Глава 7

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Линейные операторы или преобразования в гильбертовом пространстве; область определения и область значений оператора; норма оператора; теорема о расширении; банаховы алгебры; сопряженность; симметрические, самосопряженные и унитарные операторы; интегральные и дифференциальные операторы; симметрические операторы без самосопряженного расширения и со многими самосопряженными расширениями; простые операторы Штурма—Лиувилля; замкнутые и замыкаемые операторы; график оператора; операторы радиального импульса.

Предварительные сведения: гл. 1—5.

7.1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Понятие линейного оператора (т. е. преобразования) в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ (или в банаховом пространстве) является непосредственным обобщением понятия линейного преобразования в конечномерном пространстве. Однако следует подчеркнуть один момент (главным образом потому, что им иногда пренебрегают, особенно в книгах по квантовой механике), а именно: оператор A нельзя считать полностью определенным, пока не выяснена его область определения (т. е. множество x из $\boldsymbol{H}$, для которых Ax имеет смысл); операторы с несовпадающими областями определения следует рассматривать как разные операторы. Обычно требуется, чтобы область определения была линейным множеством (многообразием) в $\boldsymbol{H}$, поскольку очевидно, что если оператор A линеен и Ax определен для всех $x \in S$, то в силу линейности можно однозначно определить Ay для любой конечной линейной комбинации y элементов S. Однако дальнейшее расширение оператора является обычно не единственным (за исключением частных случаев).

Формальные определения таковы: линейный *оператор* или преобразование A представляет собой линейное отображение линейного подмножества $\boldsymbol{D}(A)$ пространства $\boldsymbol{H}$, называемого *областью определения* A, на подмножество $\boldsymbol{R}(A)$, *область значений* A. Области определения и значений являются линейными многообразиями. Оператор A' называется *расширением* оператора A (символически $A \subset A'$), если, во-первых, $\boldsymbol{D}(A) \subset \boldsymbol{D}(A')$ и, во-вторых, $Au = A'u$ для всех u из $\boldsymbol{D}(A)$. Оператор A называют *ограниченным*, если существует такая постоянная K, что $\|Au\| \leqslant K\|u\|$ для всех $u \in \boldsymbol{D}(A)$; *норма* оператора $\|A\|$ есть наименьшее из таких K. Согласно теореме о расширении, доказываемой ниже, ограниченный линейный оператор A имеет единственное ограниченное расширение $\overline{A}$, область определения которого является замыканием $\boldsymbol{D}(A)$, а $\|\overline{A}\|=\|A\|$; в частности, если $\boldsymbol{D}(A)$ — плотное в $\boldsymbol{H}$ множество, то $\boldsymbol{D}(\overline{A})=\boldsymbol{H}$. Если $\boldsymbol{D}(B)\subset\boldsymbol{R}(A)$, то определен оператор BA; в этом случае, если A и B ограничены, то $\|BA\|\leqslant\leqslant\|B\|\|A\|$. Если $u=0$ — единственное решение уравнения $Au=0$, оператор A имеет *обратный оператор* A^{-1}, областями определения и значений которого являются соответственно области значений и определения A; кроме того, $(BA)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$. *Замечание.* В этой книге символ $\subset$ включает равенство; если $A\subset A'$, но $A\neq A'$, то говорят, что A' есть *собственное* расширение A.

Все приведенные выше определения применимы и для любого банахова пространства. В гильбертовом пространстве, однако, норму $\|A\|$ можно выразить через скалярное произведение, а именно

$$\|A\|=\sup_{\substack{u\neq 0\\ v\neq 0}}\frac{|(Au,\,v)|}{\|u\|\|v\|}=\sup\frac{\operatorname{Re}(Au,\,v)}{\|u\|\|v\|}. \qquad (7.1.1)$$

Доказательство. В силу неравенства Шварца и определения нормы оператора

$$\operatorname{Re}(Au,\ v)\leqslant|(Au,\ v)|\leqslant\|Au\|\|v\|\leqslant\|A\|\|u\|\|v\|$$

для всех u и v. С другой стороны, u можно выбрать так, что $\|Au\|/\|u\|$ сколь угодно мало отличается от $\|A\|$; следовательно, если в качестве v взять Au, то $(Au,\ v)$ вещественно и равно $\|Au\|^2$, так что $(Au,\ v)/(\|u\|\|v\|)$ равно $\|Au\|/\|u\|$ и, значит, сколь угодно близко к $\|A\|$. Отсюда теперь следует (7.1.1).

Теорема о расширении. *Если A — ограниченный оператор, то A имеет единственное расширение $\overline{A}$ на замыкание $\boldsymbol{D}(A)$, такое, что $\|\overline{A}\|=\|A\|$.*

Доказательство. Прежде всего докажем существование $\overline{A}$. Пусть $\overline{\boldsymbol{D}}$ — замыкание $\overline{\boldsymbol{D}}(A)$ и u — любой вектор из $\overline{\boldsymbol{D}}$, а $\{u_n\}$ — последовательность элементов $\boldsymbol{D}(A)$, сходящаяся к u. Элементы Au_n определены для всех n и $\{Au_n\}$ является последовательностью Коши, поскольку $\|Au_n-Au_m\|\leqslant\|A\|\|u_n-u_m\|\longrightarrow 0$ и, следовательно, $\|Au_n-Au_m\|\longrightarrow 0$ при $n,\ m\longrightarrow\infty$, так как $\{u_n\}$ является последовательностью Коши. Если теперь для каждого такого u определить $\overline{A}u$ как предел Au_n при $n\longrightarrow\infty$, то становится ясно, что, во-первых, $\|\overline{A}\|\leqslant\|A\|$, так как $\|\overline{A}u\|=\lim\|Au_n\|\leqslant\lim\|A\|\|u_n\|=\|A\|\|u\|$, а во-вторых, $\overline{A}u=Au$, если $u\in\boldsymbol{D}(A)$, так что $\overline{A}$ — расширение A и $\|\overline{A}\|=\|A\|$[1].

Чтобы доказать единственность, предположим, что $\overline{A}'$ — любое другое ограниченное расширение A на $\overline{\boldsymbol{D}}$. Если $\{u_n\}$ и u те же, что и выше, то

$$\|\overline{A}'u-Au_n\|=\|\overline{A}'u-\overline{A}'u_n\|\leqslant\|\overline{A}'\|\|u-u_n\|$$

и, значит, $\overline{A}'u=\lim Au_n$, т. е. $\overline{A}'=\overline{A}$.

[1]) Неравенство $\|A\|\leqslant\|A'\|$ справедливо при любом расширении A. — *Прим. перев.*

Применение этой теоремы к интегральным уравнениям дается в § 7.4.

Важным классом операторов, используемых в квантовой статистике и других разделах физики и математики, является множество $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ ограниченных операторов, определенных на всем пространстве $\boldsymbol{H}$. Важность этих операторов вытекает из того факта, что $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ представляет собой *алгебру*, т. е. не только линейное пространство, содержащее $c_1A_1+c_2A_2$ для любых A_1, A_2 из $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ и любых c_1, c_2 из $\mathbb{C}$, но и множество, содержащее произведение BA для любых A, $B\in\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$. Более того, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$ оказывается полным линейным нормированным пространством (т. е. банаховым пространством — см. гл. 15 и замечание в § 1.2) с нормой A, определенной выше, поскольку она обладает обычными свойствами нормы, включая неравенство треугольника $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$, и, кроме того, удовлетворяет неравенству $\|BA\|\leqslant\|B\|\|A\|$. Такая алгебра называется *банаховой алгеброй*. Более подробное описание ограниченных операторов приводится в гл. 9 и § 14.6. Хотя многие наблюдаемые квантовой механики являются неограниченными операторами, ту же самую информацию можно в принципе получить и при помощи ограниченных операторов (ограниченных наблюдаемых, т. е. таких наблюдаемых, возможные измеренные значения которых составляют ограниченные множества вещественных чисел), и это имеет смысл делать для некоторых целей; см. § 14.5 и 14.6.

