Глава 6

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ЛАПЛАСИАНОМ

Собственные функции для задач колебаний в ограниченной области; вариационные методы; интеграл Дирихле; потенциал, обусловленный заданным распределением заряда; уравнение Пуассона; свертки; прямое произведение; теорема Шварца о ядре; уравнения Коши—Римана; гармонические функции.

Предварительные сведения: гл. 5.

Лапласиан во многих отношениях имеет более классический характер, чем многие из дифференциальных операторов, которые будут рассмотрены в гл. 10 и 11. Одной из основных задач является определение собственных функций $u(\mathbf{x})$ уравнения $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ в области Ω n-мерного пространства при граничном условии $u(\mathbf{x}) = 0$ на границе $\partial\Omega$. При $n = 2$ это классическая задача о колебаниях мембраны. При $n = 2$ и $n = 3$ эти собственные функции и вариационные методы, которыми они определяются, оказываются полезными в задачах колебаний, теплопроводности, электромагнитных полей, гидродинамической устойчивости. Именно собственные функции и методы их нахождения составляют главное содержание настоящей главы.

При помощи некоторых других задач будет проиллюстрирована универсальность методов теории распределений. Во-первых, будет установлена справедливость уравнения Пуассона для потенциала $V(\mathbf{x})$, обусловленного зарядом с плотностью $\rho(\mathbf{x})$, где $\rho(\mathbf{x})$ — произвольное распределение с ограниченным носителем в $\mathbb{R}^3$. Во-вторых, будет показано, что если производные в уравнениях Коши—Римана интерпретировать в смысле теории распределений, то из этих уравнений для распределений u и v на $\mathbb{R}^2$ следует более общая, чем в классической теории, аналитичность $u + iv$. В этой связи доказывается, что любое гармоническое распределение в $\mathbb{R}^n$ является гармонической функцией в $\mathbb{R}^n$.

Кратко обсуждаются свертки распределений, так как они необходимы при рассмотрении уравнений Пуассона, а затем обсуждается теорема Шварца о ядре, что нужно для полного понимания свертки.

6.1. ПОТЕНЦИАЛ. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА

Вспомним, что в электростатике потенциал $V(\mathbf{x})$, обусловленный распределенным зарядом с плотностью $\rho(\mathbf{x})$, задается в виде

$$V(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\, \rho(\mathbf{y})\, d^3\mathbf{y} \tag{6.1.1}$$

и что этот потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 V = -4\pi\rho. \tag{6.1.2}$$

(В этой главе одинарные вертикальные черточки используются для обозначения длины вектора, а двойные вертикальные черточки обозначают норму вектора в L^2, когда он рассматривается как элемент банахова или гильбертова пространства.)

В следующих двух параграфах эти уравнения будут обобщены на случай, когда ρ — любое распределение с ограниченным носителем на $\mathbb{R}^3$. Мы кратко обсудим также модифицированную задачу, в которой заряд содержится в области Ω, ограниченной простой замкнутой поверхностью $\partial\Omega$, на которой $V(\mathbf{x}) = 0$. Затем первый множитель в подынтегральном выражении в (6.1.1) будет заменен функцией Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

6.2. СВЕРТКИ

В соответствии с (6.1.1) $V(\mathbf{x})$ является трехмерной сверткой функций $1/|\mathbf{x}|$ и $\rho(\mathbf{x})$, и поэтому прежде всего нужно определить свертку $f * g$ двух распределений f и g на $\mathbb{R}^n$. Если f и g — обычные функции, причем g имеет ограниченный носитель, то свертка является также функцией $(f * g)(\mathbf{x})$; как распределение она задается формулой

$$\begin{aligned}\langle f * g, \varphi\rangle &= \iint f(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, g(\mathbf{y})\, d^n\mathbf{y}\, \varphi(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} = \\ &= \iint f(\mathbf{w})\, g(\mathbf{y})\, \varphi(\mathbf{y}+\mathbf{w})\, d^n\mathbf{y}\, d^n\mathbf{w},\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

и в дальнейшем мы будем использовать непосредственную имитацию этой формулы. Если g — распределение с ограниченным носителем, то внутреннее интегрирование в последнем члене (6.2.1) (интегрирование по $\mathbf{y}$) следует рассматривать как

$$\langle g, \varphi_{\mathbf{w}}\rangle, \tag{6.2.2}$$

где

$$\varphi_{\mathbf{w}}(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{w}+\mathbf{y}). \tag{6.2.3}$$

Из упражнения 3 § 2.6 и последующего обсуждения операторов сглаживания следует, что $\langle g, \varphi_{\mathbf{w}}\rangle$ является функцией $\mathbf{w}$ класса C^∞. Равенство (6.2.3) показывает, что при достаточно большом $|\mathbf{w}|$ носители g и $\varphi_{\mathbf{w}}$ не перекрываются, а значит, $\langle g, \varphi_{\mathbf{w}}\rangle = 0$, т. е. функция $\langle g, \varphi_{\mathbf{w}}\rangle$ имеет ограниченный носитель и поэтому является пробной функцией. Внешнее интегрирование в (6.2.1) можно рассматривать как результат подстановки этой пробной функции в $\langle f, \cdot\rangle$. Таким образом, мы вводим определение

$$\langle f * g, \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle f, \langle g, \varphi_{\mathbf{w}}\rangle\rangle. \tag{6.2.4}$$

Из этого определения и правила дифференцирования по параметру (см. упражнение 2 § 2.4) очевидно следует, что если ∂_j обозначает $\partial/\partial w_j$, где w_j — одна из компонент $\mathbf{w}$ $(j=1, \ldots, n)$, то

$$\partial_j(f*g)=(\partial_j f)*g=f*(\partial_j g) \tag{6.2.5}$$

и аналогично для производных высших порядков, т. е. точно так же, как и для обычных функций.

Рассмотрим случай, в котором одно из распределений f, g является $\delta_n(\mathbf{x})$, т. е. n-мерной δ-функцией, определяемой равенством

$$\langle\delta_n, \varphi\rangle=\varphi(0) \quad \forall\varphi(\mathbf{x})\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{6.2.6}$$

Если $f=\delta_n$, то величина в правой части (6.2.4) равна

$$\langle\delta_n, \langle g, \varphi_{\mathbf{w}}\rangle\rangle=\langle g, \varphi_0\rangle=\langle g, \varphi\rangle,$$

и значит,

$$\delta_n*g=g; \tag{6.2.7}$$

аналогичным образом

$$f*\delta_n=f. \tag{6.2.8}$$

Эти результаты можно записать в виде символического соотношения между функциями g и распределениями g:

$$\int\delta_n(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,g(\mathbf{y})\,d^n\mathbf{y}=g(y).$$

Дальнейшие свойства сверток указываются в § 6.5.

Упражнения

1. Покажите, как нужно изменить рассуждения, проведенные в этом параграфе, для распределений f и g на $\mathbb{R}$, носители которых ограничены снизу (или сверху). Что можно сказать в этом случае о носителе $f*g$?

2. Покажите, что для пробных функций φ и ψ на $\mathbb{R}^n$ преобразование Фурье от $\varphi*\psi$ представляет собой умноженное на $(2\pi)^{n/2}$ произведение $\hat\varphi\hat\psi$ в обычном смысле.

3. Пусть f и g — распределения медленного роста на $\mathbb{R}^n$, причем g имеет компактный носитель. Покажите, что преобразование Фурье от $f*g$ представляет собой умноженное на $(2\pi)^{n/2}$ обычное произведение $\hat f\hat g$, предварительно заметив, что это произведение вполне определено, поскольку $\hat g$ является функцией класса C^∞ (см. теорему § 4.5).

4. Пусть f и g — распределения медленного роста на $\mathbb{R}$, носители которых ограничены снизу (или сверху). Для каких (комплексных) значений переменной преобразования k распределения $\hat f$ и $\hat g$ являются обычными функциями? Покажите, что для таких значений переменной k выполняется равенство $\hat h=\hat f\hat g$, где $h=f*g$.

Это упражнение имеет отношение к преобразованию Лапласа, которое будет обсуждаться в § 9.5.

6.3. ОБОСНОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Пусть $k=k(\mathbf{x})$ обозначает распределение $k(\mathbf{x})=|\mathbf{x}|^{-1}$ (первый пример в § 2.5, см. формулу (2.5.2)). Тогда потенциал $V=V(\mathbf{x})$ можно определить как распределение

$$V=k*\rho, \tag{6.3.1}$$

которое совпадает с (6.1.1).

Покажем теперь, что лапласиан от распределения k имеет вид

$$\nabla_y^2 k(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \nabla_x^2 k(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -4\pi\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{y}); \qquad (6.3.2)$$

тогда отсюда и из правила дифференцирования свертки (6.2.5) последует уравнение

$$\nabla^2 V = (\nabla^2 k) * \rho = -4\pi\delta_3 * \rho = -4\pi\rho,$$

что и требовалось доказать.

Чтобы установить справедливость (6.3 2), положим, что $\varphi(\mathbf{x})$ — любая пробная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$\begin{aligned}\langle \nabla_x^2 k(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\ \varphi(\mathbf{y})\rangle &= \langle k(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\ \nabla^2\varphi(\mathbf{y})\rangle = \\ &= \int \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\nabla^2\varphi(\mathbf{y})\,d^3\mathbf{y} = \int \frac{1}{|\mathbf{w}|}\nabla_x^2\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{w})\,d^3\mathbf{w} = \\ &= \nabla_x^2 \int \frac{1}{|\mathbf{w}|}\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{w})\,d^3\mathbf{w} = \\ &= \nabla_x^2 \int \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\varphi(\mathbf{y})\,d^3\mathbf{y} = -4\pi\varphi(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

где последнее равенство вытекает из уравнений классической теории потенциала (6.1.1) и (6.1.2), в которых $\varphi(\mathbf{x})$ заменяет $\rho(\mathbf{x})$. Отсюда следует справедливость (6.3.2).

Этот же метод можно использовать и для бóльших размерностей. В этом случае классические уравнения (6.1.1) и (6.1.2) нужно заменить уравнениями

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-2}}\rho(\mathbf{y})\,d^n\mathbf{y}, \qquad (6.3.3)$$

$$\nabla^2 V = -\frac{2(n-2)\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\rho \overset{\text{def}}{=} -c_n\rho. \qquad (6.3.4)$$

Постоянная c_n равна площади поверхности единичной сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$, умноженной на $(n-2)$;

$$\text{Площадь } (S^{n-1}) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \qquad (6.3.5)$$

Упражнения

1. Получите (6.3.5) путем вычисления интеграла от $\exp\{-x_1^2-\cdots-x_n^2\}$ по $\mathbb{R}^n$ сначала в полярных координатах, а затем как повторного интеграла в декартовых координатах.

