Глава 8

СПЕКТР И РЕЗОЛЬВЕНТА

Непрерывный, точечный и остаточный спектр; собственные векторы и приближенные собственные векторы; резольвента; аналитичность резольвенты; преобразование Кэли; теория фон Неймана расширений симметрических операторов; индексы дефекта симметрического оператора; второе определение самосопряженного оператора.

Предварительные сведения: гл. 1—5 и 7.

8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Собственные значения $(n \times n)$-матрицы M образуют (конечное) множество точек на комплексной плоскости, называемое *спектром* M. Аналогично, если A — любой линейный оператор в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, комплексная плоскость $\mathbb{C}$ разбивается на две части: спектр оператора A, обозначаемый через $\sigma(A)$, и резольвентное множество, обозначаемое через $\rho(A)$. Спектр $\sigma(A)$ далее разбивается на точечный спектр $P\sigma(A)$, непрерывный спектр $C\sigma(A)$ и остаточный спектр $R\sigma(A)$.

Эта классификация связана с существованием и свойствами оператора $(A-\lambda)^{-1}$ (упрощенное обозначение для $(A-\lambda I)^{-1}$, где I — единичный оператор). Напомним, что линейный оператор

$$T\colon\ \boldsymbol{D}(T) \to \boldsymbol{R}(T)$$

имеет обратный

$$T^{-1}\colon\ \boldsymbol{D}(T) \leftarrow \boldsymbol{R}(T)$$

тогда и только тогда, когда преобразование $u \to Tu$ является взаимно однозначным, т. е. из $Tu_1 = Tu_2$ должно следовать $u_1 = u_2$ или из $Tu = 0$ следует $u = 0$; иначе говоря, когда нуль не является собственным значением T.

Точечным спектром $P\sigma(A)$ называют множество собственных значений оператора A, т. е.

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ Au = \lambda u \text{ для некоторого ненулевого } u \in \boldsymbol{H}\}, \tag{8.1.1}$$

или, иначе говоря,

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon\ A-\lambda \text{ не имеет обратного оператора}\}. \tag{8.1.2}$$

Число λ принадлежит $C\sigma(A)$ (или, возможно, $R\sigma(A)$), если нет такого $u \neq 0$, что $Au - \lambda u = 0$, но для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдется «приближенный собственный вектор» $u = u(\varepsilon)$

с нормой $\|u\|=1$, такой, что $\|Au-\lambda u\|<\varepsilon$. В этом случае $(A-\lambda)^{-1}$ существует, но неограничен. Дальнейшая классификация спектра делается в соответствии с тем, является ли область определения $\boldsymbol{D}((A-\lambda)^{-1})$ (т. е. $\boldsymbol{R}(A-\lambda)$) плотной в $\boldsymbol{H}$ или нет.

Непрерывным спектром $C\sigma(A)$ оператора A называется множество

$$C\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon\ A-\lambda \text{ имеет неограниченный обратный оператор с плотной в } \boldsymbol{H} \text{ областью определения}\},\qquad(8.1.3)$$

а *остаточным спектром* $R\sigma(A)$ — множество

$$R\sigma(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon\ A-\lambda \text{ имеет обратный (ограниченный или неограниченный) оператор, область определения которого не плотна в } \boldsymbol{H}\}.\qquad(8.1.4)$$

[Для большинства представляющих интерес операторов (включая все самосопряженные, унитарные и вообще нормальные) остаточный спектр пуст, и поэтому непрерывный спектр можно представить себе состоящим из таких λ, для которых можно построить с наперед заданной точностью приближенный собственный вектор, не являющийся, однако, точным собственным вектором.]

Наконец, *резольвентное множество* $\rho(A)$ представляет собой остальную часть комплексной плоскости:

$$\rho(A)=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon\ A-\lambda \text{ имеет ограниченный обратный оператор с плотной в } \boldsymbol{H} \text{ областью определения}\}.\qquad(8.1.5)$$

Если $\lambda\in\rho(A)$, то нет даже соответствующих приближенных собственных векторов, поскольку

$$\|Au-\lambda u\|\geqslant(\|(A-\lambda)^{-1}\|)^{-1}\|u\|.$$

[Это неравенство получается из неравенства $\|(A-\lambda)^{-1}v\|\leqslant\|(A-\lambda)^{-1}\|\,\|v\|$ при помощи замены v на $Au-\lambda u$.]