Замечание. Ранее такие алгебры называли «операторными кольцами», а в советской литературе часто называли «нормированными кольцами».

7.2. СОПРЯЖЕННОСТЬ. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ И УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Наблюдаемые представляются в квантовой механике самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$. Эти операторы аналогичны эрмитовым матрицам, однако бесконечномерность $\boldsymbol{H}$ приводит к одному существенному отличию. Если A — матрица размера $n\times n$, такая, что $(A\mathbf{u},\ \mathbf{v})=(\mathbf{u},\ A\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ из V^n (в этом случае A называется *эрмитовой*[1])), то A имеет полную ортонормированную систему собственных векторов. Это же верно (в некотором смысле) и для *ограниченного* оператора A в $\boldsymbol{H}$; именно, если $(A\mathbf{u},\ \mathbf{v})=(\mathbf{u},\ A\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ из $\boldsymbol{H}$, то A имеет полную систему собственных векторов в смысле теоремы о спектральном разложении из гл. 9. Однако многие из операторов квантовой механики неограниченны, следовательно, опре-

[1]) Иногда такую матрицу называют *самосопряженной*. — *Прим. перев.*

делены не на всем H, а лишь на некоторой своей области определения $D(A)$. Если $(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ из $D(A)$, которая плотна в H (в этом случае физики называют A *эрмитовым*, а математики — *симметрическим*), то A может иметь, а может и не иметь полную систему собственных векторов (в указанном выше смысле); если A имеет полную систему собственных векторов, то физики его называют *наблюдаемой*, а математики — *самосопряженным оператором* (точное определение дается ниже).

Иногда возникают недоразумения, поскольку в некоторых книгах по квантовой механике и обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторами, являющимися всего лишь симметрическими, обращаются как с самосопряженными.

Сущность самосопряженности симметрического оператора — в наличии соответствующей области определения $D(A)$ (которая, конечно, обычно имеется в нашем распоряжении, когда определяется A). Если область определения максимальна в определенном смысле и A симметричен на этой области, то A самосопряжен. Однако имеются симметрические операторы, такие, как операторы радиального импульса, описываемые ниже в § 7.8, которые не могут быть сделаны самосопряженными ни при каком выборе области определения. С другой стороны, имеются операторы (некоторые даже с плотной в H областью определения), которые могут иметь много самосопряженных расширений при должных расширениях области определения; пример дается в § 7.5, см. также § 8.6 об индексах дефекта.

Доказательство самосопряженности обычно считается математически слишком сложным для изложения в книгах по квантовой механике (см., например, Мессиа [1958, с. 188]). Однако, по моему мнению, дело обстоит не так. Обсуждаемые операторы в основном являются дифференциальными операторами; если использовать теорию распределений, то большинство трудностей исчезнет, а остающиеся окажутся связанными в основном с граничными условиями, следовательно имеют физическую природу.

Теорема. *Если A — ограниченный оператор, определенный на всем H (т. е. $D(A) = H$), то имеется единственный ограниченный линейный оператор A^*, сопряженный к A, т. е. такой, что $D(A^*) = H$ и $(A^*u, v) = (u, Av)$ для всех u, $v \in H$; кроме того, $\|A^*\| = \|A\|$; более того, если A и B удовлетворяют условиям теоремы, то $(AB)^* = B^*A^*$ и $(A^*)^*$ (обычно записывается просто как A^{**}) совпадает с A.*

Доказательство. При любом фиксированном u скалярное произведение (u, Av) является ограниченным линейным функционалом $l(v)$; возьмем в качестве A^*u единственный элемент, существование которого гарантируется теоремой Рисса — Фреше о представлении линейного функционала (см. § 1.8), такой, что $l(v) = (A^*u, v)$ для всех v; A^*u линейно зависит от u, значит A^* — линейный оператор в $\boldsymbol{H}$. Чтобы найти норму A^*, сначала выпишем следующие неравенства:

$$|(A^*u, v)| = |(u, Av)| \leqslant \|u\|\|Av\| \leqslant \|u\|\|A\|\|v\|,$$

а затем положим $v = A^*u$, что даст

$$\|A^*u\|^2 \leqslant \|u\|\|A\|\|A^*u\|, \quad \text{т. е.} \quad \|A^*u\| \leqslant \|A\|\|u\| \quad \forall u;$$

поэтому $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. Поменяв местами A и A^*, из тех же рассуждений получим, что $\|A\| \leqslant \|A^*\|$; следовательно, $\|A^*\| = \|A\|$. Доказательства остальных утверждений теоремы предоставляются читателю в качестве упражнения.

Дадим теперь более общее определение сопряженности, при котором от A уже не требуется, чтобы он был ограниченным или был определен на всем $\boldsymbol{H}$, и требуется только, чтобы он был линейным оператором с *плотной* в $\boldsymbol{H}$ областью определения $\boldsymbol{D}(A)$. Определим сначала линейное подмножество $\boldsymbol{D}^* \subset \boldsymbol{H}$: $v \in \boldsymbol{D}^*$ тогда и только тогда, когда имеется $w \in \boldsymbol{H}$, такой, что

$$(w, u) = (v, Au) \quad \text{для всех } u \in \boldsymbol{D}(A). \tag{7.2.1}$$

Это $w = w(v)$ единственно для любого заданного v. *Доказательство*. Если w_1 и w_2—два элемента с таким свойством, то мы получаем, что $(w_1 - w_2, u) = 0$ для всех $u \in \boldsymbol{D}(A)$ и тем самым для всех $u \in \boldsymbol{H}$ (поскольку скалярное произведение непрерывно, а $\boldsymbol{D}(A)$ плотна в $\boldsymbol{H}$); это верно, в частности, для $u = w_1 - w_2$, так что $\|w_1 - w_2\|^2 = 0$, т. е. $w_1 = w_2$. Ясно, что w линейно зависит от v, поэтому мы полагаем $\boldsymbol{D}(A^*) = \boldsymbol{D}^*$, $A^*v = w(v)$ для любого $v \in \boldsymbol{D}^*$. Следовательно, чтобы получить A^*, нужно найти все пары $\{v, w\}$, которые удовлетворяют (7.2.1).

Предупреждение. Оператор A^{**} может не существовать, так как $\boldsymbol{D}(A^*)$ может быть неплотным в $\boldsymbol{H}$, но даже если A^{**} существует, то он может не совпадать с A.

Упражнение

1. Покажите, что если A^{**} существует, то $A \subseteq A^*$.

Сумма $A + B$ двух операторов определяется равенством $(A+B)v = Av + Bv$ для всех v из области определения

$$\boldsymbol{D}(A+B) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{D}(A) \cap \mathbf{D}(B).$$

Упражнение

2. Предположим, что $A + B$ определен на плотном в $\boldsymbol{H}$ множестве, так что A^*, B^* и $(A+B)^*$ существуют. Покажите, что $(A+B)^* \supset A^* + B^*$. На примере покажите, что $(A+B)^*$ может быть собственным расширением $A^* + B^*$, т. е. $(A+B)^* \neq A^* + B^*$. Докажите, однако, что если B—ограниченный оператор, определенный на всем $\boldsymbol{H}$, то всегда $(A+B)^* = A^* + B^*$. *Указание*. Согласно общему определению, для того чтобы определить $(A+B)^*$, нужно найти все пары $\{v, w\}$, такие, что

$$(v, (A+B)u) = (w, u) \quad \text{для всех } u \text{ из } \boldsymbol{D}(A) \cap \boldsymbol{D}(B).$$

Следует отметить, что операторное сложение, как оно определено выше, имеет ряд несомненных недостатков. Область определения $A+B$ может быть пустой (за исключением нуля). Более того, сложение в общем случае не ассоциативно, и в частности $(A+B)-B$ не обязательно равен A. В некоторых работах сложение определяется только для операторов, имеющих одну и ту же область определения, например в качестве области определения берут C_0^∞ или $\mathcal{S}$, когда имеют дело с операторами в L^2.