2. Найдите преобразование Фурье функции $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-n+2}$ в $\mathbb{R}^n$ путем преобразования уравнения $\nabla^2(f*\rho) = -c_n\rho$, где ρ — пробная функция.

6.4. ЗАДАЧИ ПУАССОНА, ДИРИХЛЕ, ГРИНА И НЕЙМАНА ИЗ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Пусть электрический заряд содержится в области, принадлежащей Ω из $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой простой замкнутой границей $\partial\Omega$ (заземленная проводящая гиперповерхность), на которой $V(\mathbf{x}) = 0$.

Тогда классическая *задача Пуассона* заключается в следующем: при заданной «достаточно хорошей» функции $\rho(\mathbf{x})$, скажем непрерывной в $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$, найти функцию $V(\mathbf{x})$ из класса C^2 в Ω, непрерывную в $\overline{\Omega}$ и такую, что

$$\nabla^2 V=-c_n\rho \quad (\text{задана}) \text{ в } \Omega, \tag{6.4.1}$$

$$V(\mathbf{x})=0 \quad \text{для } \mathbf{x} \text{ на } \partial\Omega. \tag{6.4.2}$$

В классической *задаче Дирихле* на границе появляется неоднородность:

$$\nabla^2 V=0 \quad \text{в } \Omega, \tag{6.4.3}$$

$$V(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}) \quad (\text{задана}) \text{ на } \partial\Omega. \tag{6.4.4}$$

Третья классическая задача состоит в нахождении так называемой *функции Грина* $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для области Ω. Эта функция имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-2}}+g(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{6.4.5}$$

где для каждого фиксированного $\mathbf{y}$ из Ω g является решением частной задачи Дирихле

$$\nabla^2 g=0 \quad \text{в } \Omega \tag{6.4.6}$$

(∇^2 обозначает лапласиан относительно компонент вектора $\mathbf{x}$) и

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y})=-\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-2}}, \quad \mathbf{x}\in\partial\Omega. \tag{6.4.7}$$

Следовательно, при фиксированном $\mathbf{y}$ из Ω функция $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ удовлетворяет уравнению Лапласа, за исключением точки $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ (где, как следует из (6.4.7), имеется особенность), и обращается в нуль при $\mathbf{x}\in\partial\Omega$.

Мы утверждаем (без доказательства), что если Ω—область с достаточно хорошей границей $\partial\Omega$ (см. ниже), то все три классические задачи имеют решения. Эти решения связаны следующим образом: если задача Дирихле (6.4.3), (6.4.4) имеет решение для любой данной непрерывной $f(\mathbf{x})$ на $\partial\Omega$, то задача (6.4.6), (6.4.7) имеет решение, и, следовательно, функция Грина имеет вид (6.4.5). При заданном $\mathbf{y}$ $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является решением некоторого частного случая задачи Пуассона (6.4.1), (6.4.2), в котором точечный единичный заряд локализован в точке $\mathbf{x}=\mathbf{y}$, так что $\rho(\mathbf{x})$ равна n-мерной δ-функции от $\mathbf{x}-\mathbf{y}$. Тогда решение общей задачи Пуассона (6.4.1), (6.4.2) описывается интегралом

$$V(\mathbf{x})=\int\limits_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\,\rho(\mathbf{y})\,d^n\mathbf{y}. \tag{6.4.8}$$

Наконец, если $f(\mathbf{x})$ — любая подходящая функция, заданная на $\partial\Omega$, скажем функция класса C^1, а $\tilde{f}(\mathbf{x})$ — любая функция класса C^2 в Ω и класса C^1 в $\bar{\Omega}$, принимающая заданные значения на $\partial\Omega$, т. е.

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \text{на} \quad \partial\Omega,$$

то решение задачи Дирихле (6.4.3), (6.4.4) имеет вид $V(\mathbf{x}) = \tilde{f}(\mathbf{x}) + V_1(\mathbf{x})$, где $V_1(\mathbf{x})$ — решение задачи Пуассона (6.4.1), (6.4.2) с

$$\rho = (1/c_n)\,\nabla^2\tilde{f}. \tag{6.4.9}$$

Для практических целей достаточным условием разрешимости классических задач является так называемое *условие внешнего конуса*: можно найти такие числа $\varepsilon > 0$ и $h > 0$, что для каждой точки $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ существует круговой конус с углом раствора ε, высотой h и вершиной в точке $\mathbf{x}$, лежащий вне Ω; см. рис. 6.1. Это условие гарантирует, что граница $\partial\Omega$ не имеет бесконечно заостренных входящих ребер, углов и пиков. Для трехмерного случая подробности можно найти в книге Куранта и Гильберта [1962].

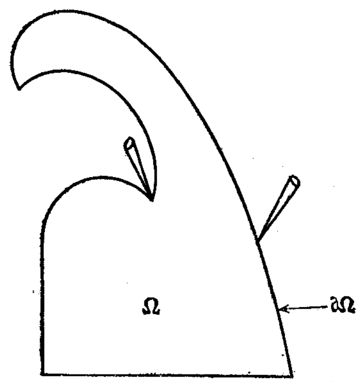

Рис. 6.1. Условие внешнего конуса.

Классическая *задача Неймана* аналогична задаче Дирихле, но в ее формулировку входит нормальная компонента градиента функции $V(\mathbf{x})$ на границе, а не самое $V(\mathbf{x})$, т. е.

$$\nabla^2 V = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{6.4.10}$$

$$\mathbf{n}\cdot\nabla V = h(\mathbf{x}) \quad \text{(задана) на } \partial\Omega, \tag{6.4.11}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Из теоремы Гаусса для векторного поля ∇V следует, что необходимым условием того, что данная задача имеет решение, является равенство

$$\int_{\partial\Omega} h(\mathbf{x})\,dA = 0. \tag{6.4.12}$$

Если это условие выполняется, то условие внешнего конуса достаточно для существования решения. Соответствующая *задача Пуассона — Неймана* такова:

$$\nabla^2 V = \rho \quad \text{(задана) в } \Omega, \tag{6.4.13}$$

$$\mathbf{n}\cdot\nabla V = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{6.4.14}$$

В этом случае необходимым условием существования решения является равенство

$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} = 0. \tag{6.4.15}$$

Относительно некоторого аналога функции Грина см. ниже упражнение 7; сведения о «функции Неймана» для родственного оператора $\nabla^2 - \mathrm{const}$ приведены в книге Гарабедяна [1964].

Решения задач Неймана (6.4.10), (6.4.11) и (6.4.13), (6.4.14) не являются единственными, поскольку к $V(\mathbf{x})$ можно прибавить произвольную постоянную.

Мы утверждаем (без доказательства), что если ρ является произвольным распределением с носителем в Ω, то уравнения (6.4.1), (6.4.2) и (6.4.8) справедливы в следующем смысле. Мы запишем (6.4.5) в следующем виде:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k_{n-2}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}), \tag{6.4.16}$$

где $k_{n-2}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-(n-2)}$ и $g_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Тогда (6.4.8) можно интерпретировать как

$$V = k_{n-2} * \rho + \langle \rho, g_{\mathbf{x}} \rangle \quad \text{в } \Omega \tag{6.4.17}$$

по следующим соображениям: (1) в n-мерном случае особенность $k_{n-2}(\mathbf{x})$ интегрируема, и поэтому k_{n-2} можно отождествить с распределением, описываемым формулой

$$\langle k_{n-2}, \varphi \rangle = \int k_{n-2}(\mathbf{x})\, \varphi(\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x};$$

(2) определение функционала $\langle \rho, \cdot \rangle$ можно непрерывно распространить на любую функцию $g(\mathbf{x})$, принадлежащую классу C^∞ на носителе функции ρ, но при этом не обязательно имеющую ограниченный носитель; (3) уравнение Пуассона справедливо в смысле теории распределений; (4) $V(\mathbf{x})$ является непрерывной функцией вне носителя функции ρ и удовлетворяет граничному условию (6.4.2).

Если носитель ρ не ограничен областью Ω, но заведомо ограничен $\bar{\Omega}$, то потребуется лишь одно изменение, заключающееся в том, что граничное условие (6.4.2) выполняется только в слабом смысле § 5.12.

Упражнения

1. Пусть Ω представляет собой шар $|\mathbf{x}| < a$ в $\mathbb{R}^n$. Покажите, что функция Грина имеет вид

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{n-2}} - \frac{1}{|(|\mathbf{y}|/a)\,\mathbf{x} - (a/|\mathbf{y}|)\,\mathbf{y}|^{n-2}}, \tag{6.4.18}$$

и проверьте, что G симметрична, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, в соответствии с общим случаем, рассматриваемом в упражнении 3.

2. Получите формулу Грина

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u)\, d^n\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \mathbf{n}\, d\mathcal{A} \tag{6.4.19}$$

путем применения теоремы Гаусса к векторному полю $u \nabla v - v \nabla u$; здесь $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали в точке $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

3. Покажите, что функция Грина в области Ω симметрична, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, сначала положив $u(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $v(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ для фиксированных $\mathbf{y}$ и $\mathbf{w}$ в Ω ($\mathbf{y} \neq \mathbf{w}$), затем применив формулу Грина к области

$$\Omega' = \{\mathbf{x} \in \Omega \colon |\mathbf{x} - \mathbf{y}| > \varepsilon,\ |\mathbf{x} - \mathbf{w}| > \varepsilon\}$$

(см. рис. 6.2) и, наконец, устремив ε к нулю.

4. Покажите, что решение задачи Дирихле (6.4.3), (6.4.4) дается *интегральной формулой Пуассона*

$$V(\mathbf{x}) = (1/c_n) \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{y})\, \mathbf{n}(\mathbf{y})\, \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})\, d\mathcal{A}(\mathbf{y}) \tag{6.4.20}$$

при условии, что все указанные действия имеют смысл.