Если λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$, то оператор $(A-\lambda)^{-1}$ называется *резольвентой* оператора A и обозначается через R_λ или $R_\lambda(A)$. Резольвенту можно рассматривать как семейство операторов, зависящих от комплексного параметра λ для λ из $\rho(A)$, т. е. как операторнозначную функцию одной комплексной переменной λ, определенную на $\rho(A)$. Ее свойства играют важную роль при анализе самосопряженных и родственных им операторов. Согласно определению $\rho(A)$, резольвента R_λ является для каждого λ ограниченным оператором с плотной в $\boldsymbol{H}$ областью определения.

8.2. ПРИМЕРЫ И УПРАЖНЕНИЯ

Читателю следует по возможности проверить утверждения, приведенные ниже. Чтобы показать, что данное λ принадлежит $P\sigma(A)$, найдите собственный вектор; чтобы показать, что λ принадлежит

$C\sigma(A)$, постройте последовательность приближенных собственных векторов; чтобы доказать, что λ принадлежит $\rho(A)$, решите уравнение $Au - \lambda u = v$ для произвольного v и покажите, что значения $\|u\|$ ограничены, если $\|v\| = 1$.

1. Пусть $\boldsymbol{H}$ — пространство $L^2(\mathbb{R})$, и пусть A — самосопряженный оператор $i(d/dx)$ с областью определения, состоящей из всех $f \in L^2$, таких, что f' (как распределение) также принадлежит L^2. Оператор A имеет чисто непрерывный спектр, совпадающий с вещественной осью. *Указание.* Приближенные собственные функции можно найти (для всех вещественных λ) в виде волновых пакетов $\alpha(x)\exp\{i\lambda x\}$, где $\alpha(x)$ подбирается соответствующим образом.

2. Пусть $\boldsymbol{H} = L^2(\mathbb{R})$, и пусть A — оператор умножения на x, определяемый следующим образом:

$$\boldsymbol{D}(A) = \{f(x) \in L^2\colon\ xf(x) \in L^2\}, \qquad Af(x) = xf(x).$$

A имеет чисто непрерывный спектр, совпадающий с вещественной осью.

3. Оператор $-(d/dx)^2$ с выбранной должным образом областью определения в $L^2(\mathbb{R})$ — см. § 7.5 — имеет чисто непрерывный спектр, совпадающий с неотрицательной вещественной полуосью (отрицательная вещественная полуось лежит в резольвентном множестве).

4. Оператор $-(d/dx)^2 + x^2$ с выбранной должным образом областью определения в $L^2(\mathbb{R})$ имеет чисто точечный спектр, состоящий из положительных целых нечетных чисел, каждое из которых является простым собственным значением. *Указание.* Собственные функции (полиномы Эрмита) образуют полное семейство.

5. Пусть M — заданная $(n \times n)$-матрица, и пусть A — оператор в $\boldsymbol{H} = l^2$, который представляется бесконечной матрицей

$$A_{np+j,\, np+k} = M_{jk}, \quad (j, k = 1, \ldots, n, \quad p = 0, 1, 2, \ldots),$$
$$A_{rs} = 0 \text{ для остальных } r, s$$

(см. рис. 8.1). A имеет чисто точечный спектр, состоящий из конечного числа собственных значений, каждое из которых имеет бесконечную кратность.

6. Пусть A — самосопряженный оператор в $\boldsymbol{H} = l^2$, матрица которого имеет вид (см. рис. 8.2)

$$A_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ при } j = k+1, \\ 1 \text{ при } j = k-1, \\ 0 \text{ при } j \neq k \pm 1. \end{cases}$$

Отрезок $-2 \leqslant \lambda \leqslant 2$ является непрерывным спектром этого оператора, остальная часть вещественной оси лежит в резольвентном множестве.

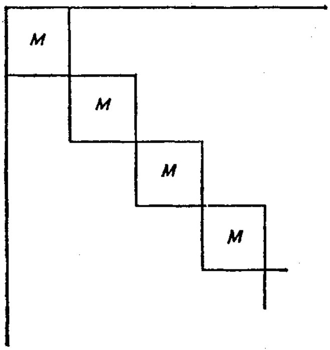

Рис. 8.1. Бесконечная матрица.

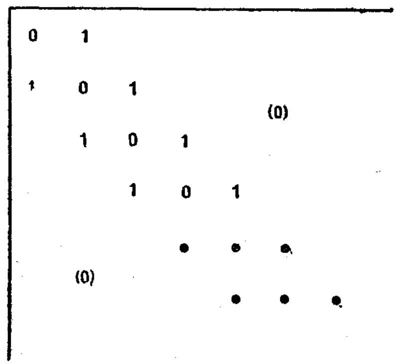

Рис. 8.2. Другая бесконечная матрица.