При любом определении сопряженности A называется *самосопряженным*, если $A^*=A$. Если $A^*=A$, то $(Au, v)=(u, Av)$ для всех u, $v\in \boldsymbol{D}(A)$, однако этого условия недостаточно для самосопряженности A. Если просто $(Au, v)=(u, Av)$ для всех $u, v\in \boldsymbol{D}(A)$ и если $\boldsymbol{D}(A)$ плотна в $\boldsymbol{H}$, т. е. если $A\subset A^*$, то A называется *симметрическим* (или *эрмитовым*) оператором; $\boldsymbol{D}(A^*)$ может быть больше $\boldsymbol{D}(A)$ — в этом случае A^* является собственным расширением A. Если A^* в свою очередь симметричен (что необязательно), то A^* самосопряжен, т. е. $A^{**}=A^*$; но вообще говоря, A^{**} может не существовать или может быть только $A^{**}\subset A^*$ (см. примеры ниже, в § 7.5). Другое определение самосопряженности дается в § 8.6.

Если A имеет единственное самосопряженное расширение $\tilde{A}$, то A называют *существенно самосопряженным*. На практике чаще имеют дело с A, чем с $\tilde{A}$: часто A легче описать, чем $\tilde{A}$. В гл. 11 рассматривается лапласиан; сначала определяется оператор, который обозначается A_0, область определения которого есть $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, и который задается равенством $A_0\varphi=\nabla^2\varphi$ для всех φ из этой области определения. Это гарантирует существенную самосопряженность A_0. Область определения $\tilde{A}_0$ состоит из определенных распределений из $L^2(\mathbb{R}^n)$, но ее нелегко описать.

Если U — линейный обратимый оператор и $\boldsymbol{D}(U)=\boldsymbol{D}(U^{-1})=\boldsymbol{H}$, то следующие условия эквивалентны:

$$(Uv, Uv)=(v, v) \quad \text{для всех } v\in \boldsymbol{H}, \tag{7.2.2}$$

$$(Uv, Uw)=(v, w) \quad \text{для всех } v, w\in \boldsymbol{H}, \tag{7.2.3}$$

$$U^{-1}=U^* \quad (\text{т. е. } UU^*=U^*U=I). \tag{7.2.4}$$

(условие (7.2.3) получается из условия (7.2.2) по формуле поляризации (1.11.1), все же остальное очевидно). Оператор, удовлетворяющий этим условиям, называется *унитарным*; ясно, что $\|U\|=1$. [Заметим, что здесь нет необходимости использовать более общее определение сопряженности, так как U и U^{-1} ограничены и определены на всем $\boldsymbol{H}$.]

7.3. ПРИМЕРЫ В l^2

(См. § 1.4.)

1. Пусть $\xi = (x_1, x_2, \ldots)$ — любой элемент из l^2, и пусть $A\xi = (x_2, x_3, \ldots)$ (x_1 опускается, $(n+1)$-я координата заменяет n-ю, $n = 1, 2, \ldots$); $\boldsymbol{D}(A) = l^2$. Очевидно, что для любого $\eta = (y_1, y_2, \ldots)$ $A^*\eta = (0, y_1, y_2, \ldots)$. Хотя $\boldsymbol{D}(A^*) = l^2 = \boldsymbol{H}$ и $\|A^*\eta\| = \|\eta\|$ для всех η, оператор A^* не унитарен, так как его нельзя обратить на всем $\boldsymbol{H}$; возможен случай, когда $\|A\xi\| < \|\xi\|$.

2. Пусть $\xi = (x_1, x_2, \ldots)$, и пусть [1])

$$A\xi = (x_2, x_4, x_1, x_6, x_3, x_8 \ldots, x_{2n+2}, x_{2n-1}, \ldots).$$

Тогда A — унитарный оператор.

3. Пусть M — произвольная матрица размера $n \times n$, и пусть $\xi = (x_1, x_2, \ldots)$ и $A\xi = (w_1, w_2, \ldots)$, где

$$w_j = \sum_{k=1}^{n} M_{jk} x_k \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$w_j = x_j \quad \text{при} \quad j > n,$$

а $\boldsymbol{D}(A) = l^2 = \boldsymbol{H}$. Если M — эрмитова матрица, то оператор A самосопряжен, если M унитарна, то и A унитарен.

4. $\boldsymbol{D}(A)$ — множество всех таких $\xi = (x_1, x_2, \ldots)$, для которых лишь конечное число $x_j \neq 0$. Если $\xi \in \boldsymbol{D}(A)$, то $A\xi = (x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots, nx_n, \ldots)$. Оператор A симметричен, $\boldsymbol{D}(A)$ плотно в l^2, а A^* является расширением A с областью определения

$$\boldsymbol{D}(A^*) = \left\{ \xi = (x_1, x_2, \ldots): \sum_{j=1}^{\infty} j^2 |x_j|^2 < \infty \right\};$$

A^* самосопряжен: $A^{**} = A^*$.

7.4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В $L^2(a, b)$

Пусть $K(x, y)$ — непрерывная по x и y функция (при $a \leqslant x, y \leqslant b$), и пусть $\boldsymbol{D}(A) = C[a, b]$, т. е. $\boldsymbol{D}(A)$ — множество непрерывных на $[a, b]$ функций $\varphi(x)$; для любой такой функции φ определим $A\varphi$ равенством

$$A\varphi = [A\varphi](x) = \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy. \tag{7.4.1}$$

В силу неравенства Шварца при любом фиксированном x

$$\left| \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy \right|^2 \leqslant \int_a^b |K(x, y)|^2\,dy \int_a^b |\varphi(y)|^2\,dy;$$

[1]) Здесь $2n$-я координата элемента $A\xi$ принимает значение x_{2n+2}, а $(2n+1)$-я — значение x_{2n-1} (кроме первой). — *Прим. перев.*

интегрирование по x этого неравенства дает

$$\|A\varphi\|^2 \leqslant \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2\, dx\, dy\, \|\varphi\|^2. \qquad (7.4.2)$$

Поэтому A — ограниченный оператор с плотной в $\boldsymbol{H}=L^2(a, b)$ областью определения. Согласно теореме о расширении, A имеет единственное ограниченное линейное расширение $\bar{A}$ с $\boldsymbol{D}(\bar{A})=\boldsymbol{H}$. Если ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условию $K(y, x)=\overline{K(x, y)}$, то A симметричен, а $\bar{A}$ самосопряжен.

Интегральные операторы такого вида допускают обобщения в разных направлениях (бесконечный интервал (a, b), неограниченность ядра $K(x, y)$, несколько независимых переменных). Если интеграл в (7.4.2) конечен, то говорят, что это *оператор Гильберта—Шмидта* (см. § 12.4). Однако интегральный оператор не обязан удовлетворять этому условию, чтобы быть ограниченным. Оператор преобразования Фурье F, заданный в $L^2(\mathbb{R}^n)$ равенствами

$$\boldsymbol{D}(F)=C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

$$(F\varphi)(\mathbf{x})=(2\pi)^{-n/2}\int \ldots \int e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}\varphi(\mathbf{y})\, dy_1 \ldots dy_n,$$

имеет всюду плотную область определения и норму $\|F\|=1$, однако не является оператором Гильберта—Шмидта. Его расширение $\bar{F}$ на все L^2 представляет собой унитарное отображение всего L^2 на себя (см. § 5.10).

