bar{a}_j c_j + a_j\bar{c}_j) + \sum |a_j|^2$$

относительно $\operatorname{Re} a_j$ и $\operatorname{Im} a_j$, то получим $\operatorname{Re} a_j = \operatorname{Re} c_j$ и $\operatorname{Im} a_j = \operatorname{Im} c_j$ $(j = 0, \ldots, q)$. Замена a_j на c_j улучшает аппроксимацию в среднем (5.1.15) (возможно, ценой ухудшения равномерной аппроксимации (5.1.14)). Следовательно, для данного $\varepsilon > 0$ достаточно большого q

$$\left\|f - \sum_{j=0}^{q} c_j\varphi_j\right\| \leqslant \varepsilon\sqrt{M};$$

значит, обобщенный ряд Фурье $\sum_{j=0}^{\infty} c_j\varphi_j(\mathbf{x})$ сходится в среднем, т. е. по норме L^2, к $f(\mathbf{x})$.

Замечания о поточечной сходимости. (1) Из проведенных выше рассуждений нельзя сделать вывод, что $f(\mathbf{x})$ — поточечный предел рядов вида $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\varphi_j(\mathbf{x})$, потому что каждый коэффициент a_j в (5.1.14) в общем случае зависит от q и не обязательно имеет предел при $q \to \infty$.

(2) Известно, что если последовательность функций $S_m(\mathbf{x})$ сходится в L^2 к $f(\mathbf{x})$, то найдется такая подпоследовательность этих функций, которая сходится к $f(\mathbf{x})$ почти всюду, т. е. для почти всех $\mathbf{x}$.

(3) Для частного случая одномерных рядов Фурье Карлесон [1966] доказал, что частные суммы $S_m(x)$ из (5.1.2) сходятся к $f(x)$ почти всюду, т. е. в этом случае нет необходимости выбирать подпоследовательность.

(4) Для многомерных рядов Фурье Феферман [1971] доказал, что $S_m(\mathbf{x})$ сходится к $f(\mathbf{x})$ почти всюду при условии, что ряды суммируются в том порядке, который указан в (5.1.6), однако сходимости почти всюду может и не быть, если суммировать, например, так:

$$\sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k_2=-\infty}^{\infty}(\ldots)\right)c_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}.$$

Фактически Феферман дал пример такой функции $f(x, y)$ из $L^2((-\pi, \pi)^2)$, для которой ряды Фурье, суммируемые таким образом, не сходятся ни в одной точке x, y.

Следует заметить, что n-мерный тор не случайно выбран в качестве множества S для многомерных рядов Фурье, поскольку он имеет топологически естественную структуру для множества значений мультипериодической непрерывной функции. В случае $n=2$ не следует, например, пытаться представить $f(x, y)$ на сфере при помощи подстановки $x=2\theta-\pi$, $y=\varphi$, где θ и φ — углы сферической системы координат, так как тогда все значения $f(\pm\pi, y)$ «слипались» бы на северном и южном полюсах.

В общем случае для доказательства полноты разных видов ортонормированных систем функций необходимы разные методы. Системы, получающиеся в задачах Штурма—Лиувилля, рассматриваются в гл. 10.

Упражнения

1. Докажите, что последовательность функций

$$g_n(x) = n^2 x e^{-nx}$$

сходится поточечно к функции $f(x)=0$ для всех $x \geqslant 0$, однако не сходится в $L^2(0, 1)$.

2. Пусть $\{\xi_n\}_1^\infty$ — числовая последовательность

$$1/2,\ 1/4,\ 3/4,\ 1/8,\ 3/8,\ 5/8,\ 7/8,\ 1/16,\ \ldots .$$

Покажите, что последовательность функций

$$g_n(x) = \begin{cases} 1-(n/4)\,|x-\xi_n| & \text{при} \quad |x-\xi_n| < 4/n, \\ 0 & \text{при} \quad |x-\xi_n| \geqslant 4/n \end{cases}$$

сходится к функции $f(x)=0$ в $L^2(0, 1)$, но не сходится поточечно ни при каком x из $(0, 1)$. *Указание.* Рассмотрите графики функций $g_n(x)$.

5.2. ФИЗИЧЕСКИЙ ПРИМЕР АППРОКСИМАЦИИ В СРЕДНЕМ

Рассмотрим идеализированный электрический контур, изображенный на рис. 5.1. На клеммах A и B — периодическое напряжение $f(t)$ с неизвестной формой волны; при должном выборе единицы измерения времени период можно взять равным 2π. Необходимо как можно точнее аппроксимировать $f(t)$ генерируемой волной вида

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k(t+\alpha_k), \tag{5.2.1}$$

имеющей ту же самую частоту, при помощи настройки регуляторов генератора гармоник (для того, чтобы подобрать значения a_k и α_k) до тех пор, пока не будут минимизированы показания вольтметра. (На практике к источнику необходимо подсоединять осциллятор для обеспечения синхронизации.) Поскольку идеальный вольтметр переменного тока показывает значения корня квадратного из усредненного напряжения, приложенного к нему

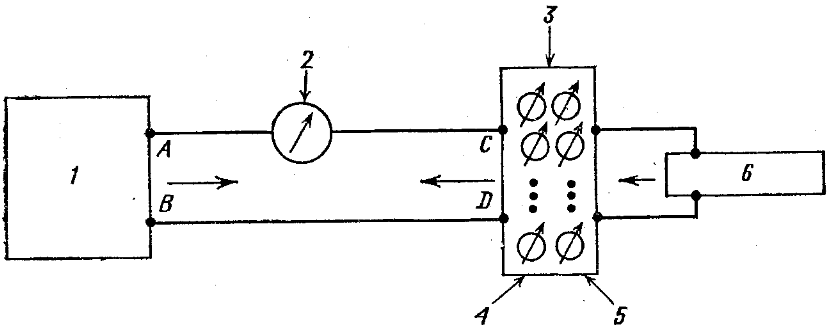

Рис. 5.1. Принципиальная схема среднеквадратичного фурье-анализа. *1* — источник неизвестного периодического сигнала; *2* — вольтметр; *3* — генератор гармоник; *4* — регуляторы амплитуды; *5* — регуляторы фазы; *6* — осциллятор.

(равного здесь $f(t)-g(t)$), указанная настройка такова, что минимизируется интеграл

$$\int |f(t)-g(t)|^2\,dt,$$

в котором интегрирование осуществляется на интервале, равном периоду, т. е. $f(t)$ аппроксимируется в среднем функцией (5.2.1).

Аппроксимация и сходимость в среднем уместны для многих физических приложений, потому что (как и в данном примере) энергия или мощность являются квадратичными выражениями от некоторых функций, выражающих основные переменные.

5.3. ПРОСТРАНСТВА $L^2(\mathbb{R}^n)$ И $L^2(\Omega)$

Определим на пространстве всех пробных функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ скалярное произведение

$$(\varphi, \psi)=\int \dots \int \overline{\varphi(\mathbf{x})}\psi(\mathbf{x})\,dx_1 \dots dx_n \qquad (5.3.1)$$

и норму $\|\varphi\|=(\varphi, \varphi)^{1/2}$, называемую L^2-*нормой*. Для дальнейшего заметим, что интеграл (5.3.1) сходится, если φ и ψ — произвольные квадратично интегрируемые непрерывные функции (потому что в этом случае выполняется неравенство Шварца), и что так определенное выражение (φ, ψ) обладает всеми свойствами скалярного произведения.

С этим скалярным произведением и с этой нормой C_0^∞ является так называемым *пространством со скалярным произведением* или *предгильбертовым пространством*, и мы хотим добавить к нему достаточное количество функций и других распределений с тем, чтобы сделать его полным, а значит, гильбертовым пространством.

Мы увидим (см. ниже теорему 2), что в результате получится пространство, содержащее, в частности, все квадратично интегрируемые непрерывные функции и потому подходящее для квантовой механики в качестве гильбертова пространства волновых функций.

Замечание о пополнении метрических пространств. Пространство C_0^∞ с определенной на нем L^2-нормой $\|\cdot\|$ служит примером линейного нормированного пространства, а любое линейное нормированное пространство представляет собой пример метрического пространства. В метрическом пространстве имеется определенная на нем функция расстояния или *метрика* $d(x, y)$, такая, что для всех точек x, y, z (1) $d(x, y) = d(y, x)$; (2) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$; (3) $d(x, y) > 0$ для $x \neq y$; (4) $d(x, x) = 0$. В нормированном линейном пространстве $d(x, y) = \|x - y\|$.

Последовательность $\{x_j\}$ точек метрического пространства называется *последовательностью Коши*, если $d(x_j, y_k) \to 0$ при независимом стремлении j и k к ∞; она называется *сходящейся*, если найдется такая точка y (*предел* последовательности), что $d(x_j, y) \to 0$ при $j \to \infty$. Пространство *пóлно*, если любая последовательность Коши сходится, т. е. имеет предел. Одна очень общая теорема утверждает, что любое метрическое пространство S можно сделать полным путем добавления к нему некоторых так называемых идеальных элементов или точек (в точности так, как иррациональные числа добавляются к рациональным для получения системы вещественных чисел). Каждая идеальная точка определяется как класс эквивалентности последовательностей Коши точек из S, в результате же получается полное пространство S_1, в которое S вложено плотно. Более того, такое пополнение единственно в том смысле, что если S_2 — другое полное пространство, в которое плотно вложено S, то S_1 и S_2 изоморфны.

Аналогичным образом могут быть пополнены некоторые более общие топологические пространства, так называемые равномерные пространства (см. Трон [1966]).

В рассматриваемой нами ситуации нет необходимости для пополнения C_0^∞ строить идеальные элементы, потому что нужные объекты уже имеются — это распределения. Однако некоторые приемы, связанные с обычной теоремой о пополнении, все же используются в доказательстве теоремы 1 этого параграфа.

[В этой главе все функции комплекснозначны. Соответствующая модификация теории на случай вещественнозначных функций, при помощи которой получаются пространства L^2 вещественных распределений, очевидна.]