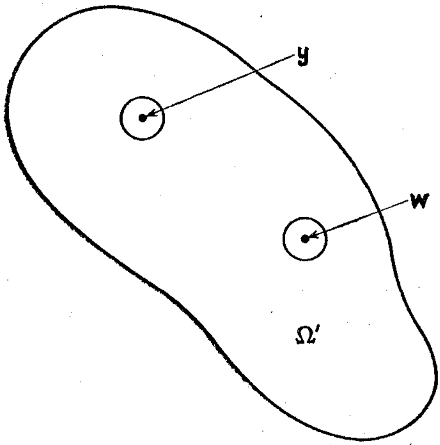

Рис. 6.2. Симметрия функции Грина.

5. Покажите, что действия, включенные в предыдущее упражнение, могут утратить смысл, если $\partial\Omega$ имеет входящее ребро или угол. Для этого рассмотрите задачу, в которой проекция поверхности заряда имеет вид, изображенный на рис. 6.3, и покажите, что в вершине угла $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ напряженность поля $\nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ бесконечна.

6. Покажите, что если Ω является шаром $|\mathbf{x}| < a$ в $\mathbb{R}^3$, то интегральная формула Пуассона принимает вид

$$V(\mathbf{x}) = \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{4\pi a} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\mathbf{y})\, d\mathcal{A}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3}, \tag{6.4.21}$$

а в полярных координатах — вид

$$V(\mathbf{x}) = \frac{a^3 - ar^2}{4\pi} \iint \frac{f(\mathbf{y}) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{(a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta)^{3/2}}, \qquad (6.4.22)$$

где $r = |\mathbf{x}| < a$, а θ — угол между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ (т. е. полярная ось для переменной $\mathbf{y}$ на сфере $|\mathbf{y}| = a$ взята в направлении $\mathbf{x}$).

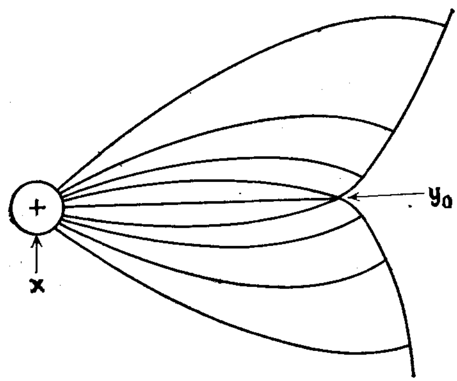

Рис. 6.3. Особенность поля.

7. Рассмотрите задачу Пуассона — Неймана (6.4.13), (6.4.14), в которой распределение заряда $\rho(\mathbf{x})$ состоит из положительного точечного заряда в точке $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ и отрицательного точечного заряда в точке $\mathbf{x} = \mathbf{y}'$. Так как решение $V(\mathbf{x})$ содержит произвольную аддитивную постоянную, рассмотрим разность $V(\mathbf{x}) - V(\mathbf{x}')$ для двух точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ и обозначим ее через

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}'). \qquad (6.4.23)$$

Найдите характерное представление этой функции, аналогичное (6.4.5) для функции Грина.

Функцию $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y}, \mathbf{y}')$ можно интерпретировать как *электрическое сопротивление* в предположении, что область Ω заполнена

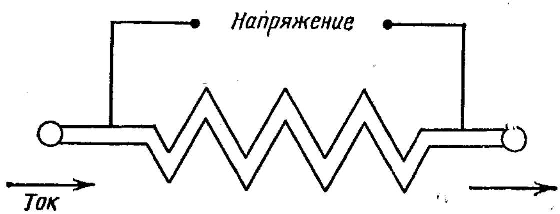

Рис. 6.4. Идеализированный резистор.

нена однородным веществом с единичным удельным сопротивлением и с изоляцией на границе $\partial\Omega$, что единичный ток подводится к точке $\mathbf{y}$ и выводится в точке $\mathbf{y}'$ и что разность потенциалов между этими точками y и y′ измерима. Тогда электрическое сопротивление представляется четырехточечной функцией. По этой причине в классической электроизмерительной практике точные стандартные резисторы низкого сопротивления выполняются с раздельными выходами тока и напряжения, как показано на рис. 6.4. Если мы положим $x=y$ или $x'=y'$, то G обратится в бесконечность; интерпретировать это можно так: если конечный ток вводится в тело конечного удельного сопротивления в некоторой геометрической точке, то результирующее «контактное» сопротивление бесконечно (оно расходится логарифмически, когда радиус этой «точки» стремится к нулю).

Упражнение

8. Покажите, что

$$G(x, x', y, y') = G(y, y', x, x').$$

(Это одно из многих так называемых *соотношений взаимности* в электромагнитной теории.)

6.5. ТЕОРЕМА ШВАРЦА О ЯДРЕ. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ $f(x)\,g(y)$

Свертка обычных функций коммутативна, $f*g=g*f$, но из определения (6.2.4) не очевидно, что это верно для распределений. (В предыдущих рассуждениях эта коммутативность не использовалась). Допустим, что *оба* распределения f и g на $\mathbb{R}^n$ имеют ограниченные носители (это допущение иногда может быть ослаблено). Тогда вопрос о справедливости равенства $f*g=g*f$ переходит в следующий: даны линейные функционалы $\langle f, \cdot\rangle$ и $\langle g, \cdot\rangle$; верно ли, что

$$\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x+y)\rangle\rangle \quad \text{для всех } \varphi \text{ в } C_0^\infty(\mathbb{R}^n)? \tag{6.5.1}$$

Этот вопрос имеет смысл благодаря тому, что величины после первой запятой в каждом члене являются пробными функциями из-за допущенной ограниченности носителей f и g. Сначала мы несколько обобщим вопрос: верно ли, что

$$\langle f(x), \langle g(y), \psi(x, y)\rangle\rangle = \langle g(y), \langle f(x), \psi(x, y)\rangle\rangle \quad \text{для всех } \psi \text{ в } C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})? \tag{6.5.2}$$

[Может показаться, что (6.5.2) не перекрывает (6.5.1), поскольку носитель $\varphi(x+y)$ обязательно стремится к бесконечности в $\mathbb{R}^{2n}$ в направлениях $x+y=\text{const}$. Однако для того, чтобы согласовать эти уравнения, нужно всего лишь, чтобы $\psi(x, y)$ совпадала с $\varphi(x+y)$ в некоторой прямоугольной области в $\mathbb{R}^{2n}$, определенной носителями $f(x)$ и $g(y)$, а вне этой области ψ можно положить равной нулю.]

Этот вопрос в такой общей форме связан с так называемым прямым произведением двух распределений. Левая часть (6.5.2) как линейный функционал, определенный для всех ψ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, описывает распределение на $\mathbb{R}^{2n}$, которое мы обозначим через $f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$ и назовем *прямым произведением* f и g. Аналогично правая часть (6.5.2) определяет $g(\mathbf{y})f(\mathbf{x})$. Таким образом, рассматриваемый вопрос заключается в следующем: является ли прямое произведение коммутативным?

[В некоторых простых случаях мы уже использовали прямое произведение, например $\delta(x)\delta(y)$, где равенство (6.5.2) очевидно.]

Тот же вопрос возникает, когда f является распределением на $\mathbb{R}^n$, а g—на $\mathbb{R}^m$; тогда $f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})$ и $g(\mathbf{y})f(\mathbf{x})$ представляют собой распределения на $\mathbb{R}^{n+m}$. Можно поставить также вопрос об ассоциативности: верно ли, что

$$f(\mathbf{x})[g(\mathbf{y})h(\mathbf{z})]=[f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})]h(\mathbf{z})? \qquad (6.5.3)$$

На все эти вопросы отвечает (утвердительно) *теорема Л. Шварца о ядре*. Сначала заметим, что (6.5.2), очевидно, справедливо в частном случае $\psi(\mathbf{x},\mathbf{y})=\psi(\mathbf{x})\chi(\mathbf{y})$, ибо тогда обе части суть просто

$$\langle f, \psi\rangle\langle g, \chi\rangle, \qquad (6.5.4)$$

т. е. *билинейный* функционал от ψ и χ. Мы сформулируем теорему Шварца без доказательства.

Теорема о ядре. *Пусть $B[\psi, \chi]$—билинейный функционал, определенный для пробных функций ψ и χ на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ и непрерывный по каждому аргументу относительно сходимости типа $\xrightarrow{\mathcal{D}}$. Тогда существует единственный линейный функционал $L(\varphi)$, определенный для пробных функций $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ на $\mathbb{R}^{n+m}$, также непрерывный относительно $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ и такой, что*

$$L[\psi(\mathbf{x})\chi(\mathbf{y})]=B[\psi,\chi] \quad \forall\psi,\chi. \qquad (6.5.5)$$

Это утверждение остается в силе при замене C_0^∞ на $\mathcal{S}$ и $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ на $\xrightarrow{\mathcal{S}}$, а также для других типов непрерывности функционалов.

Если $B[\psi, \chi]$ взят в виде (6.5.4), мы выводим коммутативность прямого произведения из единственности L, потому что, как указано выше, билинейные функционалы, соответствующие обеим частям (6.5.2), одинаковы.

Повторно применяя теорему, мы заключаем, что мультилинейный функционал $M[\psi_1, \ldots, \psi_k]$ определяет единственный линейный функционал $L(\varphi)$, такой, что

$$L[\psi_1(\mathbf{x}_1)\ldots\psi_k(\mathbf{x}_k)]=M[\psi_1,\ldots,\psi_k] \quad \forall\psi_1,\ldots,\psi_k. \qquad (6.5.6)$$

Трилинейный случай показывает ассоциативность прямого произведения.

Возвращаясь к (6.5.1), мы непосредственно выводим коммутативность и ассоциативность для свертки распределений с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$:

$$f*g=g*f, \quad f*(g*h)=(f*g)*h. \tag{6.5.7}$$

Некоторые авторы записывают прямое произведение в виде $f(\mathrm{x})\times g(\mathrm{y})$, но нет уверенности в необходимости этого, поскольку для обычных функций так не делают.

Дальнейшее обсуждение и обобщение этой теоремы см. в книге Гельфанда и Виленкина [1961] (Обобщенные функции, вып. 4).

Для распределений с некомпактным носителем свертка, если она существует, может не быть ассоциативной. Это верно уже для функций. Положим, что

$$\begin{matrix} f(x)\equiv 1, \\ g(x)=xe^{-x^2}, \end{matrix} \qquad h(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad x>0, \\ 0 & \text{при} \quad x<0, \end{cases} \tag{6.5.8}$$

тогда непосредственные вычисления дают $f*(g*h)=\mathrm{const}\neq 0$, $(f*g)*h\equiv 0$. Однако ассоциативность имеет место, когда два распределения из f, g, h имеют компактный носитель или, в более общем случае, когда эти носители связаны надлежащим образом.