7.5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Сначала рассмотрим оператор T, определенный в $\boldsymbol{H}=L^2(a, b)$ равенствами

$$\boldsymbol{D}(T)=\{f \in L^2\colon f' \in L^2,\ f(a)=f(b)=0\}, \qquad (7.5.1)$$
$$Tf=-if',$$

где f' понимается как производная f в смысле теории распределений. Оператор T симметричен, потому что интегрирование по частям допустимо для распределений из L^2, а внеинтегральный член обращается в нуль в силу граничных условий, т. е.

$$(Tf, g)=\int_a^b \overline{-if'}\, g\, dx = i\bar{f}g\Big|_a^b - i\int_a^b \bar{f}\, g'\, dx=(f, Tg). \qquad (7.5.2)$$

Чтобы определить сопряженный оператор T^*, найдем такие пары $\{g, h\}$ элементов L^2, что

$$(Tf, g) = (f, h) \quad \text{для всех } f \in \boldsymbol{D}(T),$$

т. е.

$$i(f', g) = (f, h) \quad \text{для всех } f \in \boldsymbol{D}(T). \tag{7.5.3}$$

Множество всех таких g образует $\boldsymbol{D}(T^*)$, и $T^*g = h$ для любой такой пары $\{g, h\}$. В частности,

$$i(\overline{\varphi}', g) = (\overline{\varphi}, h) \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty,$$

т. е. для всех пробных функций, потому что если $\varphi \in C_0^\infty$, то φ, $\overline{\varphi} \in L^2$. В обозначениях гл. 2 это выглядит так: $i\langle g, \varphi'\rangle = \langle h, \varphi\rangle$, однако $\langle g, \varphi'\rangle = \langle -g', \varphi\rangle$, следовательно

$$\langle -ig', \varphi\rangle = \langle h, \varphi\rangle \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty,$$

так что h и $-ig'$ — одно и то же распределение, т. е. один и тот же элемент $L^2(a, b)$. Таким образом, необходимым условием того, чтобы пара $\{g, h\}$ удовлетворяла (7.5.3), является равенство $h = -ig'$, однако это условие является и достаточным в силу (7.5.2). Поскольку $f(a) = f(b) = 0$, на g не нужно накладывать никаких граничных условий.

Вывод.

$$\boldsymbol{D}(T^*) = \{g \in L^2\colon\ g' \in L^2\},$$
$$T^*g = -ig. \tag{7.5.4}$$

Оператор T^* является несимметрическим расширением T, и ни T, ни T^* не являются самосопряженными.

Если бы $\boldsymbol{D}(T)$ ограничивалась функциями класса C^1, или C^k $(k > 0)$, или C^∞, или аналитическими на $[a, b]$ функциями, или даже многочленами (граничные условия, конечно, в любом случае сохраняются), то $\boldsymbol{D}(T)$ была бы все еще плотным в $L^2(a, b)$ множеством и T^* по-прежнему задавался бы формулами (7.5.4). T^{**} был бы еще старым T, заданным равенством (7.5.1), поэтому теперь $T \subset T^{**}$.

Другие примеры в $L^2(a, b)$ таковы:

(1) $\quad \boldsymbol{D}(T_1) = \{f \in L^2\colon\ f' \in L^2,\ f(a) = 0\}, \quad T_1 f = -if';$

тогда

$$\boldsymbol{D}(T_1^*) = \{f \in L^2\colon\ f' \in L^2,\ f(b) = 0\}, \quad T_1^* f = -if';$$

(2) (периодические граничные условия)

$$\boldsymbol{D}(A) = \{f \in L^2\colon\ f' \in L^2,\ f(a) = f(b)\}, \quad Af = -if';$$

A самосопряжен: $A^* = A$.

Замечание. В классической теории, где f и f' рассматриваются как обычные функции (хотя, вообще говоря, f' недоопределена на множестве меры нуль), необходимо ограничивать $\boldsymbol{D}(A)$ функциями класса

$$\{f(x) \in L^2:\ f(x) \text{ абсолютно непрерывна, } f'(x) \in L^2\},$$

где принадлежность $f'(x)\ L^2$ означает, что $f'(x)$ существует почти всюду, измерима по мере Лебега и интеграл Лебега $\int\limits_a^b |f'(x)|^2\,dx$ конечен. При нашем подходе нет необходимости использовать теорию Лебега и вводить понятие абсолютной непрерывности, т. е. $f(x)$ автоматически абсолютно непрерывна, если f' как распределение принадлежит L^2.

Оператор T^*, заданный в (7.5.4), характеризуется тем, что имеет наибольшую для оператора в $L^2(a, b)$ область определения, если его действие задается операцией $-i(d/dx)$ в смысле теории распределений. Операторы T_1, T_1^* и A являются промежуточными между оператором T, определенным в (7.5.1), и T^*. В частности, A — самосопряженный оператор, такой, что $T \subset A \subset T^*$. Однако A — не единственное самосопряженное расширение T; имеется бесконечно много других, определенных следующим образом: пусть θ — любое вещественное число из $[0, 2\pi)$; определим A_θ равенствами

$$\begin{gathered} \boldsymbol{D}(A_\theta) = \{f \in L^2:\ f' \in L^2,\ f(b) = e^{i\theta} f(a)\}, \\ A_\theta f = -if'. \end{gathered} \tag{7.5.5}$$

Упражнения

1. (а) Покажите, что A_θ при любом θ — самосопряженный оператор и что $T \subset A_\theta \subset T^*$. (б) Найдите собственные значения и собственные функции A_θ. (в) Докажите, что эти собственные функции образуют полную систему. [*Указание.* Возьмите $(a, b) = (0, 2\pi)$, затем, если $f(x)$ — произвольная гладкая функция, разложите $e^{-i\theta x/(2\pi)} f(x)$ в обычный ряд Фурье.] (г) Покажите, что граничное условие нельзя заменить условием $f(b) = \alpha f(a)$, $|\alpha| \neq 1$.

2. Пусть $p(x)$ и $q(x)$ — вещественные функции, принадлежащие C^∞, причем $p(x) > 0$, $a \leqslant x \leqslant b$. Докажите, что регулярный оператор Штурма — Лиувилля A, определенный равенствами

$$\begin{gathered} \boldsymbol{D}(A) = \{f \in L^2(a, b):\ -(pf')' + qf \in L^2,\ f(a) = f(b) = 0\}, \\ Af = -(pf')' + qf \end{gathered} \tag{7.5.6}$$

(здесь штрих означает дифференцирование), самосопряжен.

Рассмотрим теперь частный случай оператора Штурма — Лиувилля с одной особой концевой точкой и с $p(x) \equiv 1$. Пусть $q(x)$ — вещественная непрерывная неотрицательная функция, определенная при $0 \leqslant x < \infty$. Определим в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H} = L^2 = L^2(0, \infty)$ оператор A:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{D}(A) = \{f \in L^2\colon\ -f''(x) + q(x) f(x) \in L^2,\ f(0) = 0\}, \\ Af = -f'' + qf \quad \text{для} \quad f \in \boldsymbol{D}(A). \end{gathered} \tag{7.5.7}$$

(Более общие операторы такого типа рассматриваются в гл. 10.) Так как f и Af принадлежат $L^2(0, b)$ при любом конечном b, то qf, а потому и f'' принадлежат $L^2(0, b)$; следовательно, $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны при $0 \leqslant x < \infty$, значит, в определении $\boldsymbol{D}(A)$ граничное условие $f(0) = 0$ существенно. [Из этих рассуждений не следует, что f', f'' или qf принадлежат $L^2(0, \infty)$, однако далее будет показано, что f' и $\sqrt{q}\, f$ *принадлежат* $L^2(0, \infty)$.]