Как и в любом нормированном пространстве (не обязательно полном), из неравенства треугольника, записанного в виде $|\|\varphi_k\|-\|\varphi_l\||\leqslant\|\varphi_k-\varphi_l\|$, следует, что если $\{\varphi_k\}$ — последовательность Коши, то $\{\|\varphi_k\|\}$ — числовая последовательность Коши, а значит, имеет предел, несмотря на то, что $\{\varphi_k\}$ может и не иметь предела в данном пространстве по L^2-норме, если пространство не является полным. Кроме того, если $\{\varphi_k\}$ — последовательность Коши в C_0^∞, то $\lim\limits_{k\to\infty}(\psi, \varphi_k)$ существует для всех пробных функций ψ (независимо от того, имеет ли последовательность $\{\varphi_k\}$ предел в C_0^∞ или нет), потому что при любой заданной ψ

$$|(\psi, \varphi_k)-(\psi, \varphi_l)|=|(\psi, \varphi_k-\varphi_l)|\leqslant\|\psi\|\|\varphi_k-\varphi_l\|\longrightarrow 0,$$

когда $k, l\longrightarrow\infty$; следовательно, $\{(\psi, \varphi_k)\}$ — числовая последовательность Коши. Очевидно, что ее предел полулинеен по ψ и поэтому определяет распределение f уравнением

$$\langle f, \psi\rangle=\lim(\bar{\psi}, \varphi_k) \quad \text{для всех } \psi \text{ из } C_0^\infty. \tag{5.3.2}$$

Лемма. *Две последовательности Коши $\{\varphi_k\}$ и $\{\tilde{\varphi}_k\}$ определяют одно и то же распределение тогда и только тогда, когда они эквивалентны. [Последовательности называются эквивалентными, если $\|\varphi_n-\tilde{\varphi}_n\|\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$.]*

Доказательство. Для эквивалентных последовательностей

$$|(\psi, \varphi_k)-(\psi, \tilde{\varphi}_k)|\leqslant\|\psi\|\|\varphi_k-\tilde{\varphi}_k\|\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad k\longrightarrow\infty,$$

и поэтому они определяют одно и то же распределение. Обратно, если $(\psi, \chi_k)\longrightarrow 0$ для любого ψ и $\chi_k=\varphi_k-\tilde{\varphi}_k$, то

$$\lim_{k\to\infty}\|\chi_k\|^2=\lim(\chi_k, \chi_k)=\lim(\chi_k-\psi, \chi_k)\leqslant\lim\|\chi_k-\psi\|\|\chi_k\|.$$

Последовательность $\{\|\chi_k\|\}$ — имеет предел, потому что $\{\chi_k\}$ — последовательность Коши, $\{\chi_k-\psi\}$ — также последовательность Коши, так что и $\{\|\chi_k-\psi\|\}$ имеет предел. Поэтому

$$(\lim\|\chi_k\|)^2\leqslant(\lim\|\chi_k-\psi\|)(\lim\|\chi_k\|)$$

и, следовательно,

$$\lim\|\chi_k\|\leqslant\lim\|\chi_k-\psi\|.$$

Однако правую часть этого неравенства можно сделать сколь угодно малой, взяв $\psi=\chi_{k_0}$ с достаточно большим k_0. Поэтому $\chi_k\longrightarrow 0$ по норме, т. е. эти две последовательности эквивалентны.

Определение. Пространство $L^2(\mathbb{R}^n)$ есть множество всех распределений, определяемых последовательностями Коши из C_0^∞, со скалярным произведением

$$(f, g)=\lim_{k\to\infty}(\varphi_k, \psi_k), \tag{5.3.3}$$

где $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ — последовательности Коши, определяющие распределения f и g соответственно.

Из непрерывности скалярного произведения (неравенства Шварца) с очевидностью следует, что этот предел всегда существует и не меняется при замене последовательностей Коши эквивалентными им последовательностями. Как следствие (5.3.3) получается

$$\|f\| = \lim_{k \to \infty} \|\varphi_k\|. \tag{5.3.4}$$

Очевидно, что так определенное скалярное произведение (f, g) линейно по g, эрмитово симметрично и положительно определенно, т. е. $L^2(\mathbb{R}^n)$ — пространство со скалярным произведением. Так как элементы этого пространства являются распределениями, они имеют интегралы, производные и те локальные свойства, которые описаны в гл. 2 и 3.

Ясно, что если $f \in L^2$ и φ — пробная функция, то $\langle f, \varphi \rangle = (\bar{f}, \varphi)$. Тогда из непрерывности скалярного произведения следует, что если $f_j \to f$ по L^2-норме, то $f_j \to f$ и в смысле сходимости распределений.

Интуитивно ясно, что элементы $L^2(\mathbb{R}^n)$ являются распределениями медленного роста, потому что их рост на бесконечности в некотором смысле ограничен квадратичной интегрируемостью. Чтобы доказать это, заметим прежде всего, что для $f \in L^2$ определение распределения $\langle f, \varphi \rangle$ можно распространить на все $\varphi \in \mathscr{S}$, просто полагая его равным $(\bar{f}, \varphi)$. Следовательно, мы должны показать, что если φ_k сходится к ψ в смысле сходимости в $\mathscr{S}$, то $(f, \varphi_k) \to (f, \psi)$, но это очевидно, потому что

$$\sup |\mathbf{x}|^l \, |\varphi_k(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})| \to 0$$

при $k \to \infty$ для любого l, а значит,

$$\int |\varphi_k(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})|^2 \, d^n\mathbf{x} \to 0,$$

т. е. φ_k сходится к ψ в L^2; следовательно, $(f, \varphi_k) \to (f, \psi)$, поскольку скалярное произведение непрерывно в L^2. Таким образом, f является распределением медленного роста.

Замечания. Если f и g оба оказались элементами исходного пространства C_0^∞, то новое скалярное произведение, определенное равенством (5.3.3), совпадает со старым скалярным произведением в C_0^∞, потому что в этом случае можно взять $\{\varphi_k\} = \{f, f, f, \ldots\}$ и $\{\psi_k\} = \{g, g, g, \ldots\}$, так что величина (φ_k, ψ_k) равна старому скалярному произведению для всех k. Аналогичное замечание справедливо и по отношению к новой норме, определенной формулой (5.3.4).

Теорема 1. *Пространство $L^2 = L^2(\mathbb{R}^n)$ полно (т. е. гильбертово).*

Замечание. Если f определяется последовательностью Коши $\{\varphi_k\}$, то $f - \varphi_m$ для любого m определяется последовательностью Коши $\{\varphi_k - \varphi_m\colon k = 1, 2, \ldots\}$. Тогда в силу (5.3.4)

$$\|f - \varphi_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

т. е. последовательность Коши $\{\varphi_k\}$ имеет предел в L^2 (равный f). Теперь нужно показать, что *любая* последовательность Коши $\{f_k\}$ из L^2, не обязательно из C_0^∞, также имеет предел в L^2.

Доказательство. Предположим, что $\{f_k\}$ — последовательность Коши элементов пространства L^2. Найдем (фактически построим) такой элемент $g \in L^2$, что $\|f_k - g\| \to 0$ при $k \to \infty$. Возьмем сначала

$$\delta_j \overset{\text{def}}{=} \sup_{k > j} \|f_k - f_j\| \quad (j = 1, 2, \ldots) \tag{5.3.5}$$

и заметим, что $\delta_j \to 0$ при $j \to \infty$. Каждое f_j — распределение, определяемое последовательностью Коши $\{\varphi_{j,l}\colon l = 1, 2, \ldots\}$ функций из C_0^∞. Пусть $N(j)$ для каждого j таково, что

$$\|\varphi_{j,l} - \varphi_{j,m}\| < \delta_j \quad \text{если } l,\ m \geqslant N(j), \tag{5.3.6}$$

и, кроме того, $N(j+1) \geqslant N(j)$. Из (5.3.6) следует, что в пределе при $m \to \infty$

$$\|\varphi_{j,l} - f_j\| \leqslant \delta_j, \quad \text{если} \quad l \geqslant N(j), \tag{5.3.7}$$

потому что $\varphi_{j,m} \to f_j$ по приведенному выше замечанию. Теперь покажем, что если положить $\psi_j = \varphi_{j,N(j)}$, то $\{\psi_j\}$ — последовательность Коши (элементов C_0^∞), определяющая искомый элемент $g \in L^2$. В самом деле, для $k > j$

$$\|\psi_k - \psi_j\| \leqslant \|\varphi_{k,N(k)} - \varphi_{j,N(k)}\| + \|\varphi_{j,N(k)} - \varphi_{j,N(j)}\|; \tag{5.3.8}$$

второе слагаемое справа меньше δ_j в силу (5.3.6), так как $N(k) \geqslant N(j)$, а первое слагаемое не превышает величины

$$\|\varphi_{k,N(k)} - f_k\| + \|\varphi_{j,N(k)} - f_j\| + \|f_j - f_k\|,$$

меньшей $\delta_k + \delta_j + \delta_j$ по дважды примененному условию (5.3.7) и по (5.3.5). Поэтому

$$\|\psi_k - \psi_j\| \leqslant 3\delta_j + \delta_k \to 0 \quad \text{при} \quad j,\ k \to \infty,$$

так что $\{\psi_k\}$ — последовательность Коши в C_0^∞. Если g — элемент пространства L^2, определяемый этой последовательностью, то

$$\|f_k - g\| \leqslant \|f_k - \varphi_{k,N(k)}\| + \|\psi_k - g\|$$

(потому что $\varphi_{k,N(k)} = \psi_k$); при $k \to \infty$ первый член в правой части этого неравенства стремится к нулю по (5.3.7), а второй член стремится к нулю согласно замечанию. Поэтому $f_k \to g$, что и требовалось доказать; следовательно, $L^2(\mathbb{R}^n)$ — полное пространство.

Теорема 2. *Любая квадратично интегрируемая непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Предположим, что $f(\mathbf{x})$ непрерывна и

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})|^2\, d^n\mathbf{x} < \infty. \tag{5.3.9}$$

Этот интеграл мы, как обычно, обозначим через $\|f\|^2$. Согласно замечанию (после теоремы 1) и определению L^2, распределение f принадлежит пространству L^2, если оно определяется последовательностью Коши $\{\varphi_k\}$ функций из C_0^∞, а в этом случае $\varphi_k \longrightarrow f$ по L^2-норме. Значит, чтобы показать, что $f(\mathbf{x}) \in L^2$, нужно найти такую последовательность $\{\varphi_k\}$, что $\|f-\varphi_k\| \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$ (см. замечание 2 ниже), т. е. нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $\varphi \in C_0^\infty$, что

$$\|f-\varphi\| < \varepsilon. \tag{5.3.10}$$

Пусть функция $f_R(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ при $|\mathbf{x}| \leqslant R$ и $f_R(\mathbf{x}) = 0$ при $|\mathbf{x}| > R$. Если R достаточно велико, то $\|f-f_R\| < {}^1/_2\varepsilon$, потому что $\|f-f_R\|^2$ означает вклад области $|\mathbf{x}| > R$ в сходящийся интеграл (5.3.9). Обозначим через $f_{R,\,\delta}$ результат сглаживания функции f_R оператором сглаживания J_δ ширины δ (см. § 2.6). Так как $f(\mathbf{x})$ непрерывна на компактном множестве $|\mathbf{x}| \leqslant R$, величина

$$M_\delta = \sup \{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}+\mathbf{y})| \colon |\mathbf{x}| \leqslant R-\delta,\ |\mathbf{y}| \leqslant \delta\}$$

стремится к нулю при $\delta \longrightarrow 0$. Поэтому

$$|f_{R,\,\delta}(\mathbf{x}) - f_R(\mathbf{x})| \leqslant M_\delta \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \leqslant R-\delta,$$
$$f_{R,\,\delta}(\mathbf{x}) = f_R(\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{при} \quad |\mathbf{x}| > R+\delta.$$

Поскольку, кроме того, $f_{R,\,\delta}$ и f_R обе ограничены на тонкой сферической оболочке $R-\delta < |\mathbf{x}| < R+\delta$, ясно, что для достаточно малого δ получим $\|f_{R,\,\delta} - f_R\| < {}^1/_2\,\varepsilon$. Если взять

$$\varphi(\mathbf{x}) = f_{R,\,\delta}(\mathbf{x}),$$

то (5.3.10) будет выполнено, т. е. $f \in L^2$, как и утверждалось.