7. Рассмотрим в $H = l^2$ унитарный оператор A, описанный в § 7.3 и отображающий

$$\xi = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_{2n},\ x_{2n+1},\ \ldots)$$

в

$$A\xi = (x_2,\ x_4,\ x_1,\ x_6,\ x_3,\ \ldots,\ x_{2n+2},\ x_{2n-1}, \ldots).$$

Этот оператор не имеет точечного спектра, а его непрерывный спектр совпадает с единичной окружностью на плоскости λ.

8. *Операторы уничтожения* и *рождения* в $H = l^2$, обозначаемые через a и a^*, определяются следующим образом. Они имеют общую область определения

$$\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{D}(a) = \boldsymbol{D}(a^*) = \left\{\xi = (x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots):\ \sum n\,|x_n|^2 < \infty\right\}. \qquad (8.2.1)$$

Значения $a\xi$ и $a^*\xi$ определяются так:

$$a(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots) = (x_1,\ \sqrt{2}x_2,\ \sqrt{3}x_3,\ \ldots),$$

$$a^*(x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots) = (0,\ x_0,\ \sqrt{2}x_1,\ \sqrt{3}x_2,\ \ldots).$$

Физическая интерпретация в простейшем случае состоит в том, что вектор

$$\varphi_n = (0,\ 0,\ \ldots,\ x_n = 1,\ 0,\ 0,\ \ldots)$$

представляет состояние физической системы из n частиц; в частности, φ_0 дает состояние вакуума. Действие операторов a и a^* на эти состояния выглядит так:

$$a\varphi_n = \sqrt{n}\varphi_{n-1}, \quad a^*\varphi_n = \sqrt{n+1}\varphi_{n+1}.$$

Покажите, что a^* — сопряженный a в соответствии с определением § 7.2 (см. уравнение (7.2.1)). Покажите, что

$$a^*a - aa^* = -1$$

в том смысле, что для всех ξ в некоторой области определения $\boldsymbol{D}_2 (\subset \boldsymbol{D}_1)$ (которую следует найти)

$$a^*a\xi - aa^*\xi = -\xi.$$

Оператор $N = a^*a$ с областью определения $\boldsymbol{D}_2$ называется *оператором числа частиц*. Его действие на состояние φ_n оказывается таким: $N\varphi_n = n\varphi_n$. Докажите, что точечный спектр оператора a совпадает со всей комплексной плоскостью. Для этого найдите решение ξ_λ уравнения

$$a\xi_\lambda = \lambda\xi_\lambda$$

при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ и проверьте, что $\xi_\lambda \in l^2$. Проверьте также, что точечный спектр a^* пуст, показав, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ из уравнения $a^*\xi = \lambda\xi$ следует $\xi = 0$. Наконец, покажите (пользуясь соотношением (7.7.2) между нуль-пространством и областью значений оператора), что остаточным спектром a^* является вся комплексная плоскость.

8.3. СПЕКТР СИММЕТРИЧЕСКОГО, САМОСОПРЯЖЕННОГО И УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРОВ

Сначала предположим, что A симметричен, т. е. что $\boldsymbol{D}(A)$ плотна в $\boldsymbol{H}$ и $(u, Aw) = (Au, w)$ для всех $u, w \in \boldsymbol{D}(A)$ (тогда (u, Au) всегда вещественно), и рассмотрим уравнение

$$Au - \lambda u = v. \tag{8.3.1}$$

Мнимая часть уравнения $(u, Au) - \lambda(u, u) = (u, v)$ есть

$$-\operatorname{Im}\lambda \|u\|^2 = \operatorname{Im}(u, v). \tag{8.3.2}$$

Отсюда следует, что если λ невещественно, то обязательно $v \neq 0$, если взять $u \neq 0$; следовательно, такое λ не может быть собственным значением A и оператор $A - \lambda$ имеет обратный. В силу неравенства Шварца

$$|\operatorname{Im}\lambda| \|u\|^2 = |\operatorname{Im}(u, v)| \leqslant |(u, v)| \leqslant \|u\| \|v\|,$$

но поскольку $u = (A - \lambda)^{-1} v$, мы получаем

$$\|(A - \lambda)^{-1} v\| \leqslant (1/|\operatorname{Im}\lambda|) \|v\|. \tag{8.3.3}$$

Следовательно, для любого симметрического оператора A любое невещественное λ принадлежит либо резольвентному множеству, либо остаточному спектру.