Для того чтобы определить свертку через прямое произведение, т. е.

$$\langle f*g,\ \varphi\rangle=\langle f(\mathrm{x})\,g(\mathrm{y}),\ \varphi(\mathrm{x}+\mathrm{y})\rangle \tag{6.5.9}$$

для всех $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, должно быть возможным найти пробную функцию $\psi(\mathrm{x},\ \mathrm{y})\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ такую, что $\varphi(\mathrm{x}+\mathrm{y})=\psi(\mathrm{x},\ \mathrm{y})$ для всех точек x, y носителя прямого произведения, т. е. для всех точек множества

$$\mathrm{supp}(f)\times\mathrm{supp}(g). \tag{6.5.10}$$

Это требование состоит в следующем: если $\boldsymbol{R}$ — любая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемая как носитель φ, то пересечение множества (6.5.10) с множеством, задаваемым условием $\mathrm{x}+\mathrm{y}\in\boldsymbol{R}$ («слой» под углом 45° к осям), должно быть ограниченным множеством. Тогда мы можем выбрать $\psi(\mathrm{x},\ \mathrm{y})=\varphi(\mathrm{x}+\mathrm{y})$ на этом множестве и положить $\psi\to 0$ гладким образом вне множества.

Для распределений на $\mathbb{R}$ (см. упражнение 1 § 6.2) данное условие выполняется, если носители обоих распределений f и g ограничены снизу (или сверху) на $\mathbb{R}$. Обобщение для распределений на $\mathbb{R}^n$ состоит в том, что оба распределения f и g должны иметь носители (которые могут простираться до бесконечности), лежащие в круговом конусе в $\mathbb{R}^n$ с полууглом раствора меньше $\pi/2$. Если носители трех распределений f, g и h лежат в таком конусе, то $f*(g*h)=(f*g)*h$.

6.6. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛАПЛАСИАНА

На основании многих классических примеров, в которых может быть использовано разделение переменных, естественно ожидать, что для задачи

$$\nabla^2 u + \lambda u = 0$$

в Ω с граничным условием $u=0$ на $\partial\Omega$ всегда существует полная ортонормированная система $\{u_j\}_1^\infty$ собственных функций с соответствующими собственными значениями $\{\lambda_j\}$, такими, что $\lambda_j \leqslant \lambda_{j+1}$ и $\lambda_j \to \infty$ при $j \to \infty$.

Классический вариационный метод для этой задачи, не связанный с разделением переменных, основан на последовательной минимизации *интеграла Дирихле*

$$D(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 d^n\mathbf{x} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, d^n\mathbf{x} \tag{6.6.1}$$

при различных ограничениях на функцию u. Например, основная собственная функция $u_1(\mathbf{x})$ (соответствующая наименьшему собственному значению λ_1) получается минимизацией $D(u)$ при следующих ограничениях:

(1) $$\int_\Omega u^2 d^n\mathbf{x} = 1, \tag{6.6.2}$$

(2) $$u = 0 \text{ на } \partial\Omega \tag{6.6.3}$$

при допущении, что такая минимизирующая функция $u_1(\mathbf{x})$ существует и достаточное число раз дифференцируема. А именно, пусть $u_1 + \delta u$ — любая близкая функция, которая также обращается в нуль на границе. Ограничиваясь первым порядком малости, из (6.6.1) и (6.6.2) получаем

$$\int \nabla u_1 \cdot \nabla (\delta u) \, d^n\mathbf{x} = 0, \tag{6.6.4}$$

$$\int u_1 \delta u \, d^n\mathbf{x} = 0. \tag{6.6.5}$$

Поскольку $\delta u = 0$ на $\partial\Omega$, интегрирование по частям в (6.6.4) дает

$$-\int (\nabla^2 u_1) \, \delta u \, d^n\mathbf{x} = 0.$$

Следовательно,

$$\int_\Omega (\nabla^2 u_1 + \lambda u_1) \, \delta u \, d^n\mathbf{x} = 0 \tag{6.6.6}$$

для любого значения так называемого множителя Лагранжа λ. Уравнение (6.6.5) показывает, что функция δu должна быть ортогональна u_1, но в остальном она является произвольной гладкой функцией, которая обращается в нуль на $\partial\Omega$. Однако если λ выбрано так, что $\nabla^2 u_1 + \lambda u_1$ ортогонально u_1, т. е. если λ определяется из условия

$$\int_\Omega (\nabla^2 u_1 + \lambda u_1)\, u_1 d^n\mathbf{x} = 0, \tag{6.6.7}$$

то (6.6.6) имеет силу независимо от того, ортогональна δu к u_1 или нет. Следовательно,

$$\nabla^2 u_1 + \lambda u_1 = 0 \quad \text{в } \Omega; \tag{6.6.8}$$

это и есть требуемое уравнение для собственной функции (если положить $\lambda_1 = \lambda$) — *уравнение Эйлера — Лагранжа* данной вариационной задачи.

Следующие собственные функции получаются подобным образом. Например, после того как собственные функции $u_1, \ldots, u_{j-1}$ найдены, u_j будет той функцией u, которая минимизирует интеграл Дирихле (6.6.1) при условиях

$$\int_\Omega u^2 d^n\mathbf{x} = 1, \quad \int_\Omega u_k u d^n\mathbf{x} = 0, \quad k = 1, \ldots, j-1,$$

$$u(\mathbf{x}) = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Вычисления, используемые в вариационном методе, подробно проводятся в § 6.8, где доказывается существование минимизирующих функций.

Аналогично решение $V(\mathbf{x})$ задачи Дирихле (6.4.3), (6.4.4), когда оно существует, является функцией u, которая минимизирует интеграл (6.6.1) при условии, что $u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ на границе $\partial\Omega$.

Существование функции $u(\mathbf{x})$, минимизирующей (6.6.1) при различных условиях, известно как *принцип Дирихле* и считалось очевидным до конца девятнадцатого столетия, когда были найдены противоречащие примеры для некоторых специальных форм границы $\partial\Omega$. При подходящих ограничениях на границу, таких, как условие внешнего конуса, приведенное в § 6.4, существование минимизирующих функций доказывалось различными математиками, начиная с Гильберта в 1899 г. (см. книгу Куранта [1950]).

Если условие конуса нарушено, то минимизирующей функции может и не быть. Например, если достаточно острая игла, диаметр которой равен, скажем, $ae^{-b/z}$, где z — расстояние от некоторой точки, вонзается в область, то, вообще говоря, не существует решения задачи Дирихле. Простейший пример такого случая, когда игла одномерна, рассмотрен в следующем упражнении.

Упражнение

1. Рассмотрим область Ω, изображенную на рис. 6.5, для которой частью границы $\partial\Omega$ является прямолинейный отрезок вдоль оси очень длинного замкнутого цилиндра. Допустим, что граничная функция $f(\mathbf{x})$ равна нулю на этом

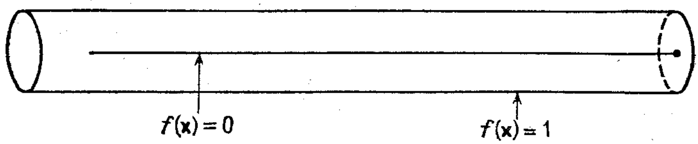

Рис. 6.5. Задача Дирихле, не имеющая решения.

отрезке и равна единице на остальной части границы. Предположим, что «пробная функция» $u(\mathbf{x})$ в интеграле Дирихле (6.6.1) взята в виде функции, зависящей лишь от радиуса r (исключая окрестности концов), а именно

$$u=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant r\leqslant \varepsilon, \\ \dfrac{\ln(r/\varepsilon)}{\ln(a/\varepsilon)} & \text{при } \varepsilon\leqslant r\leqslant a, \end{cases}$$

где a — радиус цилиндра, а ε — параметр из $(0, a)$. Покажите, что интеграл (6.6.1) $\longrightarrow 0$ при $\varepsilon\longrightarrow 0$, если пренебречь концевыми эффектами. Отсюда последует, что если бы существовала минимизирующая функция u, то она удовлетворяла бы уравнению $\nabla u=0$, т. е. была бы постоянной, а значит, не могла бы одновременно удовлетворить граничным условиям и на оси, и на цилиндре.

6.7. ТЕОРЕМА КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА W^1

Классическая теорема Арцела (или Асколи — Арцела) утверждает, что любая равномерно ограниченная и равностепенно непрерывная последовательность функций на компактной области в $\mathbb{R}^n$ содержит сходящуюся (фактически равномерно сходящуюся) подпоследовательность (см. книгу Куранта и Гильберта [1953]) или книгу Данфорда и Шварца [1958]). В частности, эта теорема применима к функциям, имеющим первые производные, которые тоже ограничены общей гранью K, ибо тогда функции равностепенно непрерывны. Эта теорема используется для доказательства существования решения некоторых вариационных задач. Для вариационной задачи лапласиана, описанной в предыдущем параграфе, нужна аналогичная теорема, известная как лемма Реллиха, в которой функция и ее первые производные ограничиваются не поточечно, а по L^2-норме и подпоследовательность сходится не поточечно, а в пространстве L^2.

Говорят, что функции u образуют равностепенно непрерывное семейство, если разности $u(x+y)-u(x)$ ограничены для данного y величиной $\varepsilon(y)$, одинаковой для всех функций семейства и всех x, и эта величина стремится к нулю, когда y стремится к нулю. В настоящей теореме мы используем границу для разностей $u(x+y)-u(x)$ в смысле L^2, а не просто границу, равномерную по x, как будет показано в приведенной ниже лемме 1.

Пусть $W^1=W^1(\mathbb{R}^n)$ — пространство Соболева, рассмотренное в § 5.11, а именно гильбертово пространство, состоящее из всех $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$, которые имеют конечные значения нормы $\|u\|_1$, задаваемой в виде

$$\|u\|_1^2=\|u\|^2+\|\nabla u\|^2, \tag{6.7.1}$$

где $\|u\|$ — норма в L^2, а $\|\nabla u\|^2$ определяется так:

$$\|\nabla u\|^2 \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n}\|\partial u/\partial x_k\|^2. \tag{6.7.2}$$

Пусть $K>0$. Обозначим через $\mathcal{K}$ множество элементов u из W^1, для которых $\|u\|_1\leqslant K$. Для любого такого u $\|u\|\leqslant K$ и $\|\nabla u\|\leqslant K$.