Замечание 1. Скалярное произведение квадратично интегрируемых функций f и g как элементов пространства L^2 было определено при помощи аппроксимирующих пробных функций формулой (5.3.3), однако ясно, что оно может быть задано также и при помощи знакомого выражения

$$(f,\ g) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \overline{f(\mathbf{x})}\, g(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x},$$

потому что из (5.3.1) и неравенства Шварца (примененного к функциям) следует, что $(\varphi_k,\ \psi_k)$ сходится к этому интегралу при $k \longrightarrow \infty$.

Замечание 2. Если $\{\varphi_k\}$ — последовательность непрерывных функций, сходящаяся в L^2 к непрерывной функции f, то она является последовательностью Коши, потому что для интегралов от непрерывных функций на $\mathbb{R}^n$ выполняются неравенство Шварца и неравенство треугольника, и, следовательно, $\|\varphi_k - \varphi_l\| \leqslant \|\varphi_k - f\| + \|\varphi_l - f\|$.

Если обозначить через $C^{(2)}$ пространство непрерывных квадратично интегрируемых функций, то доказанное можно выразить так:

$$C_0^\infty \subset C^{(2)} \subset L^2,$$

причем оба вложения плотны, потому что любое f из L^2 можно сколь угодно точно аппроксимировать (в L^2) пробными функциями.

Замечание 3. Нетрудно убедиться в том, что если бы элементы последовательности Коши $\{\varphi_k\}$, определяющей распределение f из L^2, принадлежали только $\mathscr{S}$, а не обязательно C_0^∞, то в результате получилось бы то же самое пространство L^2; вообще в качестве φ_k можно было бы взять любые квадратично интегрируемые непрерывные функции. Следовательно, L^2 можно рассматривать как пополнение относительно L^2-нормы любого из пространств C_0^∞, $\mathscr{S}$, $C^{(2)}$, т. е. как наименьшее полное пространство, содержащее C_0^∞, $\mathscr{S}$ или $C^{(2)}$.

Замечание 4. Если квадратично интегрируемые непрерывные функции $f_k(\mathrm{x})$ сходятся в L^2 при $k \to \infty$, а также сходятся равномерно, то оба предела совпадают, т. е. предел в L^2 — это такое распределение, которое отождествляется с непрерывной функцией $\lim f_k(\mathrm{x})$.

[В L^2 есть и другие функции, такие, например, как $|x|^{-1/4}e^{-|x|}$ в одномерном случае. Если, как и во многих книгах, используется интеграл Лебега, то L^2 содержит все измеримые и квадратично интегрируемые по Лебегу функции, однако взаимно однозначное соответствие между функциями и элементами L^2 теряется, и каждый элемент из L^2 является бесконечным классом эквивалентности таких функций, любые две из которых (из одного класса) различаются только на произвольном множестве меры нуль. Тем не менее элементы пространства L^2 обычно называют просто функциями, хотя, с нашей точки зрения, они являются в действительности распределениями.]

Во многих приложениях появляются функции или распределения, квадратично интегрируемые на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $C_0^\infty(\Omega)$ — множество функций $\varphi(\mathrm{x})$ класса C^∞ с лежащим в Ω носителем. Тогда *распределение на* Ω определяется как линейный непрерывный в смысле § 2.4 функционал на $C_0^\infty(\Omega)$. Теория пространства $L^2(\Omega)$ совпадает с теорией пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$, только $\mathbb{R}^n$ всюду заменяется на Ω. В частности, скалярное произведение (φ, ψ) двух функций из $C_0^\infty(\Omega)$ задается, как и ранее, равенством (5.3.1), где интеграл формально берется по всему $\mathbb{R}^n$, однако при этом подынтегральная функция равна нулю вне Ω.

Элемент u из $L^2(\Omega)$ можно также рассматривать как элемент u_0 из $L^2(\mathbb{R}^n)$. Именно, если u определяется последовательностью Коши $\{\varphi_k\}$ функций из $C_0^\infty(\Omega)$, то u_0 задается равенством

$$\langle u_0, \psi\rangle = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k \psi d^n\mathrm{x} \qquad (5.3.11)$$

для всех ψ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, а не просто из $C_0^\infty(\Omega)$. Норма u в $L^2(\Omega)$ равна норме u_0 в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Если $\operatorname{supp}\psi$ целиком лежит вне Ω, то (5.3.11) дает нуль, следовательно, $\operatorname{supp} u_0 \subset \overline{\Omega}$. Обратно, можно показать (по крайней мере для областей Ω с разумно выбранными границами), что если элемент u_0 принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$, а его носитель лежит в $\overline{\Omega}$, то его можно рассматривать как элемент u из $L^2(\Omega)$, т. е. найдется такая последовательность $\{\varphi_k\}$ функций из $C_0^\infty(\Omega)$, для которой (5.3.11) выполняется для всех ψ.

Вообще любое распределение u_0 на $\mathbb{R}^n$ имеет единственное *ограничение* u на Ω, получаемое путем рассмотрения пробных функций только из $C_0^\infty(\Omega)$. Если, кроме того, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то $u \in L^2(\Omega)$ и $\|u\| \leqslant \|u_0\|$. Фактически выше было показано, что отображение ограничения, обычно многозначное, оказывается взаимно однозначным для элементов L^2 и является изоморфизмом подпространства $L^2(\mathbb{R}^n)$, состоящего из распределений с носителями в $\overline{\Omega}$.

В связи с дифференцированием между u и u_0 необходимо проводить различие. Если $u \in L^2(\Omega)$ и D обозначает $\partial/\partial x_k$, то Du — распределение на Ω, определяемое так:

$$\langle Du, \varphi\rangle = -\langle u, D\varphi\rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Тогда может получиться так, что $Du \in L^2(\Omega)$, тогда как $Du_0 \notin L^2(\mathbb{R}^n)$, потому что вклады, подобные δ-функциям, сосредоточены на границе Ω, например, когда u_0 равно ненулевой константе на Ω и равно нулю вне Ω. Если Du расширить, как описано выше, до распределения $(Du)_0$ из $L^2(\mathbb{R}^n)$ с носителем в $\overline{\Omega}$, то Du_0 и $(Du)_0$ совпадают на Ω и на $\mathbb{R}^n - \overline{\Omega}$ (где они оба равны нулю), однако в общем случае не совпадают на любом открытом множестве, пересекающемся с границей $\partial\Omega$. [В связи с этим следует заметить, что если $\{\varphi_k\}$ — последовательность Коши, представляющая u, то последовательность $\{D\varphi_k\}$ представляет Du в смысле определения (5.3.11), однако в общем случае не является последовательностью Коши.]

Простейшим пространством такого рода является $L^2(a, b)$, для которого $n = 1$, а Ω — открытый интервал (a, b) на $\mathbb{R}$.

Любая непрерывная на Ω функция $f(\mathbf{x})$, такая, что

$$\int \cdots \int_\Omega |f(\mathbf{x})|^2 \, dx_1 \ldots dx_n < \infty, \tag{5.3.12}$$

определяет распределение u в $L^2(\Omega)$ посредством обычной формулы

$$\langle u, \varphi\rangle = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \, \varphi(\mathbf{x}) \, dx_1 \ldots dx_n \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

В большинстве случаев (например, если Ω — интервал, куб или шар) очевидно, что́ понимается под интегралом (Римана) (5.3.12) по Ω; с другой стороны, его можно было бы взять как

$$\sup \int_{\mathbb{R}^n} \ldots \int \psi(\mathbf{x}) \, | f(\mathbf{x}) |^2 \, dx_1 \ldots dx_n$$

по всем непрерывным функциям $\psi(\mathbf{x})$ с носителем в Ω и со значениями в $[0, 1]$. Если область Ω ограничена, то (5.3.12) выполняется для *любых* непрерывных на Ω функций $f(\mathbf{x})$.

Для любой разумно выбранной m-мерной поверхности S в $\mathbb{R}^n$ (например, для сферы, цилиндра или тора) можно очевидным образом определить пространство $L^2(S)$. Пусть, например, S — двумерная сфера, т. е. поверхность $x^2+y^2+z^2=1$ в $\mathbb{R}^3$. Говорят, что функция f на S является функцией *класса* $C^\infty(S)$, если функция f бесконечно дифференцируема в окрестности любой точки на S, где $z \neq 0$ (т. е. любой точки не на экваторе) как функция от x и y, бесконечно дифференцируема как функция от x и z вблизи любой точки, где $y \neq 0$, и бесконечно дифференцируема как функция от y и z вблизи любой точки, где $x \neq 0$. Иначе говоря, f должна быть бесконечно дифференцируемой как функция сферических координат ϑ и φ при $0 < \vartheta < \pi$, $-\pi < \varphi < \pi$, причем в двух системах сферических координат, расположенных так, что особые точки каждой системы покрываются неособыми частями другой. *Распределение* на S определяется как линейный функционал на $C^\infty(S)$; скалярное произведение двух функций из $C^\infty(S)$ есть величина

$$(\chi, \psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \overline{\chi(\vartheta, \varphi)} \, \psi(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi;$$

далее проводятся те же построения, что и для описанных выше пространств L^2.

Пространства L^2 такого рода появляются в теории представлений групп; там S — это групповое многообразие или так называемое однородное пространство (см. том 2). Будет показано, что $L^2(\boldsymbol{M})$, где $\boldsymbol{M}$ — любое определенное в этой теории многообразие, может быть определено аналогично.

Если Ω — область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, то граничные значения распределения f из $L^2(\Omega)$ можно иногда рассматривать как распределение из $L^2(\partial\Omega)$.

Очевидным образом определяется и пространство L^2 периодических распределений. Если функция $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ такова, что $f(\mathbf{x}+\mathbf{p}) = f(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$, где $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ — фиксированный вектор, не равный нулю, то она называется *периодической*, а p — ее *периодом*. Рассмотрим функции и распределения с периодами вида $\mathbf{p}=(0, \ldots, 0, 2\pi, 0, \ldots, 0)$, т. е. предположим, что для $j=1, \ldots, n$

$$f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j+2\pi, x_{j+1}, \ldots, x_n)= \\ =f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n). \qquad (5.3.13)$$

Ясно, что для любого вектора $\mathbf{p}$, все компоненты которого представляют собой целочисленные кратные 2π, $f(\mathbf{x}+\mathbf{p})=f(\mathbf{x})$.

Пусть C^∞_{per} — пространство бесконечно дифференцируемых периодических в смысле (5.3.13) функций, наделенное скалярным произведением вида

$$(\varphi, \psi)=\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \overline{\varphi(\mathbf{x})}\,\psi(\mathbf{x})\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Соответствующее полное пространство, которое будет обозначаться как $L^2(\mathbb{R}^n, 2\pi)$, определяется следующим образом. Если $\{\varphi_k\}$ — последовательность Коши из C^∞_{per}, то распределение $\langle f, \cdot\rangle$ определяется равенством

$$\langle f, \psi\rangle=\lim_{k\to\infty}\int \underset{\mathbb{R}^n}{\ldots}\int \varphi_k(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\,dx_1\ldots dx_n \quad \text{для любых } \psi\in C_0^\infty.$$

Множество всех таких распределений и есть пространство $L^2(\mathbb{R}^n, 2\pi)$, скалярное произведение в котором определяется формулой (5.3.3).