Предположим теперь, что A самосопряжен. Напоминаем (см. § 7.8), что если T — оператор с плотной областью определения, то замыкание $\overline{\boldsymbol{R}}(T)$ его области значений совпадает с $\boldsymbol{N}(T^*)^{\perp}$, ортогональным дополнением нуль-пространства T^*. Поэтому для невещественного λ

$$\overline{\boldsymbol{R}}(A-\lambda)=\boldsymbol{N}(A^*-\overline{\lambda})^{\perp},$$

но $A^*=A$, а $\overline{\lambda}$ не является собственным значением; следовательно, нуль-пространство оказывается пустым (за исключением нулевого элемента), а его ортогональное дополнение совпадает с $\boldsymbol{H}$. Это означает, что область значений $A-\lambda$, которая совпадает с областью определения $(A-\lambda)^{-1}$, плотна в $\boldsymbol{H}$ и что *любое невещественное λ принадлежит резольвентному множеству* $\rho(A)$, поскольку из (8.3.3) следует, что $(A-\lambda)^{-1}$ ограничен. Кроме того, оператор $(A-\lambda)^{-1}$ замкнут, поскольку A замкнут (и, следовательно, $A-\lambda$ замкнут), а график $(A-\lambda)^{-1}$ — повернутый график оператора $-A+\lambda$ и, значит, — замкнутый график. Поэтому для $\lambda\in\rho(A)$ резольвента $R_\lambda=(A-\lambda)^{-1}$ определена на всем $\boldsymbol{H}$. Действительно, при любом λ, не являющимся собственным значением, $(A-\lambda)^{-1}$ существует и имеет плотную область определения, т. е. остаточного спектра нет. Суммируем эти результаты:

Теорема 1. *Пусть A самосопряжен. Тогда спектр $\sigma(A)$ лежит на вещественной оси; верхняя и нижняя полуплоскости находятся в резольвентном множестве $\rho(A)$; остаточный спектр пуст; для любого $\lambda\in\rho(A)$ область определения $R_\lambda=R_\lambda(A)$ совпадает с $\boldsymbol{H}$; для невещественного λ*

$$\|R_\lambda\|\leqslant 1/|\operatorname{Im}\lambda|. \tag{8.3.4}$$

Рассуждения, при помощи которых была получена эта теорема, можно почти без изменений перенести на случай унитарного оператора U. Если

$$Uv-\lambda v=w,$$

так что $v=R_\lambda w$, то

$$\|v\|^2=\|Uv\|^2=|\lambda|^2\|v\|^2+2\operatorname{Re}(\lambda v,\ w)+\|w\|^2.$$

Остальные рассуждения оставляются в качестве упражнения. [Чтобы получить оценку для $\|v\|/\|w\|$, нужно решить квадратное уравнение.] В результате получается следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть U унитарен. Тогда спектр $\sigma(U)$ лежит на единичной окружности $|\lambda|=1$; внутренность и внешность единичного круга находятся в резольвентном множестве $\rho(A)$; остаточный спектр пуст; если $\lambda\in\rho(U)$, то область определения $R_\lambda=R_\lambda(A)$ совпадает с $\boldsymbol{H}$; для $|\lambda|\neq 1$*

$$\|R_\lambda\|\leqslant 1/|1-|\lambda||. \tag{8.3.5}$$

Неравенства (8.3.4) и (8.3.5) превращаются в равенства при замене знаменателя расстоянием от точки λ до спектра; в таком виде эти оценки можно обобщить на случай нормального оператора. Оператор T называется *нормальным*, если он коммутирует со своим сопряженным (в строгом смысле: необходимо, чтобы не только $T^*Tx=TT^*x$ для всех x, для которых определены обе части равенства, но чтобы T^*T и TT^* имели одну и ту же область определения, так что если определено T^*Tx, то TT^*x также определено, и обратно). Самосопряженные и унитарные операторы нормальны. Для $\lambda \in \rho(T)$ положим

$$d(\lambda, \sigma(T)) = \inf\{|\lambda-\mu|: \mu \in \sigma(T)\}$$

(вместо inf можно поставить min, потому что спектр $\sigma(T)$ является замкнутым подмножеством комплексной плоскости; см. § 8.5 ниже).