Так как $f'' \in L^2(0, b)$, интегрированием по частям можно получить следующее:

$$\begin{aligned} (f, -f'' + qf) &= \int_0^\infty \bar{f}(x)\,[-f''(x) + q(x) f(x)]\,dx = \\ &= \lim_{b \to \infty} \int_0^b \bar{f}(x)\,[-f''(x) + q(x) f(x)]\,dx = \\ &= \lim_{b \to \infty} \left\{ -\bar{f}(x) f'(x)\Big|_0^b + \int_0^b (|f'(x)|^2 + q(x)|f(x)|^2)\,dx \right\}. \end{aligned}$$

Ясно, что последний интеграл может стремиться только либо к положительному значению, либо к $+\infty$. Во втором случае $\operatorname{Re} \bar{f} f'$ стремилась бы к $+\infty$, т. е. $d|f|^2/dx \to \infty$, что противоречит квадратичной интегрируемости $f(x)$; поэтому

$$\int_0^\infty |f'(x)|^2\,dx < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^\infty q(x)|f(x)|^2\,dx < \infty,$$

т. е. f, $\sqrt{q}\, f \in L^2(0, \infty)$. Заметим, что в этих рассуждениях не использовалось граничное условие $f(0) = 0$ (это нам потребуется в дальнейшем).

Найдем теперь сопряженный оператор A^* и покажем, что $A^* = A$. Для этого найдем все возможные пары элементов $\{g, h\}$ из $L^2(0, \infty)$, такие, что

$$(-f'' + qf, g) = (f, h) \quad \text{для всех } f \in \boldsymbol{D}(A). \tag{7.5.8}$$

Множество всех таких g образуют $\boldsymbol{D}(A^*)$ и $A^*g = h$ для любой такой пары $\{g, h\}$. В частности, для такой пары $\{g, h\}$

$$(-\bar{\varphi}'' + q\bar{\varphi}, g) = (\bar{\varphi}, h) \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty(0, \infty), \tag{7.5.9}$$

т. е.

$$\langle g, -\varphi'' + q\varphi \rangle = \langle h, \varphi \rangle \quad \text{для всех } \varphi.$$

По определению дифференцирования распределений $\langle g, -\varphi''\rangle = \langle -g'', \varphi\rangle$ и, кроме того, $\langle g, q\varphi\rangle = \langle qg, \varphi\rangle$. [Отметим, что здесь не утверждается, что $qg \in L^2(0, \infty)$.] Поэтому $\langle -g''+qg, \varphi\rangle = \langle h, \varphi\rangle$ для всех пробных функций; следовательно,

$$h = -g'' + qg. \tag{7.5.10}$$

Это условие является необходимым для того, чтобы пара $\{g, h\}$ была требуемого типа, но не является достаточным, поскольку (7.5.8) не следует из (7.5.9).

Чтобы найти дополнительное условие, предположим, что g и h удовлетворяют (7.5.10). Используя для g те же рассуждения, что и для f, получаем, что g и g' также непрерывны и что g' и $\sqrt{q}\,g \in L^2(0, \infty)$. Для любого $f \in \boldsymbol{D}(A)$

$$(-f''+qf, g) = \lim_{b\to 0}\left[-\bar{f}'g\Big|_0^b + \int_0^b (\bar{f}'g' + q\bar{f}g)\,dx\right];$$

интеграл здесь стремится к конечному пределу, потому что f', g', $\sqrt{q}\,f$ и $\sqrt{q}\,g$ принадлежат $L^2(0, \infty)$. Поэтому предел $\bar{f}'(b)g(b)$ существует, причем он должен быть равен нулю: ведь $\int\limits_0^\infty f'(x)g(x)\,dx$ конечен. Еще одно интегрирование по частям дает

$$(-f''+qf, g) = \bar{f}'(0)g(0) + \lim_{b\to\infty}\left[\bar{f}g'\Big|_0^b + \int_0^b \bar{f}(-g''+qg)\,dx\right];$$

снова интеграл стремится к конечному пределу, значит, $\bar{f}(b)g'(b) \to 0$ при $b \to \infty$, что следует из аналогичных рассуждений. Поскольку $f(0) = 0$, то и $\bar{f}(0)g'(0) = 0$, следовательно,

$$(-f''+qf, g) = \bar{f}'(0)g(0) + (f, -g''+qg) = \bar{f}'(0)g(0) + (f, h).$$

Поэтому, для того чтобы $(Af, g) = (f, h)$ для всех $f \in \boldsymbol{D}(A)$, необходимо и достаточно, чтобы помимо (7.5.10) выполнялось условие $g(0) = 0$. Следовательно, $\boldsymbol{D}(A^*) = \boldsymbol{D}(A)$ и A самосопряжен.

Аналогичный оператор Штурма—Лиувилля $Af = -f''+qf$ можно определить и на $\mathbb{R}$ (с двумя особыми концевыми точками $\pm\infty$). В этом случае граничное условие $f(0) = 0$ уже не нужно и $A^* = A$ для $q \geqslant 0$.

Упражнения

3. Покажите, что если $q(x) = x^2$ (A в этом случае является гамильтонианом осциллятора), то f'', xf', $x^2 f \in L^2(\mathbb{R})$. *Указание.* Рассмотрите скалярное произведение элемента $-f''+x^2 f$ на себя.

В гл. 10 будет рассмотрен спектр этих и более общих операторов Штурма — Лиувилля и будут получены некоторые теоремы о разложении по системе собственных функций.

4. Рассмотрите оператор T, определенный на $H=L^2(a, b)$ следующими условиями:

$$D(T)=\{f \in L^2: f'' \in L^2,\ f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0\},$$
$$Tf=f''.$$

Найдите T^*. Покажите, что T симметричен, но не является существенно самосопряженным, для чего найдите семейство (зависящее от двух комплексных параметров) различных самосопряженных расширений T.

Рассмотрим, наконец, оператор умножения на заданную функцию, хотя он и не является дифференциальным. Это вполне уместно, поскольку такой оператор часто появляется при исследовании дифференциальных уравнений. Пусть $\xi(\mathbf{x})$ — произвольная вещественная непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$. Согласно § 5.4, произведение ξf определено как распределение для всех $f \in L^2$; определим оператор A равенствами

$$D(A)=\{f \in L^2: \xi f \in L^2\} \quad (\text{здесь } L^2=L^2(\mathbb{R}^n)),$$
$$Af=\xi f. \tag{7.5.11}$$

Покажем, что A самосопряжен. Для этого рассмотрим все пары $\{g, h\}$, такие, что

$$(Af, g)=(\xi f, g)=(f, h) \quad \text{для всех } f \in L^2; \tag{7.5.12}$$

тогда для любой такой пары

$$(\xi\bar{\varphi}, g)=(\bar{\varphi}, h) \quad \text{для всех пробных функций } \varphi,$$

т. е.

$$\langle g, \xi\varphi\rangle=\langle h, \varphi\rangle \quad \text{для всех } \varphi.$$

Согласно § 5.4, левая часть является функционалом, который определяет произведение ξ и g, поэтому

$$\langle \xi g, \varphi\rangle=\langle h, \varphi\rangle \quad \text{для всех } \varphi,$$

т. е. g должно принадлежать $D(A)$ и $h(=A^*g)=\xi g=Ag$. Но этого также достаточно для выполнения (7.5.12), так как если $\{\varphi_n\}$ — последовательность Коши, сходящаяся в L^2 к f, то $(\xi g, \varphi_n)=(h, \varphi_n)$; тогда в пределе получаем (7.5.12) в силу непрерывности скалярного произведения. Поэтому $A^*=A$. Если заданная функция $\xi(x)$ ограничена, то A — ограниченный оператор и $D(A)=L^2$; в противном случае A неограничен.