5.4. УМНОЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ L^2

Для элементов f и g пространства L^2, являющихся пределами последовательностей Коши $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ из C_0^∞, произведение fg определяется как распределение (*не обязательно* принадлежащее L^2) следующим образом: если $\chi(\mathbf{x})$ — произвольная пробная функция, то $\{\chi\varphi_k\}$ — также последовательность Коши, поэтому $(\overline{\chi\bar{\varphi}_k}, \psi_k)$ имеет предел при $k\to\infty$ и можно определить функционал $\langle fg, \cdot\rangle$ равенством

$$\langle fg, \chi\rangle\overset{\text{def}}{=}\lim_{k\to\infty}(\overline{\chi\bar{\varphi}_k}, \psi_k)=\lim_{k\to\infty}\int \varphi_k\psi_k\chi\,d^n\mathbf{x}, \qquad (5.4.1)$$

что определяет и произведение fg. В следующем параграфе будет показано, что интеграл от $\bar{f}g$ по всему пространству равен скалярному произведению (f, g). Ясно, что если f и g — обычные функции, то fg — их обычное произведение.

С другой стороны, если $h=h(\mathbf{x})$ — ограниченная непрерывная функция и $\varphi_k\to f$, как было указано выше, то последовательность $\{h(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x})\}$ оказывается последовательностью Коши в L^2, предел которой определяется как распределение hf, *принадлежащее* L^2.

Для функции $h(x)$ из C^m (m — неотрицательное целое число) и распределения f из $L^2(\mathbb{R})$ распределение $hf^{(m)}$, не обязательно принадлежащее L^2, определяется равенством

$$\langle hf^{(m)}, \psi\rangle \overset{\text{def}}{=} (-1)^m ((\overline{\psi h})^{(m)}, f) \quad \forall \psi \in C_0^\infty; \qquad (5.4.2)$$

производная $(\overline{\psi h})^{(m)}$ представляет собой сумму, каждое слагаемое которой, очевидно, принадлежит L^2, поэтому скалярное произведение в правой части (5.4.2) является линейным функционалом, определенным для всех пробных функций ψ, т. е. распределением. Такое произведение полезно при рассмотрении области определения дифференциального оператора вида

$$Af = \sum_m h_m f^{(m)},$$

где коэффициенты $h_m(x)$ дифференцируемы лишь конечное число раз, а именно столько, сколько это необходимо. В самом деле, эта область определения включает только те распределения f из L^2, для которых Af как распределение также принадлежит L^2.

Пусть, наконец, $h(\mathrm{x})$ непрерывна, но не обязательно ограничена. Если $\psi(\mathrm{x})$ — пробная функция, то $\psi(\mathrm{x})h(\mathrm{x}) \in L^2$; следовательно, $(\overline{\psi h}, f)$ существует для всех $f \in L^2$, а распределение hf определяется как функционал

$$\langle hf, \psi\rangle = (\overline{\psi h}, f) \quad \text{для всех } \psi \text{ из } C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Резюме. 1. Произведение двух распределений из $L^2(\mathbb{R}^n)$ представляет собой распределение, в общем случае не принадлежащее L^2 (в действительности оно принадлежит L^1 — см. § 5.7). 2. Произведение распределения из $L^2(\mathbb{R}^n)$ на произвольную непрерывную функцию h является распределением; оно принадлежит L^2, если h ограничена. 3. В случае одной переменной произведение производной m-го порядка от любого распределения из $L^2(\mathbb{R})$ и любой функции из C^m есть распределение. [Первые два утверждения в классических терминах выглядят так:

1. Произведение двух функций из L^2 (т. е. двух измеримых и квадратично интегрируемых функций) является измеримой функцией, абсолютное значение которой интегрируемо.

2. Произведение функции из L^2 на ограниченную непрерывную функцию принадлежит L^2.

Изменение сомножителей на множествах меры нуль меняет произведение только на множестве меры нуль, следовательно, это произведение принадлежит однозначно определенному классу эквивалентности (элементу пространств L^1 или L^2). Очевидно, что третье утверждение не имеет аналога в классическом анализе, потому что оно затрагивает производную распределения.]

Упражнение

1. Покажите, что любое распределение f из $L^2(\mathbb{R}^n)$ можно сколь угодно точно аппроксимировать по норме пространства L^2 произведениями вида ψf, $\psi \in C_0^\infty$, т. е. распределениями с ограниченным носителем.

5.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ L^2. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Сначала рассмотрим случай одной независимой переменной. Здесь будет доказано, что для любых f и g из L^2 неопределенные интегралы $\int^x f\,dx$ и $\int^x fg\,dx$ являются непрерывными функциями. Далее будут следовать неравенство Шварца и обычная формула интегрирования по частям.

Пусть $\{\psi_k\}$ — последовательность в $C_0^\infty(\mathbb{R})$, сходящаяся (по L^2-норме) к элементу $f \in L^2(\mathbb{R})$. Поскольку неравенство Шварца выполняется для функций на любом интервале, мы имеем

$$\left|\int_0^x [\varphi_k(y)-\varphi_l(y)]\cdot 1dy\right|^2 \leqslant \int_0^x |\varphi_k(y)-\varphi_l(y)|^2\,dy\cdot\int_0^x 1dy \leqslant \leqslant \|\varphi_k-\varphi_l\|^2|x| \tag{5.5.1}$$

(заметим, что при $x<0$ в обоих сомножителях в средней части следует изменить знак), а отсюда следует, что последовательность $\int_0^x \varphi_k(y)\,dy$ сходится равномерно на любом конечном интервале к непрерывной функции $F(x)$. Неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$ от распределения был определен в § 2.7 как распределение, производная которого равна f. Итак,

$$-\langle f, \psi\rangle = -\lim\langle\varphi_k, \psi\rangle = \lim\left\langle\int\varphi_k(x)\,dx, \psi'\right\rangle =$$
$$= \lim\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi_k(y)\,dy\,\psi'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\psi'(x)\,dx = \langle F, \psi'\rangle. \tag{5.5.2}$$

Здесь предел можно переносить под первый знак интеграла потому, что внутренний интеграл сходится равномерно к $F(x)$ на носителе функции ψ. Отсюда в соответствии с § 2.7

$$\int f(x)\,dx = F(x) + \text{const}. \tag{5.5.3}$$

Тем самым мы доказали первую часть следующего утверждения:

Теорема. *Для распределения f из $L^2(\mathbb{R})$ неопределенный интеграл $\int^x f(x)\,dx$ является непрерывной функцией. Если последователь-*

ность $\{f_n\}\subset L^2$ *сходится в* L^2 *к распределению* $f\in L^2$, *то*

$$\int^x f_n dx \to \int^x f dx \quad (n\to\infty)$$

равномерно (в смысле поточечной сходимости) на любом конечном интервале x.

Доказательство второй части предоставляется читателю.

При большем числе измерений для непрерывности распределения (как функции) необходимо, чтобы пространству $L^2(\mathbb{R}^n)$ принадлежали также некоторые частные производные более высокого порядка; см. § 5.13.

Аналогично, если f и g являются пределами последовательностей $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$, то

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-\infty}^{x} [\varphi_k(y)\psi_k(y)-\varphi_l(y)\psi_l(y)]\,dy\right| = \\ &=\left|\int_{-\infty}^{x} [\varphi_k\psi_k-\varphi_k\psi_l+\varphi_k\psi_l-\varphi_l\psi_l]\,dy\right| \leqslant \\ &\leqslant\left\{\int_{-\infty}^{x}|\varphi_k|^2dy\int_{-\infty}^{x}|\psi_k-\psi_l|^2dy\right\}^{1/2}+ \\ &+\left\{\int_{-\infty}^{x}|\varphi_k-\varphi_l|^2dy\int_{-\infty}^{x}|\psi_l|^2dy\right\}^{1/2}\to 0 \quad \text{при} \quad k,\ l\to\infty. \qquad (5.5.4)\end{aligned}$$

Следовательно, последовательность $\int_{-\infty}^{x}\varphi_k(y)\psi_k(y)\,dy$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ и, значит, сходится к непрерывной функции $G(x)$. Выкладки, подобные (5.5.2), показывают, что

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = G(x)+\text{const}. \qquad (5.5.5)$$

Вообще для распределений определяются только неопределенные интегралы или первообразные, однако для распределений из L^2 (а также из L^p) могут быть определены и некоторые определенные интегралы. Для распределений из $L^2(\mathbb{R})$ (поскольку неопределенные интегралы $\int^x f\,dx = F(x)$ и $\int^x fg\,dx = H(x)$ являются непрерывными функциями) мы можем положить

$$\int_a^b f\,dx = F(b)-F(a), \qquad \int_a^b fg\,dx = H(b)-H(a).$$

Ниже обсуждаются некоторые многомерные случаи.

Упражнения

1. Покажите, что неравенство Шварца

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2\,dx \int_a^b |g(x)|^2\,dx \tag{5.5.6}$$

выполняется для любых элементов f и g из L^2 (если $f=\lim\varphi_k$, то $\overline{f}=\lim\overline{\varphi}_k$ и $|f|^2=\overline{f}f$), а также что

$$(f,\ g)=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(x)}\,g(x)\,dx, \tag{5.5.7}$$

2. Докажите, что если f, g и их первые производные принадлежат $L^2(\mathbb{R})$, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b (f'g+fg')\,dx=f(x)\,g(x)\Big|_a^b. \tag{5.5.8}$$

[Прежде всего заметьте, что все члены здесь вполне определены, в частности определена правая часть равенства, потому что f', $g'\in L^2$ и, значит, f и g — обычные непрерывные функции.]

Из того что $\int_a^b \varphi_k\psi_k dx$ сходится к $\int_a^b fg dx$ и, значит, $\int_a^b|\varphi_k|^2\,dx$ сходится к $\int_a^b |f|^2\,dx$, следует, что любое распределение $f(x)$ из $L^2(\mathbb{R})$ принадлежит также и $L^2(a,b)$ для любого интервала (a,b). Иначе говоря, ограничение $f(x)$ на интервал $(a,\ b)$, а именно линейный функционал $(\overline{\psi},\ f)$, определенный для всех пробных функций ψ с носителем в $(a,\ b)$, представляет собой распределение из $L^2(a,\ b)$.

Заметим, что если f и g принадлежат $L^2(a,\ b)$, где $(a,\ b)$ — конечный интервал, то функции $\int f dx$ и $\int fg dx$ непрерывны на *замкнутом* интервале $[a,\ b]$.