Теорема 3. *Если T — нормальный оператор и R_λ — его резольвента, то для $\lambda \in \rho(T)$*

$$\|R_\lambda\| = 1/d(\lambda, \sigma(T)). \tag{8.3.6}$$

Доказательство приводится, например, в книге Като [1966].

В § 8.5 будет доказано, что для любого оператора A вместе с $\lambda \in \rho(A)$ в резольвентном множестве $\rho(A)$ лежит и внутренность круга радиуса $\|R_\lambda\|^{-1}$ с центром в λ, т. е. множество комплексных чисел μ, таких, что $|\mu-\lambda| < \|R_\lambda\|^{-1}$. Следовательно,

$$\|R_\lambda\| \geqslant 1/d(\lambda, \sigma(A)) \tag{8.3.7}$$

для любого оператора A вне зависимости от того, является он нормальным или нет.

8.4. ИЗМЕНЕНИЕ СПЕКТРА ПРИ РАСШИРЕНИИ ОПЕРАТОРА

Если заменить линейный оператор A его расширением A', то подмножества $P\sigma(A)$, $C\sigma(A)$, $R\sigma(A)$, $\rho(A)$ комплексной плоскости изменятся. Например, хотя точечный спектр $P\sigma(A)$ не может уменьшиться, он может увеличиться, потому что собственный вектор оператора A' может и не принадлежать $\boldsymbol{D}(A)$. Остаточный спектр $R\sigma(A)$ не может увеличиться (поскольку $\boldsymbol{D}((A-\lambda)^{-1})$ содержится в $\boldsymbol{D}((A'-\lambda)^{-1})$, и если последняя область не плотна, то и первая не может быть плотной), но может уменьшиться. Различные возможности изменений указанных множеств изображены на рис. 8.3, что легко проверить. На этой диаграмме $S_1 \to S_2$ означает, что данная точка λ комплексной плоскости, которая ранее была в S_1, может оказаться принадлежащей множеству S_2 после того, как A заменено на A'.

Действие стрелки внизу диаграммы можно проиллюстрировать на примере оператора A радиального импульса квантовой механики (см. § 7.8). Именно, пусть $H = L^2(0, \infty)$, и пусть A определяется следующим образом:

$$D(A) = \{f \in L^2:\ f' \in L^2,\ f(0) = 0\},$$
$$Af = -if'.$$

[Поскольку $f' \in L^2$, функция f является непрерывной на $[0, \infty)$; значит, граничное условие $f(0) = 0$ существенно.] Сопряженный

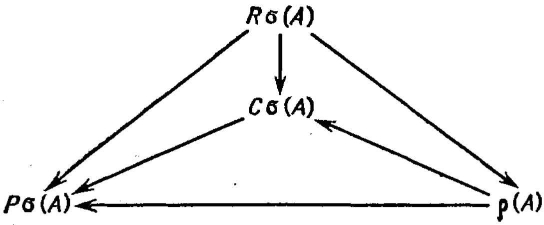

Рис. 8.3. Изменение спектра при расширении оператора.

оператор A^* является расширением A, его область определения включает элементы L^2, которые не удовлетворяют граничному условию, а именно:

$$D(A^*) = \{f \in L^2:\ f' \in L^2\},$$
$$A^*f = -if'.$$

Легко видеть, что A симметричен, т. е. что $(Af, g) = (f, Ag)$ для всех $f, g \in D(A)$. Он, однако, несамосопряжен, и не имеет самосопряженного расширения; A^* несимметричен, потому что $(A^*f, g) - (f, A^*g) = -if(0)g(0)$. Пусть λ принадлежит верхней полуплоскости; если λ — собственное значение A или A^*, то собственная функция является решением уравнения

$$-if'(x) = \lambda f(x);$$

следовательно,

$$f(x) = ce^{i\lambda x}, \quad c = \text{const}.$$

Эта функция является собственной функцией A^* при $\operatorname{Im} \lambda > 0$, но не является таковой для A, поскольку она не принадлежит $D(A)$, если константа отлична от нуля, в противном же случае получаем $f(x) \equiv 0$. Однако λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, в чем можно убедиться, решив уравнение

$$-if'(x) - \lambda f(x) = g(x)$$

при заданном $g \in L^2$. Это решение есть

$$f(x) = i \int_0^x e^{i\lambda (x-y)} g(y)\, dy;$$

оно единственно вследствие граничного условия $f(0)=0$. Функция f непрерывна; более того, если g имеет ограниченный носитель и $\operatorname{Im}\lambda > 0$, то $f(x)$ экспоненциально убывает при $x \to \infty$ и, следовательно, принадлежит $L^2(0, \infty)$. Функции с ограниченным носителем плотны в L^2, поэтому $(A-\lambda)^{-1}$ существует и имеет всюду плотную область определения. Неравенство (8.3.3) здесь применимо, поскольку A симметричен; поэтому $(A-\lambda)^{-1}$ ограничен. Отсюда следует вывод о том, что верхняя полуплоскость, с одной стороны, лежит в резольвентном множестве $\rho(A)$ оператора A, а с другой стороны — в точечном спектре $P\sigma(A^*)$ оператора A^*.