7.6. ЗАМКНУТЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть A — линейный оператор, область определения которого $D(A)$ не замкнута, и пусть ξ — точка из замыкания $\bar{D}(A)$, которая, однако, не принадлежит $D(A)$; можем ли мы каким-нибудь разумным способом определить $A\xi$? Это всегда возможно, если A — ограниченный оператор, что следует из теоремы о расширении из § 7.1. Именно, если $\{u_n\}$ — такая последовательность точек из $\boldsymbol{D}(A)$, что $u_n \to \xi$ при $n \to \infty$, то $\{Au_n\}$ является последовательностью Коши и $A\xi$ можно определить как предел Au_n при $n \to \infty$.

Если A — неограниченный оператор, то только что описанная процедура может и не привести к успеху, так как $\{Au_n\}$ может не иметь предела, даже если последовательность $\{u_n\}$ является сходящейся; например, $\|Au_n\|$ может стремиться к ∞. [Даже если $\{Au_n\}$ имеет предел, может получиться так, что для некоторой другой последовательности $\{u'_n\}$, также сходящейся к ξ, $\{Au'_n\}$ имеет другой предел, не совпадающий с пределом $\{Au_n\}$; см. пример 3 ниже.]

Предположим, однако, что для любой последовательности $\{u_n\}$, такой, что

(i) $u_n \in \boldsymbol{D}(A)$ при всех n,

(ii) $\lim u_n$ существует (при $n \to \infty$),

(iii) $\lim Au_n$ существует (при $n \to \infty$),

оказалось, что $\lim u_n \in \boldsymbol{D}(A)$ и $A(\lim u_n) = \lim (Au_n)$. В этом случае A называется *замкнутым* оператором.

Неограниченный незамкнутый оператор может иметь замкнутое расширение, а может и не иметь его. Если он имеет замкнутое расширение, то его называют *замыкаемым*, а наименьшее такое расширение называют *замыканием* оператора A и обозначают $\bar{A}$. Ясно, что A замыкаем тогда и только тогда, когда он обладает следующим свойством: если две последовательности $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу $\xi \in \boldsymbol{H}$, а $\{Au_n\}$ и $\{Av_n\}$ — также сходящиеся последовательности, то они также имеют один и тот же предел, скажем η. Если A обладает этим свойством, то его замыкание получается так: полагается $\bar{A}\xi = \eta$ для любой такой пары ξ, η. Ясно, что $\bar{A}$ — наименьшее (относительно области определения) или *минимальное* замкнутое расширение A, а именно если A_1 — любое другое замкнутое расширение A, то A_1 — расширение $\bar{A}$. Если A сам по себе замкнут, то $\bar{A} = A$.

Пример 1

Оператор A, приведенный в примере 4 § 7.3, замыкаем; его замыкание совпадает с сопряженным оператором: $\bar{A} = A^*$. Заметим, что $\boldsymbol{D}(A) \neq \boldsymbol{H}$.

Пример 2

Пусть, как и в § 7.5, $\boldsymbol{H} = L^2(a, b)$, и пусть $A = d/dx$ с одним из граничных условий, рассмотренных в этом параграфе. В качестве $\boldsymbol{D}(A)$ можно взять различные классы функций (и, возможно, распределений). Пусть сначала $\boldsymbol{D}(A)$ совпадает с классом $C^1(a, b)$ (непрерывных функций с непрерывными производными). В этом случае A не замкнут, но замыкаем, причем становится замкнутым, если его область определения дополнить всеми непрерывными функциями f, такими, что их производные f' *как распределения принадлежат* $L^2(a, b)$. *Доказательство.* Покажем, что если только последовательность $\{f_n(x)\}$ такова, что $\|f_n - f\| \to 0$ и $\|f_n' - g\| \to 0$, где $f_n(x)$ и $f_n'(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции, то отсюда следует, что $g = f'$, следовательно, f принадлежит дополненной области определения и $g = Af$, т. е. расширение A замкнуто. Чтобы показать это, воспользуемся интегрированием по частям:

$$(-\varphi', f_n) = (\varphi, f_n') \quad \text{для всех } \varphi \in C_0^\infty(a, b)$$

(напомним, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ для любой пробной функции). Если теперь $n \to \infty$, то

$$(-\varphi', f) = (\varphi, g) \quad \text{для всех } \varphi,$$

а по определению производной от распределения отсюда следует, что $g = f'$.

Чтобы построить незамыкаемый оператор, мы будем действовать в духе теории Лебега.

Пример 3

Пусть снова $H = L^2(a, b)$. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ (тогда $f(x) \in L^2(a, b)$), а $f'(x)$ определена (в обычном смысле) почти всюду на $[a, b]$ и почти всюду на $[a, b]$ равна непрерывной функции $g(x)$ (тогда $g(x) \in L^2$), то будем считать, что $f(x) \in D(A)$ и $Af(x) = g(x)$. Это определяет линейный оператор A (доказательство того, что $g(x)$ однозначно определяется по $f(x)$ и что $g(x)$ линейно зависит от $f(x)$, оставляется в качестве упражнения). Этот оператор имеет бо́льшую область определения, чем любой из соответствующих операторов предыдущего параграфа.

Оператор A не замыкаем, поскольку мы можем построить последовательность функций $f_n(x)$ из $D(A)$, которая сходится по норме (а в связи с этим и равномерно поточечно на $[a, b]$) к функции $f(x) \equiv x$, тогда как $Af_n(x) \equiv 0$

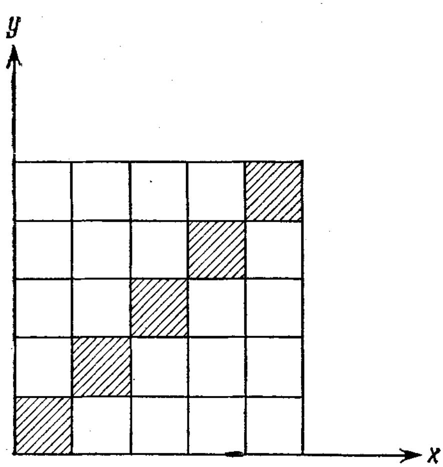

Рис. 7.1. Построение последовательности $\{f_1(x)\}$.

для всех n. [Значит, если $\{g_n(x)\}$ — другая последовательность, такая, что $g_n(x) \equiv x$ для всех n, то $\lim f_n = \lim g_n$, в то время как $\lim Af_n \neq \lim Ag_n$. Чтобы получить замкнутый оператор из этого A, нужно *удалять* функции из $D(A)$ вместо того, чтобы добавлять их.] Чтобы построить $f_n(x)$, возьмем $[a, b] = [0, 1]$ и разобьем единичный квадрат в плоскости (x, y) на n^2 клеток (или ячеек) горизонтальными и вертикальными прямыми. В каждой из диагональных ячеек (см. рис. 7.1) определим $y = f_n(x)$ как уменьшенную копию функции Кантора, описанной в § 13.1. Тогда $f_n'(x) = 0$ почти всюду, $f_n(x)$ непрерывна и $f_n(x) \longrightarrow x$ при $n \longrightarrow \infty$. Поэтому A не замыкаем.

Замечание. Как видно из этих примеров, даже если A замкнут, его область определения $D(A)$ не обязательно замкнута; в действительности, по знаменитой *теореме о замкнутом графике* если оператор A замкнут и имеет замкнутую область определения, то A ограничен. В частности, если A замкнут и определен на всем H, то A ограничен. Более общую формулировку теоремы о замкнутом графике и ее доказательство см. у Като [1966][1]).