Для квантовой механики, где элементы f и g пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$ являются волновыми функциями, а $\mathbb{R}^n$ — пространство конфигураций (n равно утроенному числу частиц), представляют интерес интегралы вида $\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^2\,d^n\mathbf{x}$ или $\int_\Omega g(\mathbf{x})\times$ $\times f(\mathbf{x})\,d^n\mathbf{x}$, где Ω — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Первый интеграл является вероятностью того, что точка $\mathbf{x}$, представляющая конфигурацию системы, лежит в Ω (предполагается, что волновая функция нормирована так, что этот интеграл равен единице, когда Ω совпадает с $\mathbb{R}^n$). Если f и g — пределы последовательностей $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то выкладки (5.5.4) все еще справедливы с заменой интегрирования на интервале

$(-\infty, x)$ интегрированием по области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Отсюда следует, что

$$\int_\Omega \psi_k(\mathbf{y})\, \varphi_k(\mathbf{y})\, dy_1 \ldots dy_n \tag{5.5.9}$$

имеет предел при $k \to \infty$ для любой области Ω; этот предел обозначается как

$$\int_\Omega g(\mathbf{y})\, f(\mathbf{y})\, dy_1 \ldots dy_n. \tag{5.5.10}$$

Если Ω — прямоугольная ячейка, задаваемая неравенствами $0 < y_i < x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то сходимость (5.5.9) к (5.5.10) равномерна по $\mathbf{x}$ из любой ограниченной области квадранта $x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$; следовательно, пределом служит непрерывная функция, скажем $G(\mathbf{x})$. Для распределений дифференцирование и интегрирование всегда являются взаимно обратными операциями, поэтому

$$g(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x}) = \frac{\partial^n G(\mathbf{x})}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}, \tag{5.5.11}$$

а это — обобщение одномерного результата (5.5.5), который можно переписать как $g(x)\, f(x) = dG(x)/dx$. Распространение формулы (5.5.11), полученной для положительного квадранта, на другие квадранты в $\mathbb{R}^n$ получается путем очевидного переопределения прямоугольной ячейки и соответствующих изменений знака.

Если $g(\mathbf{x}) = \overline{f(\mathbf{x})}$, то легко видеть, что $G(\mathbf{x})$ не убывает в смысле теории вероятностей (см. § 13.3); следовательно, $\int_\Omega |f(\mathbf{x})|^2\, dx_1 \ldots dx_n$ можно интерпретировать как вероятность. С другой стороны, интеграл от $|f(\mathbf{x})|^2$ обладает очевидными свойствами

$$\int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} \quad \text{для непересекающихся } \Omega_1 \text{ и } \Omega_2, \tag{5.5.12}$$

$$\int_{\Omega_1} \leqslant \int_{\Omega_2} \quad \text{для } \Omega_1 \subset \Omega_2, \tag{5.5.13}$$

необходимыми для такой вероятностной интерпретации.

Если распределения f и g являются непрерывными функциями, а область Ω ограничена, то выражение (5.5.10) оказывается обычным интегралом Римана; если Ω не ограничена, то это выражение представляет собой несобственный интеграл Римана, который, однако, сходится для любых f и g из L^2. В любом случае обобщение результата, полученного в упражнении 1, дает для распределений из $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$(f,\ g)=\int_{\mathbb{R}^n}\overline{f(\mathbf{x})}\,g(\mathbf{x})\,dx_1\ldots dx_n, \tag{5.5.14}$$

а для распределений из $L^2(\Omega)$ —

$$(f,\ g)=\int_{\Omega}\overline{f(\mathbf{x})}\,g(\mathbf{x})\,dx_1\ldots dx_n. \tag{5.5.15}$$

Следующее утверждение является простым следствием неотрицательности интеграла $\int_{\Omega}|f|^2\,d^n\mathbf{x}$:

Лемма. *Если $f\in L^2$, а h_1 и h_2 — такие непрерывные ограниченные функции, что $|h_1(\mathbf{x})|\leqslant|h_2(\mathbf{x})|$ для всех $\mathbf{x}$, то*

$$\|h_1f\|\leqslant\|h_2f\|,$$

где норма берется в $L^2(\Omega)$ или в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

5.6. ОБ ОБРАЩЕНИИ В НУЛЬ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ. I

Иногда говорят, что квадратично интегрируемая функция $f(x)$ должна стремиться к нулю при $x\to\pm\infty$. То, что это неверно, показывают примеры функций $f(x)=\exp\{-x^4\sin^2 x\}$ и $f(x)=x^2\exp\{-x^8\sin^2 x\}$, во втором из которых $f(x)$ даже не ограничена. Однако *если и f, и ее производная f' принадлежат $L^2(\mathbb{R})$* (в этом случае f оказывается непрерывной функцией), *то $f(x)\to 0$ при $x\to\pm\infty$.*

Доказательство. Согласно (5.5.6), для распределений из L^2 выполняется неравенство Шварца; следовательно,

$$\left|\int_a^b f(x)f'(x)\,dx\right|^2\leqslant\int_a^b|f(x)|^2\,dx\int_a^b|f'(x)|^2\,dx.$$

Если a и b стремятся независимо к $+\infty$ (обратите внимание на знак «+»), то величина в правой части этого неравенства стремится к нулю, потому что соответствующие интегралы по всему $\mathbb{R}$ сходятся. Согласно (5.5.8), величина в левой части неравенства равна

$$\tfrac{1}{2}|f(b)^2-f(a)^2|;$$

поэтому $f(x)^2$ при $x\to+\infty$ стремится к некоторой постоянной, однако эта постоянная должна быть нулем, ибо в противном случае f не принадлежала бы $L^2(\mathbb{R})$; с помощью аналогичных рассуждений мы получаем, что предел $f(x)$ при $x\to-\infty$ также равен нулю.

Обращение в нуль на бесконечности для функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$ обсуждается в § 5.13; там требуется, чтобы L^2 принадлежали также и производные более высокого порядка.

Упражнение

1. Найдите такую функцию $f(x,\ y,\ z)$, что f, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ и $\partial f/\partial z$ принадлежат $L^2(\mathbb{R}^3)$ и тем не менее $f\not\to 0$ при $|\mathbf{x}|\to\infty$.

5.7. ПРОСТРАНСТВА ТИПА L^1, L^p, L^∞

Хотя для физики, несомненно, наиболее важен случай $p=2$, представляется целесообразным кратко изложить и свойства общих пространств L^p. Пусть p — любое вещественное число, $1 \leqslant p < \infty$. Линейное пространство, состоящее из элементов класса C_0^∞ и наделенное нормой

$$\|\varphi(\cdot)\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \tag{5.7.1}$$

оказывается неполным нормированным пространством, которое можно пополнить путем добавления определенных «слабых» распределений, в большей части литературы снова называемых просто «функциями». За исключением случая $p=2$, указанную норму нельзя получить из какого-либо скалярного произведения, потому что для нее не выполняется правило параллелограмма (1.3.5).

Основные результаты для пространств L^p будут представлены без доказательства. Большинство из них можно найти у Рисса и Секефальви-Надя [1953], где эти результаты выражаются в терминах теории Лебега. Эти и другие результаты были получены и при помощи методов теории распределений (Вернер [1969]).

Пусть p и q — такие вещественные числа, что $1 \leqslant p, q < \infty$ и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \tag{5.7.2}$$

тогда, взяв один элемент из L^p, а другой — из L^q, для них можно определить аналог скалярного произведения. *Неравенство Гёльдера*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \psi(x) \, dx \right| \leqslant \|\varphi\|_p \|\psi\|_p, \tag{5.7.3}$$

где φ и ψ принадлежат C_0^∞, является обобщением неравенства Шварца; воспользовавшись им, можно получить неравенство треугольника

$$\|\varphi + \psi\|_p \leqslant \|\varphi\|_p + \|\psi\|_p, \tag{5.7.4}$$

которое, будучи примененным к функциям, называется иногда *неравенством Минковского*.

Из неравенства Гёльдера непосредственно следует, что если $\{\varphi_i\}$ — последовательность Коши функций из C_0^∞ относительно L^p-нормы, то

$$\text{существует} \lim_{i \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x) \psi(x) \, dx \quad \forall \psi \in C_0^\infty; \tag{5.7.5}$$

этот предел порождает линейный функционал на C_0^∞, т. е. распределение, обозначаемое далее через f; таким образом, этот предел представляет собой $\langle f, \psi\rangle$. Согласно терминологии теории распределений, $\varphi_i \to f$. Как и в случае $p=2$, имеет место следующая лемма:

Лемма. *Две последовательности Коши* $\{\varphi_i\}$ *и* $\{\tilde{\varphi}_i\}$ *из* C_0^∞ *(относительно* L^p*-нормы) определяют одно и то же распределение тогда и только тогда, когда они эквивалентны, т. е. когда* $\|\varphi_i - \tilde{\varphi}_i\|_p \to 0$ *при* $i \to \infty$.

Автор не знает простого доказательства этой леммы, подобного соответствующему доказательству в § 5.3 для случая $p=2$; изящное, но слишком длинное доказательство сообщил автору Норман Ренер, позднее же аналогичное доказательство появилось в обширной статье Вернера [1969], уже упоминавшейся выше.

В любом нормированном пространстве (не обязательно полном) $\{\|\varphi_i\|\}$ имеет предел при $i \to \infty$, если $\{\varphi_i\}$ — последовательность Коши. Это следует из неравенства треугольника, записанного в виде

$$\big|\|\varphi_i\| - \|\varphi_j\|\big| \leqslant \|\varphi_i - \varphi_j\|, \tag{5.7.6}$$

поскольку оно показывает, что $\{\|\varphi_i\|\}$ — последовательность Коши вещественных чисел. Если $\varphi_i \in C_0^\infty$ и $f = \lim \varphi_i$, то норма распределения f определяется как

$$\|f\|_p = \lim_{i\to\infty} \|\varphi_i\|_p. \tag{5.7.7}$$

Пространство $L^p = L^p(\mathbb{R})$ — это множество всех таких распределений:

$$L^p = \{f = \lim_{i\to\infty} \varphi_i\colon\ \{\varphi_i\} \text{ — последовательность Коши по } L^p\text{-норме}\}. \tag{5.7.8}$$

Теорема 1. *Пространство* L^p *с нормой* $\|\cdot\|_p$ *является полным и, значит, банаховым пространством, а* C_0^∞ *— плотным в* L^p *множеством* (доказательство опускается).

Если f — предел в L^p последовательности Коши $\{\varphi_i\}$, а g — предел в L^q последовательности Коши $\{\psi_i\}$ (здесь и далее в этом параграфе предполагается, что $(1/p)+(1/q)=1$), то неравенство Гёльдера показывает, что

$$\lim_{i\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(x)\,\psi_i(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \langle f, g\rangle \tag{5.7.9}$$

существует и что

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\|\,\|g\|_q. \tag{5.7.10}$$

Это неравенство представляет собой общее неравенство Гёльдера. Тем самым область определения линейного функционала $\langle\cdot, g\rangle$ расширена с C_0^∞ до L^p.

Для данного $g \in L^q$ $\langle\cdot, g\rangle$ — ограниченный линейный функционал на L^p. Следующая теорема Ф. Рисса (1910 г.) обобщает теорему Рисса — Фреше (1907 г.):

Теорема 2. *Для любого ограниченного линейного функционала $F(\cdot)$ на L^p найдется единственный элемент $g \in L^q$, такой, что $F(f) = \langle f, g\rangle$ для всех $f \in L^p$; кроме того, норма функционала $F(\cdot)$, определяемая как*

$$\|F(\cdot)\| = \sup_{f \neq 0}[\,|F(f)|/\|f\|_p], \tag{5.7.11}$$

равна $\|g\|_q$.

Множество всех ограниченных линейных функционалов на банаховом пространстве образует *сопряженное* (*двойственное*) пространство, которое также является банаховым. Теорема Рисса показывает, что сопряженное к L^p пространство изоморфно пространству L^q.

В предельном случае $p = 1$ норма в C_0^∞ берется равной $\|\varphi\|_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\,dx$; при этом пространство L^1 определяется в точности так же, как L^p при $p > 1$, хотя для доказательства приведенных выше леммы и теоремы 1 необходимы другие средства; см. Вернер [1969].