Лемма 1. *Пусть $u\in\mathcal{K}$. Тогда для любого* $\mathbf{y}$ *и любого* $\delta>0$

$$\|T_{\mathbf{y}}u-u\|<K\,|2\mathbf{y}|^{1/2}, \tag{6.7.3}$$

где $T_{\mathbf{y}}$ — оператор сдвига: $(T_{\mathbf{y}}f)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}-\mathbf{y})$.

Доказательство. Пусть $u_\delta=J_\delta u$, где J_δ — оператор сглаживания, описанный в § 2.6. Так как $\|J_\delta f\|\leqslant\|f\|$ для любого f в L^2 (§ 5.10) и $\nabla J_\delta f=J_\delta\nabla f$ (§ 2.6), видно, что u_δ также принадлежит классу $\mathcal{K}$; тогда

$$\|T_{\mathbf{y}}u_\delta-u_\delta\|^2=\|T_{\mathbf{y}}u_\delta\|^2-2\,\mathrm{Re}\,(u_\delta,\ T_{\mathbf{y}}u_\delta)+\|u_\delta\|^2.$$

Первый и третий члены в правой части не зависят от $\mathbf{y}$ (фактически они равны). Далее,

$$\frac{d}{ds}(u_\delta,\ T_{s\mathbf{y}}u_\delta)=\frac{d}{ds}\int\overline{u_\delta(\mathbf{x})}\,u_\delta(\mathbf{x}-s\mathbf{y})\,d^n\mathbf{x}=$$
$$=-\int\overline{u_\delta(\mathbf{x})}\,\mathbf{y}\cdot\nabla u_\delta(\mathbf{x}-s\mathbf{y})\,d^n\mathbf{x}.$$

В силу неравенства Шварца

$$\left|\frac{d}{ds}2\,\mathrm{Re}(u_\delta,\ T_{s\mathbf{y}}u_\delta)\right|\leqslant|2\mathbf{y}|\,\|u_\delta\|\,\|\nabla u_\delta\|\leqslant|2\mathbf{y}|\,K^2$$

и поэтому

$$\|T_{\mathbf{y}}u_\delta-u_\delta\|^2=\int_0^1\frac{d}{ds}\|T_{s\mathbf{y}}u_\delta-u_\delta\|^2\,ds\leqslant|2\mathbf{y}|\,K^2,$$

откуда следует (6.7.3), так как

$$T_{\mathbf{y}}u_\delta-u_\delta=J_\delta(T_{\mathbf{y}}u-u)\xrightarrow{L^2}T_{\mathbf{y}}u-u\quad\text{при }\delta\to0.$$

В § 5.10 было показано, что $u_\delta\to u$ в L^2 при $\delta\to0$ и любом фиксированном u. Но нам сейчас нужно несколько большее.

Лемма 2. *Сходимость $u_\delta \to u$ является равномерной в классе $\mathcal{K}$. То есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$, не зависящее от u, такое, что*

$$\|u_\delta - u\| < \varepsilon \quad \text{для } u \in \mathcal{K}, \ \delta \leqslant \delta_0$$

или, точнее,

$$\|u_\delta - u\|^2 \leqslant 2\delta K^2 \quad \text{для } u \in \mathcal{K}. \tag{6.7.4}$$

Доказательство. Сначала мы покажем, что (6.7.4) справедливо, если u является C_0^∞-функцией ψ из $\mathcal{K}$. Ясно, что

$$|\psi_\delta(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x})| \leqslant \int |\psi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{y}) - \psi(\mathbf{x})| \, \rho(\mathbf{y}) \, d^n \mathbf{y}.$$

Квадрат этого выражения можно выразить в виде произведения двух интегралов, скажем по $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$. Сначала проинтегрируем это произведение по $\mathbf{x}$, т. е, рассмотрим интеграл

$$\int |\psi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{y}_1) - \psi(\mathbf{x})| \cdot |\psi(\mathbf{x} + \delta \mathbf{y}_2) - \psi(x)| \, d^n \mathbf{x}.$$

Используем неравенство Шварца и лемму 1. Так как носитель ρ имеет единичный радиус, необходимо лишь рассмотреть $|\mathbf{y}_1| \leqslant 1$ и $|\mathbf{y}_2| \leqslant 1$. Следовательно, по лемме 1 последнее выражение не превышает $2\delta K^2$. Далее, интегрирование функций $\rho(\mathbf{y}_1)$ и $\rho(\mathbf{y}_2)$ даст единицу, и этим устанавливается, что (6.7.4) справедливо для $u = \psi$. Теперь для данного u из $\mathcal{K}$ мы полагаем $\psi = J_{\delta_1} u$. Функция ψ также принадлежит $\mathcal{K}$, так как, согласно (5.10.1),

$$\|\psi\| = \|J_{\delta_1} u\| \leqslant \|u\|$$

и

$$\|\nabla \psi\| = \|\nabla J_{\delta_1} u\| = \|J_{\delta_1} \nabla u\| \leqslant \|\nabla u\|.$$

Кроме того, $\psi_\delta - \psi = J_{\delta_1}(u_\delta - u)$, поскольку $J_\delta J_{\delta_1} = J_{\delta_1} J_\delta$. Следовательно, $\psi_\delta - \psi \to u_\delta - u$ при $\delta_1 \to 0$, откуда следует (6.7.4).

Пусть теперь $\mathcal{K}(\Omega)$ обозначает множество тех элементов класса $\mathcal{K}$, носители которых принадлежат ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема (лемма Реллиха). *Множество $\mathcal{K}(\Omega)$ условно компактно по L^2-норме, т. е. любая последовательность $\{u_k\}$ элементов из $\mathcal{K}(\Omega)$ содержит подпоследовательность $\{\tilde{u}_k\}$, которая сходится в L^2.*

Замечание. Слово «условно» указывает на то, что предел последовательности $\{\tilde{u}_k\}$ необязательно содержится в $\mathcal{K}$ и даже в W^1.

Доказательство. Сначала мы покажем, что элементы $\mathcal{K}(\Omega)$, будучи подходящим образом сглажены, равностепенно непрерывны. Для любого $u \in \mathcal{K}(\Omega)$ $u_\delta = J_\delta u$ определено в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет уравнению

$$u_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - u_\delta(\mathbf{x}) = J_\delta(T_\mathbf{y} u - u) = \langle T_\mathbf{y} u - u, \ \rho_{\mathbf{x}, \delta} \rangle$$

(см. § 2.6). Поэтому

$$|u_\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - u_\delta(\mathbf{x})| \leqslant \|T_\mathbf{y} u - u\| \, \|\rho_{\mathbf{x}, \delta}\|,$$

но

$$\|\rho_{x,\,\delta}\|^2=\int\left|\rho\left(\frac{z}{\delta}\right)\left(\frac{1}{\delta}\right)^n\right|^2 d^n z=\frac{\text{const}}{\delta^n},$$

т. е.

$$|u_\delta(x-y)-u_\delta(x)|\leqslant K\,|2y|^{1/2}\frac{\text{const}}{\delta^{n/2}}.$$

Таким образом, функции $J_\delta u=u_\delta(x)$, $u\in\mathscr{K}(\Omega)$, равностепенно непрерывны для любого $\delta>0$. Легко показать, что они также равномерно ограничены для любого $\delta>0$. Наконец, они отличны от нуля только в ограниченной области $\Omega(\delta)$, которая расширена вне Ω на расстояние δ. Следовательно, к этим функциям может быть применена теорема Арцела. Пусть $\{u_k\}$ — произвольная последовательность элементов в $\mathscr{K}(\Omega)$. Нам нужно показать, что существует подпоследовательность, которая сходится в L^2. Используем индукцию:

(1) Возьмем $\delta=1$, $J_\delta=J_1$ и допустим, что $\{u_k^1\}$ является такой подпоследовательностью $\{u_k\}$, что $\{J_1u_k^1\}$ сходится.

(2) Возьмем $\delta=1/2$, $J_\delta=J_{1/2}$ и допустим, что $\{u_k^2\}$ является такой подпоследовательностью $\{u_k^1\}$, что $\{J_{1/2}u_k^2\}$ сходится.

. . . .

(q) Возьмем $\delta=1/q$, $J_\delta=J_{1/q}$ и допустим, что $\{u_k^q\}$ является такой подпоследовательностью $\{u_k^{q-1}\}$, что $\{J_{1/q}u_k^q\}$ сходится. Тогда диагональная подпоследовательность $\{u_k^k\}_{k=1}^\infty$ такова, что $\{J_\delta u_k^k\}$ сходится для любого $\delta=1$, $1/2$, ..., и мы хотим показать, что и сама $\{u_k^k\}$ сходится. Задав $\varepsilon>0$, мы выберем такое $\delta=1/q$, что $\|J_\delta u-u\|<\varepsilon$ для всех $u\in\mathscr{K}$ в силу леммы 2, и для такого δ мы выберем L, такое, что

$$\|J_\delta(u_k^k-u_l^l)\|<\varepsilon\quad\text{при}\quad k,\ l>L.$$

Тогда

$$\|u_k^k-u_l^l\|<2\varepsilon\quad\text{при}\quad k,\ l>L,$$

а отсюда следует, что подпоследовательность $\{u_k^k\}$, содержащаяся в $\{u_k\}$, сходится по L^2-норме, что и требовалось доказать.

Упражнение

1. Покажите, что если $u\in W^1(\mathbb{R}^n)$, то $J_\delta u\longrightarrow u$ по норме $\|\ \|_1$, и что это справедливо относительно ограничения $J_\delta u$ областью Ω, если $u\in W^1(\Omega)$.