Упражнения

1. Покажите, что для любого оператора A, если A^* существует (т. е. если $D(A)$ плотна в H), то A^* замкнут. Отсюда следует, что симметрический оператор замыкаем, а самосопряженный замкнут.

2. Выясните, какой из следующих операторов A замыкаем, и для каждого замыкаемого оператора найдите область определения его замыкания.

(а) $H = l^2$, $D(A)$ — множество таких последовательностей $\xi = \{x_1, x_2, \ldots\}$, для которых лишь конечное число $x_n \neq 0$, а $A\xi = \{2x_1, 4x_2, 8x_3, \ldots, 2^n x_n, \ldots\}$.

(б) Для тех же H и $D(A)$ $A\xi = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} x_n, 0, 0, \ldots\right\}$.

(в) Для тех же H и $D(A)$ $A\xi = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)\, x_n, 0, 0, \ldots\right\}$.

(г) $H = L^2(0, 1)$, $D(A)$ — множество непрерывных на $[0, 1]$ функций; Af для любой $f(x) \in D(A)$ определяется как функция $[Af](x) = f(^1/_2) \sin \pi x$.

д) Для тех же H и $D(A)$ теперь Af определяется как $[Af](x) = \int_0^1 f(x')\, dx' \sin \pi x$.

7.7. ГРАФИК ОПЕРАТОРА. ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ И НУЛЬ-ПРОСТРАНСТВО

Замкнутость и другие свойства оператора допускают геометрическую интерпретацию с использованием его графика, который определяется следующим образом. Множество всех упорядоченных пар $\{u, v\}$ элементов H образует гильбертово пространство,

---

[1]) Линейный оператор A из X в Y, определенный на всем X, замкнут тогда и только тогда, когда он ограничен. Теорема верна для любых банаховых пространств X и Y. — *Прим. перев.*

обозначаемое $H\times H$, если все операции над его элементами определяются «покомпонентно», а скалярное произведение определяется равенством

$$(\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\}) = (u_1, u_2) + (v_1, v_2),$$

где в правой части используется исходное скалярное произведение в H. *Графиком* оператора, обозначаемым $\Gamma(A)$, является по определению подмножество $H\times H$, состоящее из всех пар вида $\{u, Au\}$, где $u \in D(A)$. Это линейное многообразие в $H\times H$ (если A — линейный оператор). График является *замкнутым* линейным многообразием, или подпространством $H\times H$, тогда и только тогда, когда A является *замкнутым* линейным оператором. Линейное многообразие в $H\times H$ представляет собой график некоторого линейного оператора A тогда и только тогда, когда оно не содержит элементов вида $\{0, v\}$, $v \neq 0$. [Если бы оно содержало такие элементы, то оно содержало бы вместе с $\{u, w\}$ и $\{u, w+\alpha v\}$ с произвольным числом α, так что Au нельзя было бы однозначно определить по u.] Если A' — расширение A, то $\Gamma(A')$ содержит $\Gamma(A)$.

В частном случае, когда H — одномерное вещественное пространство $\mathbb{R}$, оператор (линейный или нелинейный) является функцией $f(x)$, отображающей $\mathbb{R}$ в себя; $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ — евклидова плоскость (x, y), а график $f(x)$ — множество точек $(x, f(x))$ на этой плоскости. [Это и оправдывает термин «график» для $\Gamma(A)$.] *Линейный* оператор в $\mathbb{R}$ является однородной линейной функцией $f(x) = ax$, а его график — прямая, проходящая через начало координат, т. е. одномерное подпространство. (В конечномерном случае любое линейное многообразие замкнуто, так что вопрос о замыкании здесь не стоит.)

Упражнения

1. Линейное многообразие $\hat{\Gamma}(A)$, определенное как множество элементов вида $\{Av, -v\}$ в $H\times H$ при $v \in D(A)$, называется *повернутым графиком* A, потому что в одномерном случае он получается в результате поворота графика в плоскости x, y вокруг начала координат на 90°. Воспользовавшись определением сопряженности, покажите, что если A определен на всюду плотном множестве, то A^* является оператором, график которого представляет собой ортогональное дополнение (в $H\times H$) к $\hat{\Gamma}(A)$, т. е.

$$\Gamma(A^*) = \hat{\Gamma}(A)^{\perp} \tag{7.7.1}$$

(тогда как если A определен не на плотном множестве, $\hat{\Gamma}(A)^{\perp}$ вообще не может быть графиком какого-либо оператора). Отсюда получается второе решение упражнения 1 предыдущего параграфа, потому что ортогональное дополнение множества — всегда замкнутое линейное многообразие вне зависимости от того, замкнуто множество или нет. [Если A замкнут, то и $\hat{\Gamma}(A)$ и $\Gamma(A^*)$ — замкнутые линейные многообразия, а пространство $H\times H$ — их ортогональная прямая сумма.]

2. Покажите, что если A — линейный оператор с плотной областью определения, то его нуль-пространство $\boldsymbol{N}(A)=\{u\in \boldsymbol{H}\colon Au=0\}$ является ортогональным дополнением области значений A^*:

$$\boldsymbol{N}(A)=\boldsymbol{R}(A^*)^{\perp}. \tag{7.7.2}$$

[*Замечания.* (1). Здесь $\perp$ обозначает ортогональное дополнение в исходном пространстве $\boldsymbol{H}$. (2) $\boldsymbol{N}(A)$ — всегда замкнутое линейное многообразие, но это неверно для $\boldsymbol{R}(A^*)$, так что если обратить приведенное выше утверждение, оно будет выглядеть так: $\overline{\boldsymbol{R}}(A^*)=\boldsymbol{N}(A)^{\perp}$.]

3. Докажите, что если A замыкаем и A^* существует, то A^{**} существует и совпадает с замыканием $\bar{A}$ оператора A.

Пояснение. Для замкнутого A представление $H\times H$ в виде ортогональной прямой суммы (см. § 1.6) выглядит так:

$$H\times H=\hat{\Gamma}(A)\oplus\Gamma(A^*).$$

Символы $\times$ и $\oplus$ имеют близкие, хотя слегка и отличающиеся значения. Если мы определяем подпространства H_1 и H_2 пространства $H\times H$ как множества всех пар $\{u, 0\}$ и $\{0, u\}$ соответственно, то и H_1, и H_2 изоморфны H, тогда как

$$H\times H=H_1\oplus H_2.$$

Отличие между этими символами состоит в том, что знак $\oplus$ используется для того, чтобы связать *подмножества данного* пространства, а при помощи знака $\times$ строится из старого пространства новое. В соответствии с этим знак $\oplus$ не имел бы смысла, если бы он стоял по обе стороны равенства.

7.8. ОПЕРАТОРЫ РАДИАЛЬНОГО ИМПУЛЬСА

Согласно общим представлениям квантовой механики, оператор импульса, соответствующий координате x, представляет собой $-i(\partial/\partial x)$ (предполагая использование таких единиц измерения, при которых $\hbar=1$). Если в качестве x взять радиальную координату r, то область ее значений будет $0<r<\infty$.

Прежде всего заметим, что оператор $-i(\partial/\partial r)$ нельзя сделать самосопряженным в гильбертовом пространстве $L^2(0, \infty)$ при любом выборе его области определения. Например, если оператор A определяется равенствами

$$\boldsymbol{D}(A)=\{f\in L^2(0, \infty)\colon f'\in L^2\},\quad Af=-if',$$

где штрих означает дифференцирование в смысле теории распределений, то A^* (как легко проверить) задается равенствами

$$\boldsymbol{D}(A^*)=\{f\in L^2\colon f'\in L^2,\ f(0)=0\},\quad A^*f=-if'.$$

Кроме того, сопряженным к A^* оператором является просто A, но ни A, ни A^* несамосопряженны. Оператор A^* симметричен, потому что $A^* \subset A$, но не имеет самосопряженного расширения (см. § 8.4).