При любом $p \geqslant 1$ имеет место аналог теоремы 2 из § 5.3: любая непрерывная функция $f(x)$, для которой $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,dx$ конечен, принадлежит L^p.

В другом предельном случае, $p = \infty$, тот факт, что L^p сопряжено к L^q и $p \to \infty$ при $q \to 1$ по (5.7.2), наводит на мысль о соответствующем методе определения L^∞. Действительно, пространство L^p можно охарактеризовать иначе (как это сделал Вернер): распределение f принадлежит L^p тогда и только тогда, когда существует такая постоянная M, что

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant M\|\varphi\|_q \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty. \tag{5.7.12}$$

Определение. L^∞ — пространство всех таких распределений f, что для некоторой постоянной $M = M(f)$

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant M\|\varphi\|_1 \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty; \tag{5.7.13}$$

норма $\|f\|_\infty$ — это наименьшее из возможных значений $M(f)$, обладающее, очевидно, всеми свойствами нормы.

С такой нормой L^∞ оказывается полным и, значит, банаховым пространством (Вернер).

Покажем теперь, что распределение $f \in L^\infty$ тогда и только тогда, когда оно ограничено (поточечно). Рассмотрим сначала вещественный случай. Если φ — неотрицательная пробная функция, то $\|\varphi\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi \rangle$, где через 1 обозначена функция, тождественно равная единице. Поэтому из (5.7.13) следует, что $\langle M \pm f, \varphi \rangle \geqslant 0$, т. е. распределения $M+f$ и $M-f$ неотрицательны на $\mathbb{R}$, а $\|f\|_\infty$ — это наименьшее такое M, для которого это условие верно. В комплексном случае $\|f\|_\infty$ — наименьшее из таких M, что

$$M - \operatorname{Re}(fe^{i\alpha}) \geqslant 0 \quad \text{на } \mathbb{R} \text{ для всех вещественных } \alpha. \tag{5.7.14}$$

Любая ограниченная непрерывная функция $f(x)$ принадлежит L^∞, и для нее $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|: x \in \mathbb{R}\}$.

Пространство L^∞ представляет собой пространство, сопряженное к L^1, что почти очевидно из определения L^∞, однако L^1 не является сопряженным к L^∞ пространством. Если сопряженное пространство обозначить, как и в § 2.8, штрихом, то банахово пространство $\boldsymbol{B}$ называется *рефлексивным*, если $(\boldsymbol{B}')' = \boldsymbol{B}$. Поэтому L^p рефлексивно для $p > 1$, но нерефлексивно для $p = 1$. Сопряженным к L^∞ является пространство мер; см. § 13.9.

В точности так же можно изложить и теорию пространств $L^p(\mathbb{R}^n)$), $L^p(a, b)$ и $L^p(\Omega)$.

Упражнение

1. Покажите, что для любого распределения f из $L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ неопределенный интеграл $\int f dx$ является непрерывной функцией (ср. с § 5.5).

5.8. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В L^1. ЛЕММА РИМАНА — ЛЕБЕГА. ТЕОРЕМА ЛУЗИНА

Поскольку элементы пространств L^1 являются распределениями медленного роста, они имеют преобразования Фурье. Лемма Римана — Лебега, доказываемая ниже, утверждает, что в этом случае преобразования Фурье оказываются непрерывными функциями, стремящимися к нулю (возможно, очень медленно) на бесконечности. Первоначально эта лемма выглядела так: если $f(x)$ измерима на $(0, 2\pi)$ и $\int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx < \infty$, то коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx$$

стремятся к нулю при $n \to \pm\infty$. (Для практических целей эта лемма представляет меньший интерес, чем утверждение о том, что если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $(0, 2\pi)$, то ее коэффициенты Фурье $c_n \to 0$ по меньшей мере как $c/|n|$, однако у нее много теоретических применений.)

Согласно идеям § 5.7, пространство $L^1(\mathbb{R}^n)$ определяется следующим образом. Если $\{\varphi_j(\mathbf{x})\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность Коши пробных функций по L^1-норме, т. е. если

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(\mathbf{x}) - \varphi_k(\mathbf{x})|\, d^n\mathbf{x} \to 0 \quad \text{при } j,\ k \to \infty, \tag{5.8.1}$$

то эта последовательность определяет распределение f посредством равенства

$$\langle f, \psi\rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(\mathbf{x})\, \psi(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} \quad \forall \psi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n),$$

а $L^1(\mathbb{R}^n)$ является множеством всех таких распределений f.

Лемма (Риман — Лебег). *Для распределения $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ его преобразование Фурье $\hat{f}$ является непрерывной функцией $\hat{f}(\mathbf{y})$, стремящейся к нулю при $|\mathbf{y}| \to \infty$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\hat{f}$ — непрерывная функция. Для последовательности $\{\varphi_j\}$, указанной выше, по формуле для преобразования Фурье от пробной функции следует, что для любого $\mathbf{y}$

$$|\hat{\varphi}_j(\mathbf{y}) - \hat{\varphi}_k(\mathbf{y})| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(\mathbf{x}) - \varphi_k(\mathbf{x})|\, d^n\mathbf{x},$$

потому что $|e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}| = 1$. Так как правая часть неравенства не зависит от $\mathbf{y}$ и стремится к нулю при $j,\ k \to \infty$, последовательность $\{\hat{\varphi}_j(\mathbf{y})\}$ сходится равномерно при $j \to \infty$. Следовательно, ее предел

$$\hat{f}(\mathbf{y}) = (2\pi)^{-n/2} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}} d^n\mathbf{x}$$

является непрерывной функцией. Так как $e^{i\pi} = -1$, то $\hat{f}(\mathbf{y})$ можно представить и в виде

$$\hat{f}(\mathbf{y}) = -(2\pi)^{-n/2} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_j(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{y}\cdot(\mathbf{x} + \pi\mathbf{y}/|\mathbf{y}|^2)} d^n\mathbf{x}.$$

Среднее арифметическое этих двух выражений таково:

$$\hat{f}(\mathbf{y}) = (1/2)\,(2\pi)^{-n/2} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi_j(\mathbf{x}) - \varphi_j(\mathbf{x} - \pi\mathbf{y}/|\mathbf{y}|^2)]\, e^{-i\mathbf{y}\cdot\mathbf{x}} d^n\mathbf{x};$$

поэтому

$$|\hat{f}(\mathbf{y})| \leq (1/2)\,(2\pi)^{-n/2} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(\mathbf{x}) - \varphi_j(\mathbf{x} - \pi\mathbf{y}/|\mathbf{y}|^2)|\, d^n\mathbf{x},$$

и нам осталось показать, что правая часть этого неравенства стремится к нулю при $|\mathbf{y}| \to \infty$. Пусть ε — произвольное положительное число. Сначала выберем K, такое, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(\mathbf{x}) - \varphi_k(\mathbf{x})|\, d^n\mathbf{x} < \varepsilon \quad \text{для } j,\ k \geqslant K, \tag{5.8.2}$$

а затем выберем R так, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_K(\mathbf{x}) - \varphi_K(\mathbf{x} - \pi\mathbf{y}/|\mathbf{y}|^2)|\, d^n\mathbf{x} < \varepsilon \quad \text{для } |\mathbf{y}| > R.$$

Если мы объединим это неравенство с неравенством (5.8.2) (последнее нужно брать для $k = K$ дважды: в том виде, как оно записано, и после сдвига по $\mathbf{x}$ на $\pi\mathbf{y}/|\mathbf{y}|^2$), то увидим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(\mathbf{x}) - \varphi_j(\mathbf{x} - \pi\mathbf{y}/|\mathbf{y}|^2)|\, d^n\mathbf{x} < 3\varepsilon \quad \text{для } j > K \text{ и } |\mathbf{y}| > R.$$

Поэтому $|\hat{f}(\mathbf{y})| \to 0$ при $|\mathbf{y}| \to \infty$.

Замечание 1. Распределение из L^1 не обязательно принадлежит L^2, а распределение из L^2 не обязано принадлежать L^1. Ниже (см. § 5.10) рассматриваются преобразования Фурье элементов пространства L^2; эти преобразования в общем случае не являются обычными функциями.

Приведенный ниже несколько упрощенный вариант *теоремы Лузина* показывает, в какой степени распределения из L^1 (и из L^2, см. замечание 2) являются обычными функциями. В исходном варианте теоремы (см. Натансон [1950]) f является измеримой по Лебегу функцией.

Упражнение (теорема Лузина)

Предположим, что распределение $f \in L^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Докажите, что для любого $\delta > 0$ найдутся открытое множество $\Omega_\delta \subset \Omega$, объем которого меньше δ, и непрерывная функция $g_\delta(\mathbf{x})$, определенная на $\Omega - \Omega_\delta$ и такая, что

$$f = g_\delta \quad \text{внутри } \Omega - \Omega_\delta.$$

Указание. Пусть $\{\varphi_k\}$ — последовательность пробных функций, сходящаяся в $L^1(\Omega)$ к f. Покажите, что для любого $\delta > 0$ найдутся такие целые числа $k_1, k_2, \ldots$ (зависящие от δ), что

$$\text{Объем}\left\{\mathbf{x}\colon |\varphi_k(\mathbf{x}) - \varphi_l(\mathbf{x})| > \frac{1}{n^2}\right\} < \frac{6\delta}{\pi^2 n^2} \quad \text{для всех } k,\ l \geqslant k_n;$$

после этого возьмите

$$\Omega_\delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\mathbf{x}\colon |\varphi_{k_n}(\mathbf{x}) - \varphi_{k_{n-1}}(\mathbf{x})| > 1/n^2\}$$

и рассмотрите последовательность $\{\varphi_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Замечание 2. Если f — распределение на $\mathbb{R}^n$, принадлежащее $L^1(\Omega)$ при любой *ограниченной* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то говорят, что f принадлежит $L^1(\mathbb{R}^n)$ *локально*. Распределение, принадлежащее локально

L^2, принадлежит локально и L^1, потому что для элементов L^2 выполняется неравенство Шварца, и, следовательно,

$$\int_\Omega |f\cdot 1|\, d^n\mathbf{x} \leqslant \int |f|^2\, d^n\mathbf{x}\cdot \text{Объем } (\Omega),$$

значит, теорема Лузина применима и к $f\in L^2$.

5.9. ПРОСТРАНСТВА ТИПА L^2_σ

Пространства, описываемые в этом параграфе, возникают при рассмотрении спектрального разложения самосопряженных операторов. Пусть $\sigma(x)$ — неубывающая функция вещественной переменной x. Для любых двух функций φ и ψ из $C_0^\infty(\mathbb{R})$ определим

$$(\varphi,\ \psi)_\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\varphi(x)}\, \psi(x)\, d\sigma(x) \tag{5.9.1}$$

и

$$\|\varphi\|_\sigma = \sqrt{(\varphi,\ \varphi)_\sigma}.$$

Функционал $\|\cdot\|_\sigma$, как правило, всего лишь положительно *полуопределен* на пространстве C_0^∞, поскольку если $\varphi(x)$ равна нулю вне интервала постоянства $\sigma(x)$, то $\|\varphi\|_\sigma = \int |\varphi(x)|^2\, d\sigma(x) = 0$, даже в случае когда $\varphi(x)$ не равна тождественно нулю; $\|\cdot\|$ называется *полунормой*. Для нее все еще выполняются неравенство Шварца и неравенство треугольника. [Доказательства этих и других утверждений данного параграфа почти совпадают с доказательствами соответствующих утверждений в § 5.3 и потому опускаются.]