6.8. СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Сейчас мы установим существование и другие свойства решений вариационной задачи из § 6.6. Как и в двух предыдущих параграфах, Ω является ограниченной областью в $\mathbb{R}^n$ с кусочно гладкой гиперповерхностью $\partial\Omega$, $L^2(\Omega)$ — основное гильбертово пространство, а W^1 — соответствующее пространство Соболева, причем подпространство W_0^1 пространства W^1 состоит из элементов, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Согласно определению (6.7.2), интеграл Дирихле $D(u)$ означает $\|\nabla u\|^2$. Мы будем действовать по индукции и допустим, что первые $j-1$ собственные функции u_k и соответствующие собственные значения λ_k уже найдены ($k=1, \ldots, j-1$) и что каждая u_k принадлежит W_0^1 и удовлетворяет уравнению $\nabla^2 u_k + \lambda_k u_k = 0$ в Ω. В качестве элементов из $L^2(\mathbb{R}^n)$ функции u_k считаются имеющими носитель в $\overline{\Omega}$, т. е. обращающимися в нуль вне Ω. Наше построение таково, что каждая новая собственная функция нормирована и ортогональна к предыдущим, т. е. мы полагаем, что $u_1, \ldots, u_{j-1}$ образуют ортонормированную систему. Согласно § 6.6, нужно найти новую собственную функцию, т. е. функцию, которая минимизирует $\|\nabla u\|^2$ при только что упомянутых условиях. Поэтому мы определяем M как соответствующее подпространство из W_0^1:

$$M = \{u \in W_0^1\colon\ (u_k, u) = 0\ (k=1, \ldots, j-1)\}. \tag{6.8.1}$$

Положим

$$\lambda = \inf \{\|\nabla u\|^2\colon\ u \in M,\ \|u\| = 1\} \tag{6.8.2}$$

и покажем, что эта нижняя грань действительно достигается.

Теорема. *Существует элемент* $\tilde{u} \in M$, *такой, что* $\|\tilde{u}\| = 1$, $\|\nabla\tilde{u}\|^2 = \lambda$ *и* $\nabla^2\tilde{u} + \lambda\tilde{u} = 0$ *в* Ω.

Доказательство. По определению нижней грани существует последовательность элементов $u \in M$ с нормой $\|u\| = 1$, на которых $\|\nabla u\|^2$ сходится к λ (сверху). Если $K > \sqrt{1+\lambda}$, то члены этой последовательности, начиная с некоторого элемента, принадлежат множеству $\mathcal{K}$, описанному в предыдущем параграфе. Поэтому, согласно теореме компактности, существует сходящаяся в L^2 подпоследовательность, которую мы обозначим через $\{v^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$. Иначе говоря, каждая функция $v^{(l)}$ принадлежит M и $\|\nabla v^{(l)}\|^2 \longrightarrow \lambda$, $v^{(l)} \longrightarrow \tilde{u} \in L^2(\Omega)$ при $l \longrightarrow \infty$. В силу непрерывности скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в $L^2(\Omega)$ элемент $\tilde{u}$ удовлетворяет условиям

$$\|\tilde{u}\| = 1, \quad (u_k, \tilde{u}) = 0 \quad (k=1, \ldots, j-1), \tag{6.8.3}$$

так как каждая $v^{(l)}$ удовлетворяет им. Пусть w — произвольный элемент из M. Поскольку λ можно характеризовать как нижнюю грань $\|\nabla u\|^2/\|u\|^2$ для $u \in M$, имеем

$$\|\nabla v^{(l)} + \varepsilon\nabla w\|^2 - \lambda\|v^{(l)} + \varepsilon w\|^2 \geqslant 0 \tag{6.8.4}$$

для любого ε и любого $l = 1, 2, \ldots$; отсюда следует, что

$$[\|\nabla v^{(l)}\|^2 - \lambda\|v^{(l)}\|^2] + 2\,\mathrm{Re}\,[\varepsilon(\nabla v^{(l)}, \nabla w) - \lambda\varepsilon(v^{(l)}, w)] + {} + |\varepsilon|^2[\|\nabla w\|^2 - \lambda\|w\|^2] \geqslant 0. \tag{6.8.5}$$

При $l \longrightarrow \infty$ нижний предел левой части этого неравенства неотрицателен. Более того, первый член в квадратных скобках стремится к нулю и $(v^{(l)}, w) \longrightarrow (\tilde{u}, w)$. Таким образом,

$$\liminf 2\,\mathrm{Re}\,\varepsilon(\nabla v^{(l)}, \nabla w) - 2\lambda\,\mathrm{Re}\,\varepsilon(\tilde{u}, w) + |\varepsilon|^2[\|\nabla w\|^2 - \lambda\|w\|^2] \geqslant 0.$$

Далее, последовательно полагая ε равным ε_0, $-\varepsilon_0$, $i\varepsilon_0$, $-i\varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$, мы достигаем верхнего и нижнего пределов на вещественной и мнимой частях $(\nabla v^{(l)}, \nabla w)$. В пределе $\varepsilon_0 \longrightarrow 0$ имеем

$$(\nabla v^{(l)}, \nabla w) \longrightarrow \lambda(\tilde{u}, w) \quad \text{при} \quad l \longrightarrow \infty. \tag{6.8.6}$$

Мы используем этот результат дважды. Сначала отметим, что для любой функции φ в C_0^∞ (φ принадлежит W_0^1) функция

$$w=\varphi-\sum_{k=1}^{j-1}(u_k,\ \varphi)\,u_k$$

принадлежит M. Кроме того,

$$\nabla^2 w=\nabla^2\varphi+\sum_{k=1}^{j-1}\lambda_k\,(u_k,\ \varphi)\,u_k.$$

Поскольку w и все ее первые частные производные принадлежат $L^2(\Omega)$, а $v^{(l)}\in W_0^1$, можно использовать формулу интегрирования по частям (5.12.5) для преобразования выражения в левой части (6.8.6) в $-(v^{(l)},\ \nabla^2 w)$. Именно здесь мы используем граничное условие $v^{(l)}=0$ на $\partial\Omega$ или принадлежность $v^{(l)}$ подпространству W_0^1. Таким образом, поскольку $v^{(l)}$ и $\tilde{u}$ ортогональны $u_1, \ldots, u_{j-1}$, соотношение (6.8.6) дает

$$-(v^{(l)},\ \nabla^2\varphi)\longrightarrow\lambda\,(\tilde{u},\ \varphi).$$

Следовательно, $(\tilde{u},\ \nabla^2\varphi+\lambda\varphi)=0$, а значит, по определению производной распределения

$$\nabla^2\tilde{u}+\lambda\tilde{u}=0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{6.8.7}$$

что является одним из искомых результатов. Теперь возьмем в качестве w в (6.8.6) любую функцию $v^{(k)}$. Тогда

$$(\nabla v^{(l)},\ \nabla v^{(k)})\longrightarrow\lambda\,(\tilde{u},\ v^{(k)}) \quad \text{при} \quad l\longrightarrow\infty,$$

иначе говоря, если k также устремить к бесконечности, то

$$(\nabla v^{(l)},\ \nabla v^{(k)})\longrightarrow\lambda\,\|\tilde{u}\|^2=\lambda \quad \text{при} \quad k,\ l\longrightarrow\infty,$$

откуда следует, что $\{\nabla v^{(l)}\}$ является последовательностью Коши в L^2. (Это значит, что $\{(\partial/\partial x_q)\,v^{(l)}\}_{l=1}^\infty$ при каждом q является последовательностью Коши.) По определению производной распределения предел $\nabla v^{(l)}$ равен $\nabla\tilde{u}$, и мы заключаем, что $\nabla\tilde{u}\in L^2$, т. е. $\tilde{u}$ принадлежит пространству Соболева W^1, а $v^{(l)}\longrightarrow\tilde{u}$ по норме $\|\cdot\|_1$ пространства W^1, и что $\|\nabla\tilde{u}\|^2=\lambda$. Поскольку каждая функция $v^{(l)}\in W_0^1$, которое представляет собой замкнутое многообразие в W^1, то $\tilde{u}\in W_0^1$. Итак, $\tilde{u}$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Нетрудно видеть, что собственные функции, полученные таким путем, образуют полную систему в $L^2(\Omega)$. Во-первых, они ортонормированы по построению. Во-вторых, после того как получена любая их совокупность $\{u_1, u_2, \ldots\}$, путем указанного построения можно получать дальнейшие собственные функции, если размерность многообразия M, ортогонального этим функциям, отлична от нуля, тогда как при $\dim M=0$ в W_0^1 не найдется функции, ортогональной всем собственным функциям. Относительно L^2-нормы W_0^1 плотно в $L^2(\Omega)$, а значит, система собственных функций является полной.

6.9. ЗАДАЧА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ И СОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

В статье Сэттинджера [1970] сформулирована следующая задача: пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$; найти гладкое векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$, удовлетворяющее уравнениям

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \nabla p \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{6.9.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{6.9.2}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \tag{6.9.3}$$

для некоторого числа λ и некоторого скалярного поля $p(\mathbf{x})$; тогда λ называется *собственным значением* данной задачи, а $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — *собственной функцией*.

В полной задаче устойчивости в (6.9.1) к оператору Лапласа добавлены члены низшего порядка, состоящие из произведений первых производных на функции и описывающие основное течение, устойчивость которого должна быть определена. В методе Сэттинджера решения получаются путем соответствующего возмущения решений данной задачи.

Кажется естественным ожидать, что сформулированная задача должна иметь полную систему собственных функций, основываясь на сравнении с задачей электромагнитных колебаний резонатора Ω, для которого граница $\partial\Omega$ — идеальный проводник, а $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ — электрическое поле. Известно, что эта задача является самосопряженной и имеет полную ортонормированную систему собственных функций. Эта задача отличается от рассматриваемой, во-первых, тем, что $\nabla p = 0$, а это ограничивает свободу выбора $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, а во-вторых, тем, что единственным граничным условием является обращение в нуль на $\partial\Omega$ тангенциальной составляющей $\mathbf{u}$, что увеличивает свободу выбора $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Мы таким образом как бы обмениваем одну функцию на $\partial\Omega$ (p удовлетворяет уравнению Лапласа и поэтому полностью определяется своими значениями на $\partial\Omega$) на другую такую функцию — нормальную составляющую $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на $\partial\Omega$.