Более подходящим в данном случае гильбертовым пространством является пространство L^2 распределений f, g, в котором скалярное произведение определяется равенством

$$(f, g) = \int_0^\infty \overline{f(r)}\, g(r)\, r^k\, dr, \tag{7.8.1}$$

где r рассматривается как радиальная координата в полярной системе координат в $(k+1)$-мерном пространстве. В § 5.9 гильбертово пространство такого типа обозначалось через L^2_σ, где

$$\sigma(r) = \begin{cases} r^{k+1}/(k+1) & \text{при } r \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } r < 0. \end{cases}$$

Чтобы сделать оператор хотя бы формально самосопряженным в этом гильбертовом пространстве, необходимо заменить $-i(\partial/\partial r)$ на $-i(\partial/\partial r) + k/(2r)$. Это предполагает рассмотрение оператора A_k, определенного следующим образом:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{D}(A_k) = \{f \in L^2_\sigma\colon\ f' + (k/(2r))\, f \in L^2_\sigma\}, \\ A_k f = -i\,(f' + (k/(2r))\, f) = -i r^{-k/2} (r^{k/2} f)'. \end{gathered} \tag{7.8.2}$$

[Отметим следующий любопытный факт: в трехмерном случае ($k=2$) A_k^2 совпадает (со знаком минус) с зависящей от r частью лапласиана, $-r^{-2}(\partial/\partial r)\, r^2 (\partial/\partial r)$, в то время как при $k \neq 2$ появляется дополнительный член

$$A_k^2 = -r^{-k} \frac{\partial}{\partial r} r^k \frac{\partial}{\partial r} - \frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{r}\right)^2.]$$

Чтобы найти A_k^*, возьмем f и g из области определения A_k. Интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b \overline{A_k f}\, g r^k\, dr &= i \int_a^b (r^{k/2} \bar f)' (r^{k/2} g)\, dr = \\ &= i\,[r^k \bar f g]_a^b - i \int_a^b (r^{k/2} \bar f)(r^{k/2} g)'\, dr. \end{aligned} \tag{7.8.3}$$

Поэтому

$$(A_k f, g) = i \lim_{\substack{b \to \infty \\ a \to 0}} [r^k \overline{f(r)}\, g(r)]_a^b + (f, A_k g), \tag{7.8.4}$$

если такой предел существует. Из (7.8.3) при $f = g$ и неравенства Шварца следует, что

$$[r^k|f(r)|^2]_a^b = 2\operatorname{Im}\int_a^b \overline{A_k f}\, f r^k\,dr \leqslant$$
$$\leqslant 2\left\{\int_a^b |A_k f|^2 r^k\,dr \int_a^b |f|^2 r^k dr\right\}^{1/2}.$$

Оба интеграла в фигурных скобках имеют конечные пределы при $a \to 0$, $b \to \infty$, потому что $A_k f$ и f принадлежат L_σ^2. Следовательно как и в § 5.6, если a и b оба стремятся к бесконечности или к нулю, то выражение в фигурных скобках стремится к нулю, значит, $r^k|f(r)|^2$ имеет определенные пределы как при $r \to \infty$, так и при $r \to 0$. Предел при $r \to \infty$ равен нулю, так как в противном случае f не могло бы принадлежать L_σ^2, однако предел при $r \to 0$ не обязательно равен нулю. [Например, если $f(r) = r^{-k/2}e^{-r}$, то f и $A_k f$ принадлежат L_σ^2, но $r^k|f(r)|^2 \to 1$ при $r \to 0$.] Поэтому (7.8.4) показывает, что сопряженный к A_k оператор A_k^* определяется так:

$$D(A_k^*) = \{g \in L_\sigma^2\colon\ g' + (k/(2r))g \in L_\sigma^2,\ \lim_{r\to 0} r^{k/2}|g(r)| = 0\},$$
$$A_k^* g = -i\,(g' + (k/(2r))\,g).$$

Таким образом, снова $A_k \neq A_k^*$, хотя $A_k^* \subset A_k$.

Несамосопряженность A_k и A_k^* — не просто математическое явление. Для любого комплексного α с $\operatorname{Im}\alpha > 0$ функция $f(r) = r^{-k/2}e^{i\alpha r}$ является собственной функцией оператора A_k с собственным числом α, в то время как собственные числа *самосопряженного* оператора все вещественны. С другой стороны, A_k^* не имеет даже непрерывного спектра. Симметрические операторы, которые, подобно A_k^*, не имеют самосопряженных расширений, характеризуются их так называемыми индексами дефекта, определение которых будет дано в § 8.6.

7.9. ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ЧИСЛОВАЯ ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ

Значительную информацию об операторе A можно получить из значений формы (v, Av). Если A определен на плотном множестве, то A симметричен тогда и только тогда, когда (v, Av) вещественны для всех $v \in D(A)$, потому что поляризация (см. § 1.11) уравнения $(v, Av) = (Av, v)$ дает $(u, Av) = (Au, v)$. Симметрический оператор называется *положительным*, если $(v, Av) > 0$ для всех $v \in D(A)$, $v \neq 0$; он называется *неотрицательным*, если $(v, Av) \geqslant 0$ для всех $v \in D(A)$; кратко пишут $A > 0$ или $A \geqslant 0$. Используют также термины *положительно* *определенный*[1]) и *положительно полуопределенный*. Отрицательные и неположительные операторы определяются аналогично. Пишут $A \geqslant B$, если $A-B \geqslant 0$, и $A > B$, если $A-B > 0$. Если A — любой ограниченный оператор, то самосопряженные операторы A^*A и AA^* неотрицательны, потому что $(v, A^*Av)=(Av, Av) \geqslant 0$ и $(v, AA^*v)=(A^*v, A^*v) \geqslant 0$.

Если A неограничен, то A^*A не обязательно самосопряжен, но фон Нейман (см. Като [1966]) доказал, что если A замкнут и имеет всюду плотную область определения, то оператор A^*A самосопряжен (см. замечание ниже). По утверждению упражнения 3 § 7.7 A^* также имеет плотную область определения, так как A^* замкнут, поэтому $A^{**}=A$; следовательно, AA^* также определен и самосопряжен. Очевидно, что AA^* и A^*A неотрицательны.

Числовой областью значений (или *полем значений*) оператора A называют множество комплексных чисел (v, Av), получающееся, когда v пробегает все такие элементы из $\boldsymbol{D}(A)$, для которых $\|v\|=1$. Ясно, что собственные значения оператора A, если они существуют, принадлежат числовой области значений. Непрерывный спектр (см. следующую главу) лежит в замыкании числовой области значений, там же находится и весь спектр, если A ограничен (Като). Любой оператор A с плотной областью определения замыкаем, если его числовая область значений не совпадает со всей комплексной плоскостью (Като).

Замечание. При изложении теоремы фон Неймана (в § 8.6) нам будет необходимо понятие произведения операторов AB: область определения этого оператора $\boldsymbol{D}(AB)=\{v \in \boldsymbol{D}(B)\colon Bv \in \boldsymbol{D}(A)\}$, а $(AB)v$ определяется как $A(Bv)$. Следовательно, $\boldsymbol{D}(A^*A)$ может быть меньше $\boldsymbol{D}(A)$, однако фон Нейман доказал, что $\boldsymbol{D}(A^*A)$ является по крайней мере так называемым *ядром* оператора A, т. е. если A_1 представляет собой ограничение A на $\boldsymbol{D}(A^*A)$, то замыкание A_1 совпадает с A.

[1]) Обычно положительно определенным оператором называют такой оператор A, для которого $(Av, v) \geqslant \gamma\|v\|$, $\gamma=\text{const} > 0$.— *Прим. перев.*