Если $\{\varphi_i\}$ — последовательность Коши относительно этой полунормы, то предел $(\psi,\ \varphi_i)_\sigma$ при $i\to\infty$ существует для всех пробных функций ψ; распределение f определяется как функционал

$$\langle f,\ \psi\rangle = \lim_{i\to\infty} (\overline{\varphi}_i,\ \psi)_\sigma \quad \text{для всех } \psi\in C_0^\infty.$$

Две последовательности Коши $\{\varphi_i\}$ и $\{\tilde{\varphi}_i\}$ определяют одно и то же распределение в том и только в том случае, когда они эквивалентны, т. е. когда $\|\varphi_i - \tilde{\varphi}_i\|_\sigma \to 0$.

Пространство $L^2_\sigma = L^2_\sigma(\mathbb{R})$ определяется как множество всех таких распределений (определяемых последовательностями Коши). Скалярное произведение в $L^2_\sigma(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$(f,\ g)_\sigma = \lim_{i\to\infty} (\varphi_i,\ \psi_i)_\sigma,$$

где $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ — последовательности Коши, определяющие f и g соответственно, а норма определяется формулой

$$\|f\|_\sigma = \sqrt{(f, f)_\sigma} = \lim_{i\to\infty} \|\varphi_i\|_\sigma.$$

Пространство $L^2_\sigma(\mathbb{R})$ является полным и, следовательно, гильбертовым пространством.

Следующие замечания касаются некоторых новых, хотя и второстепенных, свойств этих пространств.

1. Если (a, b) — произвольный интервал, на котором $\sigma(x)$ постоянна, а $f \in L^2_\sigma$, то $f=0$ на (a, b). [О смысле выражения «распределение $f=0$ на (a, b)» см. гл. 3.]

2. C_0^∞ не обязательно содержится в L^2_σ; в действительности непрерывная функция $f(x)$ принадлежит L^2_σ тогда и только тогда, когда

(а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, d\sigma(x) < \infty$ и

(б) $f(x)=0$ на каждом интервале постоянства $\sigma(\cdot)$.

3. Хотя $\|\cdot\|_\sigma$ на C_0^∞ всего лишь полуопределенна, на L^2_σ она положительно определенна. Иначе говоря, если $\|\varphi_i\|_\sigma \to 0$ при $i\to\infty$, так что $\|f\|_\sigma=0$, то последовательность Коши $\{\varphi_i\}$, определяет нулевое распределение: $f=0$. Поэтому $\|\cdot\|_\sigma$ определяет в L^2_σ норму, а не просто полунорму.

Пространства $L^2_\sigma(\mathbb{R}^n)$ исследуются аналогично, только в них σ — неубывающая функция нескольких вещественных переменных в смысле § 13.3 и используется многомерный интеграл Стилтьеса.

Упражнение

1. Выясните вид пространства $L^2_\sigma(\mathbb{R})$ в следующих случаях: (1) $\sigma(\cdot)$ — ступенчатая функция; 2) $\sigma'(x) > 0$ для всех x; (3) $\sigma(x) = x$.

5.10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ОПЕРАТОРЫ СГЛАЖИВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ L^2

Так как любой элемент f, принадлежащий $L^2(\mathbb{R}^n)$, представляет собой распределение медленного роста, для него существует преобразование Фурье $\hat{f}$, которое также является распределением медленного роста; более того, $\hat{f}$ также принадлежит L^2. В самом деле, предположим, что $\varphi_k \to f$ в L^2 при $k\to\infty$; тогда $\{\varphi_k\}$ — последовательность Коши. По равенству Парсеваля $\|\hat{\varphi}_k - \hat{\varphi}_l\|^2 = \|\varphi_k - \varphi_l\|^2$; следовательно, $\{\hat{\varphi}_k\}$ — также последовательность Коши. Для любого ψ из $\mathcal{S}$

$$\langle \hat{f}, \psi\rangle = \langle f, \hat{\psi}\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \varphi_k, \hat{\psi}\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \hat{\varphi}_k, \psi\rangle.$$

Иначе говоря, $\hat{f}$ равно распределению, определяемому последовательностью $\{\hat{\varphi}_l\}$ в смысле § 5.3, и поэтому $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Точно так же, используя последовательность $\{\psi_k\}$, сходящуюся в L^2 к g, легко увидеть, что $(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g)$. Поэтому отображение $f \longrightarrow \hat{f}$ оказывается изоморфизмом (иногда называемым изометрическим изоморфизмом, поскольку оно сохраняет не только линейность, но и норму, и скалярное произведение) гильбертова пространства L^2 на себя, т. е. данное отображение является унитарным преобразованием этого пространства.

В терминах квантовой механики это выражается следующим образом: если f изображает некоторое состояние системы N частиц в координатном представлении (в этом случае $n = 3N$ и спин не учитывается), то $\hat{f}$ изображает то же самое состояние в импульсном представлении, а из того, что отображение $f \longrightarrow \hat{f}$ является изометрическим изоморфизмом, следует, что эти два представления совершенно эквивалентны.

В гл. 2 было показано, что если f — распределение, а J_δ — оператор сглаживания (§ 2.6), то $J_\delta f$ и f как распределения близки для малого δ, т. е. $J_\delta f \longrightarrow f$ при $\delta \longrightarrow 0$ в смысле сходимости распределений. Мы покажем, что если $f \in L^2$, то $J_\delta f$ и f близки и по L^2-норме.

Теорема 1. *Для любого распределения f из $L^2(\mathbb{R}^n)$ с ограниченным носителем*

$$\|J_\delta f\| \leqslant \|f\| \tag{5.10.1}$$

для всех δ.

Следствие. *Это верно, даже если носитель f не ограничен.*

Доказательство теоремы. Поскольку f имеет ограниченный носитель, его преобразование Фурье $\hat{f}$ является непрерывной (в действительности даже аналитической) функцией, что следует из теоремы в § 4.5; следовательно,

$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2 = \int |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 \, d^n\mathbf{k}.$$

Пусть g является функцией $J_\delta f$, т. е.

$$g(\mathbf{y}) = \langle f, \rho_{\mathbf{y}, \delta} \rangle, \tag{5.10.2}$$

где $\rho_{\mathbf{y}, \delta}(\mathbf{x})$ — пробная функция, введенная в определении оператора сглаживания J_δ в § 2.6. Чтобы получить $\hat{g}(\mathbf{k})$, умножим последнее уравнение на $(2\pi)^{-n/2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}}$ и проинтегрируем его по $\mathbb{R}^n$ относительно $\mathbf{y}$. Используя упражнение 1 из § 2.4 об интегрировании по параметру, находим, что

$$\hat{g}(\mathbf{k}) = \langle f, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \rangle \hat{\rho}(\delta\mathbf{k}) = \hat{f}(\mathbf{k}) \hat{\rho}(\delta\mathbf{k})$$

(что и следовало ожидать, потому что (5.10.2) является сверткой). Но $\rho(\mathbf{x})$ — неотрицательная функция, интеграл от которой равен единице, поэтому

$$|\hat{\rho}(\mathbf{k})| \leqslant |\hat{\rho}(0)| = 1,$$

и, следовательно, $\|\hat{g}\|^2 \leqslant \|\hat{f}\|^2$, откуда мы получаем (5.10.1).

Доказательство следствия. Пусть $\{f_j\}$ — последовательность распределений с ограниченными носителями, сходящаяся в L^2 к f (см. упражнение в § 5.4); тогда для каждого j выполняется неравенство

$$\|J_\delta f_j\| \leqslant \|f_j\|. \tag{5.10.3}$$

Очевидно, что $\{J_\delta f_j\}$ — последовательность Коши и $J_\delta f$ — ее предел (потому что, согласно упражнению 5 из § 2.6, $J_\delta f$ — ее предел в смысле сходимости распределений, а такой предел совпадает с пределом в L^2 каждый раз, когда последний существует). Но тогда в пределе при $j \to \infty$ из (5.10.3) следует (5.10.1).

Теорема 2. *Если $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то* [illegible]

$$\|J_\delta f - f\| \to 0 \quad \textit{при} \ \delta \to 0. \tag{5.10.4}$$

Доказательство. Возьмем такие $\varepsilon > 0$ и $\psi \in C_0^\infty$, что

$$\|f - \psi\| < \varepsilon.$$

Тогда по теореме 1

$$\|J_\delta f - J_\delta \psi\| < \varepsilon$$

для любого δ. Так как ψ является гладкой функцией, интуитивно ясно, что $J_\delta \psi$ мало отличается от ψ при достаточно малом δ; доказательство того, что δ можно выбрать так, что

$$\|J_\delta \psi - \psi\| < \varepsilon,$$

оставляется читателю в качестве упражнения. Вместе эти три неравенства показывают, что $\|J_\delta f - f\| < 3\varepsilon$ для произвольного ε, а отсюда следует (5.10.4).

5.11. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА. ПРОСТРАНСТВО W^1

В задачах квантовой механики физически уместными часто оказываются такие гильбертовы пространства, элементы которых $\psi(\mathbf{x})$ или $\psi(\mathbf{x}, t)$ — волновые функции — и их частные производные первого порядка принадлежат L^2, так что, например, математическое ожидание кинетической энергии, которое при должном выборе единиц равно

$$(1/2) \int |\nabla\psi|^2 \, d^3\mathbf{x},$$

является конечной величиной. Такие пространства называются *пространствами Соболева*; они полезны при изучении дифференциальных операторов с частными производными. Функции, принадлежащие им, имеют в некотором смысле вполне определенные граничные значения на гиперповерхностях. Напоминаем: если и распределение f (от одной переменной), и его производная f'

принадлежат L^2, то f является обычной непрерывной функцией $f(x)$ и, следовательно, имеет вполне определенные значения для всех $x \in [a, b]$. (В частности, $f(x) \to 0$ на бесконечности, если (a, b) — неограниченный интервал.) Хотя в многомерном случае распределение $f(\mathrm{x})$, принадлежащее соответствующему пространству Соболева, не является, вообще говоря, обычной функцией, его «значения» на простой замкнутой поверхности S образуют распределение на S, как это будет выяснено в следующем параграфе.