Сначала мы формально проведем вычисления, а затем покажем, как эти действия могут быть обоснованы теорией распределений. Интеграл Дирихле обобщается при помощи введения кроме скалярного произведения векторов

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}\, d^3\mathbf{x} \tag{6.9.4}$$

скалярного произведения, включающего диадики,

$$(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) = \int_\Omega \nabla \bar{\mathbf{u}} : \nabla \mathbf{v}\, d^3\mathbf{x}, \tag{6.9.5}$$

где двоеточие указывает на двойное скалярное произведение

$$\nabla \bar{\mathbf{u}} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{k, j=1}^{3} (\partial_j \bar{u}_k)(\partial_j v_k). \tag{6.9.6}$$

Обобщенный интеграл Дирихле имеет вид

$$D(\mathbf{u}) = \|\nabla\mathbf{u}\|^2 = (\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}). \tag{6.9.7}$$

Наименьшее собственное значение λ является минимумом $D(\mathbf{u})$ при дополнительном и граничном условиях (6.9.2), (6.9.3) и при ограничении $\|\mathbf{u}\| = 1$, где $\|\mathbf{u}\|$ — норма, определенная при помощи (6.9.4). Собственная j-я функция строится так, чтобы она была ортогональна предыдущим $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{j-1}$ и нормирована, т. е. мы предполагаем, что все уже построенные функции образуют ортонормированную систему. Обозначим через $\boldsymbol{M}$ соответствующее пространство векторных полей

$$\boldsymbol{M} = \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \colon (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}) = 0 \; (k = 1, \ldots, j-1), \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \; \mathbf{u} = 0 \text{ на } \partial\Omega\}. \tag{6.9.8}$$

(В дальнейшем мы определим это пространство более точно.) Допустим, что минимум $D(\mathbf{u})$ для $\mathbf{u} \in \boldsymbol{M}$ и $\|\mathbf{u}\| = 1$ получен при $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$. Тогда, полагая $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{w}$ и рассматривая $\mathbf{w} \in \boldsymbol{M}$ как малую вариацию, при помощи того же вариационного метода, как в § 6.6, получаем

$$\int_\Omega [\nabla\tilde{\mathbf{u}} \colon \nabla\mathbf{w} - \lambda\tilde{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{w}]\, d^3\mathbf{x} = 0 \quad \forall\mathbf{w} \in \boldsymbol{M},$$

где λ — множитель Лагранжа. Переходя к составляющим векторов, имеем

$$\sum_{j=1}^{3} \int_\Omega [\nabla\tilde{u}_j \cdot \nabla w_j - \lambda\tilde{u}_j w_j]\, d^3\mathbf{x} = 0.$$

Так как каждая компонента $\mathbf{w}$ равна нулю на $\partial\Omega$, мы можем проинтегрировать по частям и найти, что

$$\int_\Omega [\nabla^2\tilde{\mathbf{u}} + \lambda\tilde{\mathbf{u}}]\cdot\mathbf{w}\, d^3\mathbf{x} = 0 \quad \forall\mathbf{w} \in \boldsymbol{M}. \tag{6.9.9}$$

В этом уравнении можно отбросить ограничение, заключающееся в том, что $\mathbf{w}$ должна быть ортогональна найденным собственным функциям, ибо если $\mathbf{u}_k$ — одна из таких функций, то

$$\int [\nabla^2\tilde{\mathbf{u}} + \lambda\tilde{\mathbf{u}}]\cdot\mathbf{u}_k d^3\mathbf{x} = \int \tilde{\mathbf{u}}\cdot[\nabla^2\mathbf{u}_k + \lambda\mathbf{u}_k]\, d^3\mathbf{x} = (\lambda - \lambda_k)\int \tilde{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u}_k\, d^3\mathbf{x},$$

а последний интеграл равен нулю из-за ортогональности $\tilde{\mathbf{u}}$ функциям $\mathbf{u}_k$. Поэтому (6.9.9) выполняется для произвольного соленоидального поля $\mathbf{w}$, которое обращается в нуль на границе. В частности, если $\mathbf{w} = \nabla\times\boldsymbol{\varphi}$, где $\boldsymbol{\varphi}$ — произвольное векторное поле с носителем в Ω, то интегрирование по частям показывает, что $\nabla\times(\nabla^2\tilde{\mathbf{u}} + \lambda\tilde{\mathbf{u}})$ ортогонально любому такому $\boldsymbol{\varphi}$ и поэтому равно нулю, откуда следует, что $\nabla^2\tilde{\mathbf{u}} + \lambda\tilde{\mathbf{u}}$ является градиентом, т. е.

удовлетворяет (6.9.1). (Напомним, что область Ω предполагается односвязной.)

Наоборот, пусть $\tilde{\mathbf{u}}$ удовлетворяет уравнению (6.9.1), является соленоидальным полем и обращается в нуль на границе. Тогда мы можем подставить в формулу (6.9.9) $\mathbf{w}=\tilde{\mathbf{u}}$ и интегрированием по частям получить, что

$$D(\tilde{\mathbf{u}})=\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}\|^2=\lambda\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2.$$

Для того чтобы обосновать все шаги проведенных выше вычислений, мы сначала будем интерпретировать (6.9.4), (6.9.5) с помощью обычного скалярного произведения в $L^2(\Omega)$:

$$(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=\sum_{j=1}^{3}(u_j,\ v_j), \tag{6.9.10}$$

$$(\nabla\mathbf{u},\ \nabla\mathbf{v})=\sum_{j,\,k=1}^{3}(\partial_j u_k,\ \partial_j v_k). \tag{6.9.11}$$

Обозначим через H гильбертово пространство всех векторных полей в Ω с конечной нормой $\|\mathbf{u}\|$, а через H^1 — соответствующее пространство Соболева полей с конечными значениями нормы $\|\mathbf{u}\|_1$, определяемой следующим равенством:

$$\|\mathbf{u}\|_1^2=\|\mathbf{u}\|^2+\|\nabla\mathbf{u}\|^2. \tag{6.9.12}$$

Элемент $\mathbf{u}$ из H принадлежит H^1, если все девять частных производных $\partial_j u_k$ принадлежат $L^2(\Omega)$.

Согласно векторному анализу, любое достаточно гладкое векторное поле может быть представлено в виде суммы *соленоидального* (бездивергентного) поля и *безвихревого* (потенциального) поля. В силу условия (6.9.2) нам желательно найти подпространство пространств H и H^1, состоящие из соленоидальных полей. Однако классическое разложение неоднозначно: можно добавить к одной части и вычесть из другой градиент любой гармонической функции — если $\nabla^2\psi=0$, то $\nabla\psi$ одновременно и соленоидально, и потенциально. Для однозначности разложения нужно использовать граничное условие на $\partial\Omega$ (или на бесконечности). В некоторой степени произвольно мы выбираем условие, состоящее в том, что нормальная составляющая соленоидальной части обращается в нуль на $\partial\Omega$, поскольку это условие подразумевается в (6.9.3). Итак, мы хотим определить подпространство H_σ^1 пространства H^1 (индекс σ означает «соленоидальный») со следующим свойством: гладкое поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ принадлежит H_σ^1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{u}&=0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}&=0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.9.13}$$

Для гладкого поля $\mathbf{u}$ условия (6.9.13) эквивалентны условию

$$\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi\, d^3\mathbf{x}=0 \quad \forall\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega}), \tag{6.9.14}$$

что легко получить интегрированием по частям. (Сначала нужно рассмотреть φ, обращающуюся в нуль на $\partial\Omega$, и установить, что если (6.9.14) справедливо, то $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$ в Ω. Затем, рассматривая произвольную φ, можно установить, что $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$ на $\partial\Omega$.) Итак, мы определяем

$$\boldsymbol{H}_\sigma=\{\mathbf{u}\in\boldsymbol{H}\colon\ (\nabla\varphi,\ \mathbf{u})=0\quad \forall\varphi\in C^\infty(\overline{\Omega})\}. \tag{6.9.15}$$

$\boldsymbol{H}_\sigma$ является *замкнутым* линейным многообразием в $\boldsymbol{H}$, а значит, подпространством, потому что оно представляет собой ортогональное дополнение. $\boldsymbol{H}^1_\sigma$ — соответствующее подпространство $\boldsymbol{H}^1$.

Можно рассматривать подпространство (6.9.8) как

$$\boldsymbol{M}=\{\mathbf{u}\in\boldsymbol{H}^1_\sigma\colon\ (\mathbf{u}_k,\ \mathbf{u})=0\ (k=1,\ \ldots,\ j-1),\ \text{каждая компонента } \mathbf{u} \text{ принадлежит } W^1_0\} \tag{6.9.16}$$

и положить

$$\lambda=\inf\{\|\nabla\mathbf{u}\|^2\colon\ \mathbf{u}\in\boldsymbol{M},\ \|\mathbf{u}\|=1\}.$$

Теорема. *Эта нижняя грань достигается, т. е. существует элемент* $\tilde{\mathbf{u}}\in\boldsymbol{M}$, *такой, что* $\|\nabla\tilde{\mathbf{u}}\|^2=\lambda$, $\|\tilde{\mathbf{u}}\|=1$. *Кроме того,*

$$\nabla^2\tilde{\mathbf{u}}+\lambda\tilde{\mathbf{u}}=\nabla p \quad \text{в } \Omega \tag{6.9.17}$$

для некоторого скалярного поля p.

Доказательство (аналогичное доказательству в предыдущем параграфе). Рассмотрим такую последовательность элементов $\mathbf{u}$ в $\boldsymbol{M}$ с $\|\mathbf{u}\|=1$, что $\|\nabla\mathbf{u}\|^2\longrightarrow\lambda$. Пусть $K>\sqrt{1+\lambda}$; тогда, начиная с некоторого элемента последовательности, каждый $\mathbf{u}$ принадлежит множеству $\mathcal{K}$, фигурирующему в теореме компактности § 6.7. Следовательно, существует сходящаяся в L^2 подпоследовательность, которую мы обозначим через $\{\mathbf{v}^{(l)}\}_1^\infty$. В силу непрерывности скалярного произведения предел $\tilde{\mathbf{u}}$ этой подпоследовательности удовлетворяет условиям

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|=1,\quad (\mathbf{u}_k,\ \tilde{\mathbf{u}})=0\quad (k=1,\ \ldots,\ j-1), \tag{6.9.18}$$

поскольку каждый элемент $\mathbf{v}^{(l)}$ удовлетворяет им. С помощью того же рассуждения, что и в предыдущем параграфе (см. (6.8.5), (6.8.6)), мы заключаем, что если $\mathbf{w}$ — произвольный элемент $\boldsymbol{M}$, то

$$(\nabla\mathbf{v}^{(l)},\ \nabla\mathbf{w})\longrightarrow\lambda(\tilde{\mathbf{u}},\ \mathbf{w})\quad \text{при}\quad l\longrightarrow\infty. \tag{6.9.19}$$

Этот результат мы используем тремя способами. Во-первых, положив $\mathbf{w}=\mathbf{v}^{(m)}$, мы установим, что $\{\nabla\mathbf{v}^{(l)}\}$ является последовательностью Коши, и отсюда, как прежде, последует, что ее предел равен $\nabla\tilde{\mathbf{u}}$ и поэтому $\tilde{\mathbf{u}}\in\boldsymbol{H}^1$, а $\mathbf{v}^{(l)}\longrightarrow\tilde{\mathbf{u}}$ в $\boldsymbol{H}^1$. Но $\boldsymbol{M}$ является подпространством $\boldsymbol{H}^1$ (т. е. *замкнутым* линейным многообразием), откуда вытекает, что $\tilde{\mathbf{u}}\in\boldsymbol{M}$. Из (6.9.19) тогда следует, что

$$(\nabla\tilde{\mathbf{u}},\ \nabla\mathbf{w})=\lambda(\tilde{\mathbf{u}},\ \mathbf{w}) \tag{6.9.20}$$