Пусть Ω — либо все $\mathbb{R}^n$, либо область в $\mathbb{R}^n$, ограниченная кусочно гладкой простой замкнутой поверхностью $\partial\Omega$, и пусть L^2 — гильбертово пространство $L^2(\Omega)$, скалярное произведение и норма которого будут обозначаться через $(u, v)_0$ и $\|u\|_0$ соответственно. Обозначим через $W^1 = W^1(\Omega)$ линейное многообразие

$$W^1 = \{u \in L^2 \colon \partial_m u \in L^2 \quad (m = 1, \ldots, n)\}, \tag{5.11.1}$$

где

$$\partial_m = \partial/\partial x_m \quad (m = 1, \ldots, n). \tag{5.11.2}$$

Многообразие W^1 *не замкнуто* в L^2 и, следовательно, не является подпространством L^2, однако мы покажем, что оно является полным (а значит, гильбертовым) пространством относительно скалярного произведения и нормы, определяемых равенствами

$$(u, v)_1 = (u, v)_0 + (\nabla u, \nabla v)_0, \tag{5.11.3}$$

$$\|u\|_1^2 = \|u\|_0^2 + \|\nabla u\|_0^2, \tag{5.11.4}$$

где

$$(\nabla u, \nabla v)_0 = \sum_{m=1}^{n} (\partial_m u, \partial_m v)_0, \tag{5.11.5}$$

$$\|\nabla u\|_0 = \sum_{m=1}^{n} \|\partial_m u\|_0^2. \tag{5.11.6}$$

Теорема. *W^1 — полное относительно нормы $\|\cdot\|_1$ пространство.*

Доказательство. Предположим, что $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность Коши в W^1, т. е.

$$\|u_j - u_k\|_1 \to 0 \quad \text{при } j, k \to \infty; \tag{5.11.7}$$

мы должны показать, что найдется такое распределение $v \in W^1$, что

$$\|u_j - v\|_1 \to 0 \quad \text{при } j \to \infty. \tag{5.11.8}$$

Утверждение (5.11.7) и формула (5.11.4), в которой u заменено на $u_j - u_k$, показывают, что $\{u_j\}$ и $\{\partial_m u_j\}$ $(m = 1, \ldots, n)$ являются последовательностями Коши в L^2. Пусть v и w_m $(m = 1, \ldots, n)$ — соответствующие пределы этих последовательностей в L^2. Для любой пробной функции φ из $C_0^\infty(\Omega)$

$$(w_m, \varphi)_0 = \lim_{j \to \infty} (\partial_m u_j, \varphi)_0 = \lim_{j \to \infty} (u_j, -\partial_m \varphi)_0 =$$

$$= (v, -\partial_m \varphi)_0 = \langle \partial_m \bar{v}, \varphi \rangle$$

(здесь использовалось определение производной распределения $\partial_m \bar{v}$). Поэтому w_m и $\partial_m v$ как распределения на Ω совпадают, а отсюда следует, что (1) $\partial_m v \in L^2$ для каждого m и, следовательно, $v \in W^1$ и (2) $\partial_m v$ — предел в L^2 последовательности $\{\partial_m u_j\}$ для каждого m и поэтому в силу (5.11.6)

$$\|u_j - v\|_1 \to 0 \quad \text{при } j \to \infty.$$

Поэтому W^1 — полное пространство.

Часто используют и другие пространства Соболева. Так, в $W^{l,p}$ L^2-норма заменяется L^p-нормой, применяемой к функции u и к ее частным производным порядка не выше l (см. Фридман [1969]). Мы будем иметь дело только с пространством $W^1 = W^{1,2}$.

5.12. ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В W^1. ПОДПРОСТРАНСТВО W_0^1

Пусть $u \in W^1(\Omega)$, где Ω — ограниченная область с кусочно гладкой границей, и пусть $\psi(\mathbf{x})$ — любая функция из $C^2(\bar{\Omega})$. Рассмотрим $u_\delta(\mathbf{x}) = J_\delta u$, где J_δ — оператор сглаживания, определенный в § 2.6; функция u_δ может иметь и ненулевые значения вне области Ω, однако она непрерывна на $\bar{\Omega}$ и как таковая принадлежит $L^2(\Omega)$. Интегрирование по частям (формула Грина) дает

$$(\nabla\psi, \nabla u_\delta)_0 = \int_\Omega \nabla\bar{\psi}\cdot\nabla u_\delta\, d^n\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \nabla\bar{\psi}\cdot\mathbf{n} u_\delta\, dA - \int_\Omega (\nabla^2\bar{\psi})\, u_\delta\, d^n\mathbf{x}.$$

Оператор J_δ перестановочен с ∇, т. е. $\nabla(u_\delta) = (\nabla u)_\delta$; кроме того, $f_\delta \to f$ (при $\delta \to 0$) для любой $f \in L^2(\Omega)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а следовательно, и в $L^2(\Omega)$; поэтому

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{\partial\Omega} u_\delta \nabla\bar{\psi}\cdot\mathbf{n}\, dA = (\nabla\psi, \nabla u)_0 + (\nabla^2\psi, u)_0. \qquad (5.12.1)$$

Этот предел зависит от значений $\nabla\bar{\psi}$ на $\partial\Omega$, в остальном же от ψ не зависит. Определим функцию χ на $\partial\Omega$ следующим образом:

$$\chi(\mathbf{x}) = \nabla\bar{\psi}\cdot\mathbf{n}, \quad x \in \partial\Omega, \qquad (5.12.2)$$

и будем рассматривать χ как пробную функцию. Тогда равенство

$$\langle\tilde{u}, \chi\rangle = \lim_{\delta\to 0} \int_{\partial\Omega} u_\delta \chi\, dA$$

определяет линейный функционал $\langle\tilde{u}, \cdot\rangle$ на пространстве пробных функций χ, т. е. распределение $\tilde{u}$ на $\partial\Omega$; можно считать, что это распределение образовано граничными значениями функции u из $W^1(\Omega)$.

Можно доказать, что $\tilde{u}$ принадлежит пространству $L^2(\partial\Omega)$, определенному на поверхности $\partial\Omega$ (см. § 5.3); это частный случай более общей теоремы Соболева (см. Соболев [1950]). Если u — обычная функция из W^1, непрерывная на $\bar{\Omega}$, то $\tilde{u}$ — такое распределение на $\partial\Omega$, которое следует отождествлять с функцией $u(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ и которое задается формулой

$$\langle \tilde{u}\chi \rangle = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x})\, \chi(\mathbf{x})\, d\mathcal{A}.$$

Рассмотрим случай, когда граничные значения $\tilde{u}$ обращаются в нуль. Тогда в силу (5.12.1)

$$(\nabla\psi,\ \nabla u)_0 + (\nabla^2\psi,\ u)_0 = 0; \qquad (5.12.3)$$

это равенство оказывается формулой интегрирования по частям на Ω, когда граничные значения функции u равняются нулю. Определим

$$W_0^1 = \{u \in W^1 \colon (5.12.3) \text{ выполняется для всех } \psi \in C^2(\bar{\Omega})\}. \qquad (5.12.4)$$

Вследствие непрерывности скалярного произведения из (5.12.3) следует, что W_0^1 — *замкнутое* линейное многообразие, т. е. *подпространство* в W^1.

В следующей главе W_0^1 будет играть роль гильбертова пространства, содержащего собственные функции оператора Лапласа на Ω при нулевых граничных условиях на $\partial\Omega$.

Формула интегрирования по частям (5.12.3) справедлива и в несколько более общей ситуации. Пусть функция v, ее частные производные первого порядка и $\nabla^2 v$ принадлежат $L^2(\Omega)$. Возьмем вместо ψ функцию $v_\delta = J_\delta v$. Поскольку оператор J_δ коммутирует с дифференцированием, (5.12.3) дает

$$(J_\delta \nabla u,\ \nabla u)_0 + (J_\delta \nabla^2 v,\ u)_0 = 0.$$

Так как для любого $w \in L^2$ $J_\delta w \to w$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а значит, и в $L^2(\Omega)$, мы получаем

$$(\nabla v, \nabla u)_0 + (\nabla^2 v,\ u)_0 = 0 \quad \text{для} \quad u \in W_0^1,\ v \in W^1,\ \nabla^2 v \in L^2. \qquad (5.12.5)$$

Упражнения

1. Покажите, что $C^\infty(\bar{\Omega})$ — плотное в $W^1(\Omega)$ множество. *Указание.* Примените оператор сглаживания J_δ к элементам $W^1(\Omega)$.

2. Пусть Ω — единичный куб в $\mathbb{R}^n$. Покажите, что найдется такая постоянная K, что $\|\nabla\varphi\| \geqslant K\|\varphi\|$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и что отсюда следует, что $C_0^\infty(\Omega)$ не плотно в $W^1(\Omega)$.

5.13. ОБ ОБРАЩЕНИИ В НУЛЬ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ. II

Обсуждение данного вопроса, начатое в § 5.6, теперь можно продолжить для случая пространства $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. *Если распределение f и все его частные производные порядка l ($l > n/2$) принадлежат $L^2(\mathbb{R}^n)$, то $f(\mathbf{x})$ — непрерывная функция, стремящаяся к нулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$.*

Доказательство. Предположим сначала, что l — четное число; тогда

$$\left[f+\left(\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}^2\right)^{l/2} f\right]\in L^2.$$

При помощи преобразования Фурье получаем, что

$$\chi\hat{f}\overset{\mathrm{def}}{=}\hat{g}\in L^2,$$

где

$$\chi(\mathbf{y})=1+|\mathbf{y}|^l=1+(y_1^2+\dots+y_n^2)^{l/2}.$$

(Отсюда, между прочим, следует, что каждая частная производная порядка $<l$ также принадлежит L^2, потому что ее преобразование Фурье равно $q(y_1, \dots, y_n)\hat{f}$, где q — одночлен степени $<l$; следовательно, это преобразование можно записать как $(q/\chi)\hat{g}$, где q/χ — непрерывная ограниченная функция.) Пусть теперь $\hat{\psi}_j$ — пробные функции, сходящиеся в L^2 к $\hat{g}$. Тогда пробные функции

$$\hat{\varphi}_j(\mathbf{y})\overset{\mathrm{def}}{=}\chi(\mathbf{y})^{-1}\hat{\psi}_j(\mathbf{y})$$

сходятся в L^2 к $\hat{f}$. В силу неравенства Шварца мы имеем

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{\varphi}_j(\mathbf{y})-\hat{\varphi}_k(\mathbf{y})|\,d^n\mathbf{y}\right)^2\leqslant\int\chi(\mathbf{y})^{-2}\,d^n\mathbf{y}\int|\hat{\psi}_j(\mathbf{y})-\hat{\psi}_k(\mathbf{y})|^2\,d^n\mathbf{y}.$$

Первый интеграл в правой части неравенства конечен, потому что его подынтегральная функция стремится к нулю на бесконечности по меньшей мере как $|\mathbf{y}|^{-n-1}$; поэтому

$$\|\hat{\varphi}_j-\hat{\varphi}_k\|_{L^1}\leqslant\mathrm{const}\cdot\|\hat{\psi}_j-\hat{\psi}_k\|_{L^2}.$$

Таким образом, $\{\varphi_j\}$ сходится в L^1 и $\hat{f}\in L^1$; следовательно, согласно лемме Римана — Лебега из § 5.8, $f(\mathbf{x})$ является непрерывной функцией, стремящейся к нулю при $|\mathbf{x}|\to\infty$.

Пусть теперь l — нечетное число. В этом случае распределение $\chi\hat{f}$, определенное выше, все еще принадлежит L^2, потому что (1) если y_j — любая компонента переменной $\mathbf{y}$ и $y_j\hat{h}\in L^2$ для любого $\hat{h}\in L^2$, то $|y_j|\hat{h}$ также принадлежит L^2, и (2)

$$(y_1^2+\dots+y_n^2)^{l/2}\leqslant(|y_1|+\dots+|y_n|)^l;$$

следовательно, теорема справедлива и в этом случае.

Замечание. Для $n=2$ и $n=3$ из доказательства теоремы следует, что если f и $\nabla^2 f$ принадлежат L^2 ($l=2$), то f — непрерывная функция и $f(\mathbf{x})\to 0$ при $|\mathbf{x}|\to\infty$.