для $\mathbf{w} \in M$ и, в частности, что

$$\|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|^2 = \lambda \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2 = \lambda. \tag{6.9.21}$$

Во-вторых, положим $\mathbf{w}$ в (6.9.20) равным $\mathbf{u}_k$ $(1 \leqslant k \leqslant j-1)$. Так как $(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}_k)=0$, видно, что $(\nabla\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{u}_k)=0$. В-третьих, допустим, что $\boldsymbol{\varphi}$ — любое векторное поле в $C_0^\infty(\Omega)$. Тогда

$$\mathbf{w} = \nabla \times \boldsymbol{\varphi} - \sum_{k=1}^{j-1} (\mathbf{u}_k, \nabla \times \boldsymbol{\varphi})\, \mathbf{u}_k$$

принадлежит M, и мы видим из (6.9.13), что

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \nabla^2 \nabla \times \boldsymbol{\varphi} + \lambda \nabla \times \boldsymbol{\varphi}) = 0,$$

а потому, используя определение производной распределения, получаем

$$\nabla \times (\nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \lambda \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{6.9.22}$$

Из приведенной ниже леммы следует, что

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{u}} + \lambda \tilde{\mathbf{u}} = \nabla p \quad \text{в } \Omega$$

для некоторого скалярного поля p.

Полнота системы собственных функций доказывается так же, как в предыдущем параграфе.

Лемма. *Пусть Ω — односвязная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega$, состоящей из кусочно гладких замкнутых поверхностей и удовлетворяющей условию внешнего конуса. Пусть $\mathbf{v}$ — векторное поле, каждая компонента которого является распределением в $L^2(\Omega)$, причем $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ в Ω. Тогда существует (скалярное) распределение p в Ω такое, что $\mathbf{v} = \nabla p$ в Ω.*

Доказательство. Мы покажем, что для каждого $\delta > 0$ существует распределение $p = p^\delta$, такое, что $\mathbf{v} = \nabla p$ в области Ω_δ, состоящей из точек в Ω, находящихся от $\partial\Omega$ на расстоянии, большем δ. Кроме того, при аккуратном выборе произвольных аддитивных постоянных в p^δ оказывается, что если $0 < \delta' < \delta$, то $p^\delta = p^{\delta'}$ в Ω_δ. Тогда искомое распределение p получается из p^δ при использовании принципа § 3.5. Пусть ψ_0 — фиксированная пробная функция с носителем в некоторой области Ω_{δ_0}, причем $\int_\Omega \psi_0\, d^3\mathbf{x} = 1$. Рассмотрим значения $\delta \leqslant \delta_0$. Для произвольной пробной функции ψ с носителем в Ω_{δ_0} обозначим через $\chi(\mathbf{x})$ решение задачи Пуассона — Неймана

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \chi = \psi - c\psi_0 && \text{в } \Omega_\delta, \\ &\mathbf{n} \cdot \nabla \chi = 0 && \text{на } \partial\Omega_\delta, \\ &\chi(0) = 0, \end{aligned} \tag{6.9.23}$$

где

$$c = \int_\Omega \psi\, d^3\mathbf{x}$$

и декартова система координат выбрана так, что начало координат расположено в некоторой точке Ω_{δ_0}. Эта задача имеет решение, так как интеграл от $\psi - c\psi_0$ равен нулю. Затем мы определим

$$\langle p, \psi \rangle = -\sum_{j=1}^{3} (\bar{v}_j, \partial_j \chi)_{\Omega_\delta} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\delta} J_\varepsilon \mathbf{v} \cdot \nabla \chi\, d^n\mathbf{x}. \tag{6.9.24}$$

Этот предел существует, поскольку $J_\varepsilon \mathbf{v} \to \mathbf{v}$ в $L^2(\Omega_\delta)$. При $0 < \varepsilon < \delta$ мы имеем $\nabla \times J_\varepsilon \mathbf{v} = 0$ в Ω_δ. В таком случае из классического векторного анализа известно, что найдется потенциал $q^\varepsilon(\mathbf{x})$, для которого $J_\varepsilon \mathbf{v} = \nabla q^\varepsilon$ в Ω_δ. Мы выбираем аддитивную постоянную в q^ε из условия $\int q^\varepsilon \psi_0 \, d^n\mathbf{x} = 0$; тогда

$$\langle p, \psi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Omega_\delta} \nabla q^\varepsilon \cdot \nabla \chi \, d^3\mathbf{x} = \lim \int_{\Omega_\delta} q^\varepsilon \nabla^2 \chi \, d^3\mathbf{x} =$$
$$= \lim \int_{\Omega_\delta} q^\varepsilon (\psi - c\psi_0) \, d^3\mathbf{x} = \lim \langle q^\varepsilon, \psi \rangle.$$

Значит, $q^\varepsilon \to p$ при $\varepsilon \to 0$ (сходимость распределений), и поэтому

$$\langle \nabla p, \psi \rangle = -\langle p, \nabla \psi \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \langle q^\varepsilon, \nabla \psi \rangle = \lim \langle \nabla q^\varepsilon, \psi \rangle =$$
$$= \lim \langle J_\varepsilon \mathbf{v}, \psi \rangle = \langle \mathbf{v}, \psi \rangle.$$

Заключение. Для каждого δ существует распределение $p = p^\delta$, такое, что

$$\nabla p = \mathbf{v} \quad \text{в } \Omega_\delta, \quad \langle p, \psi_0 \rangle = 0.$$

Отсюда следует, что при $0 < \delta' < \delta$

$$p^{\delta'} = p^\delta \quad \text{в} \quad \Omega_\delta,$$

что и требовалось доказать.

6.10. УРАВНЕНИЯ КОШИ — РИМАНА. ГАРМОНИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Из теории функций комплексной переменной известно, что если функция $f(z)$ комплексной переменной имеет производную $f'(z)$ для всех z в области Ω, то $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ удовлетворяют уравнениям Коши—Римана в Ω. Обратное утверждение верно только в том случае, когда частные производные $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ относительно $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$ являются непрерывными, как показывает пример

$$f(z) = e^{-1/z^4} \quad \text{при} \quad z \neq 0, \quad f(0) = 0, \tag{6.10.1}$$

в котором уравнения Коши—Римана справедливы на всей z-плоскости. Если уравнения Коши—Римана имеют силу *в смысле распределений*, то, как отмечает П. Д. Лакс (частное сообщение), $f'(z)$ существует; тогда автоматически имеет место непрерывность частных производных и нет необходимости предполагать ее заранее. Необязательно даже допускать, что $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ являются функциями. Если u и v — любые распределения на $\mathbb{R}^2$, которые удовлетворяют уравнениям Коши—Римана в Ω, то они в действительности являются вещественными аналитическими функциями и удовлетворяют этим уравнениям в обычном смысле.

Эквивалентное утверждение гласит, что если некоторое распределение на $\mathbb{R}^2$ удовлетворяет уравнению Лапласа в Ω, т. е. является гармоническим распределением в Ω, то оно представляет собой гармоническую *функцию* $u(x, y)$ в Ω. В таком виде данное утверждение справедливо для $\mathbb{R}^n$.

Теорема. *Распределение f в $\mathbb{R}^n$, которое является гармоническим в области Ω, совпадает в Ω с некоторой гармонической функцией.*

Доказательство. Обозначим через f_δ результат сглаживания f по расстоянию δ при помощи сферически симметричного оператора сглаживания $\rho_\delta(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}/\delta)(1/\delta)^n$, как описано в § 2.6, т. е. положим

$$f_\delta = f * \rho_\delta = \langle f(\mathbf{y}), \quad \rho_\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle. \tag{6.10.2}$$

Тогда $f_\delta = f_\delta(\mathbf{x})$ принадлежит классу C^∞ для любого $\delta > 0$ и стремится к f в смысле сходимости распределений, когда $\delta \longrightarrow 0$. По условию теоремы $\nabla^2 f$ в Ω равно нулевому распределению. Обозначим через Ω_δ несколько меньшую область:

$$\Omega_\delta = \{\mathbf{x} \in \Omega\colon \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) > \delta\}. \tag{6.10.3}$$

Если $\mathbf{x} \in \Omega_\delta$, то $\rho_\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ как функция $\mathbf{y}$ имеет носитель в Ω. Поэтому по правилу дифференцирования свертки

$$\nabla^2 f_\delta = (\nabla^2 f) * \rho_\delta = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\delta. \tag{6.10.4}$$

Значит, f_δ — гармоническая функция в Ω_δ.

Теперь допустим, что $u(\mathbf{x})$ — гармоническая функция в некоторой области Ω'. Мы утверждаем тогда, что

$$u_\delta(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x}) \quad \text{в} \quad \Omega'_\delta. \tag{6.10.5}$$

По теореме о среднем значении из классической теории потенциала для $\mathbf{x} \in \Omega'_\delta$ функция $u(\mathbf{x})$ равна среднему своих значений на любой сфере

$$\{\mathbf{y}\colon |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \text{const} \leqslant \delta\}. \tag{6.10.6}$$

Поскольку оператор сглаживания ρ обладает сферической симметрией, (6.10.5) справедливо.

Наконец, используя эти два результата, покажем, что f_δ не зависит от δ для достаточно малых δ. В самом деле, пусть δ и δ' — любые положительные числа, причем $\delta + \delta' \leqslant \delta_0$ для некоторого $\delta_0 > 0$; тогда

$$f * \rho_\delta * \rho_{\delta'} = f * \rho_{\delta'} * \rho_\delta.$$

Согласно (6.10.5), выражение в левой части равно $f * \rho_\delta = f_\delta$, а в правой — равно $f * \rho_{\delta'} = f_{\delta'}$, т. е. $f_\delta = f_{\delta'}$. Поэтому f_δ — гармоническая функция, не зависящая от δ; таким образом, и ее предел f при $\delta \longrightarrow 0$ является той же самой гармонической функцией. Это справедливо в Ω_{δ_0}, а в силу произвольности δ_0 и в Ω, что и требовалось доказать.