Упражнение

1. Выясните, как связана остальная часть комплексной плоскости ($\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$) со спектрами операторов A и A^*.

Замечание. Оператор A радиального импульса не имеет самосопряженного расширения. Если бы оператор B был таким расширением, то A^* был бы расширением $B^* = B$, следовательно, были бы верны соотношения

$$\boldsymbol{D}(A) \subset \boldsymbol{D}(B) = \boldsymbol{D}(B^*) \subset \boldsymbol{D}(A^*),$$

где включения $\subset$ являются собственными. Однако $\boldsymbol{D}(A^*)$ является линейной оболочкой $\boldsymbol{D}(A)$ и одномерного множества, содержащего, например, функции ce^{-x}. Поэтому между $\boldsymbol{D}(A)$ и $\boldsymbol{D}(A^*)$ нет места для $\boldsymbol{D}(B)$, т. е. если бы $\boldsymbol{D}(B)$ содержала хоть один элемент, не принадлежащий $\boldsymbol{D}(A)$, то она содержала бы и всю $\boldsymbol{D}(A^*)$, значит, тогда бы $B = A^*$, но A^* несамосопряжен и даже несимметричен. Дополнительные сведения по этому вопросу см. в § 8.6 об индексах дефекта.

Важным случаем расширения оператора является простая замена замыкаемого оператора A его замыканием $\bar{A}$. В этом случае большинство стрелок в приведенной выше диаграмме исчезает. Легко проверить, что в этом случае резольвентное множество не изменяется (однако область определения резольвенты R_λ, вообще говоря, увеличивается: из плотного в $\boldsymbol{H}$ множества она переходит во все $\boldsymbol{H}$) и что общая диаграмма сводится к следующей:

$$C\sigma(A) \to P\sigma(A) \leftarrow R\sigma(A).$$

Если замыкание $\bar{A}$ замыкаемого оператора A является самосопряженным, то A называют *существенно самосопряженным*. В этом случае $\bar{A}$ является единственным самосопряженным расширением A. Действительно, всегда если $A \subset B$, то $A^* \supset B^*$ (докажите!); поэтому другое самосопряженное расширение A_1, будучи замкнутым, является расширением оператора $\overline{A}$ (напоминаем, что $\overline{A}$ — минимальное замкнутое расширение A), но тогда из $\overline{A} \subset A_1$ следует $\overline{A}^* \supset A_1^*$, а поскольку $A_1^* = A_1$ и $\overline{A}^* = \overline{A}$, то $\overline{A} \supset A_1$, т. е. $\overline{A} = A_1$. Замена существенно самосопряженного оператора его замыканием оставляет все части спектра без изменения; единственное следствие этой замены состоит в том, что при $\lambda \in \rho(A)$ $\boldsymbol{D}(R_\lambda)$ увеличивается до всего $\boldsymbol{H}$.

8.5. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Как и в конечномерном случае, резольвента R_λ любого замкнутого оператора A удовлетворяет *резольвентному уравнению*

$$(R_\lambda - R_\mu)/(\lambda - \mu) = R_\lambda R_\mu \tag{8.5.1}$$

при λ, $\mu \in \rho(A)$; это равенство можно проверить, умножив обе его части слева на $(A - \lambda)$, что допустимо потому, что, во-первых, если любая часть применяется к произвольному $v \in \boldsymbol{H}$, то результат принадлежит $\boldsymbol{D}(A)$, и, во-вторых, оператор $(A - \lambda)$ имеет обратный. [*Замечание.* Для любого $v \in \boldsymbol{D}(A)$ $R_\lambda(A - \lambda)v = v = (A - \lambda)R_\lambda v$, однако R_λ и $(A - \lambda)$ не коммутируют в строгом смысле, потому что область определения $(A - \lambda)R_\lambda$ больше (а именно совпадает со всем $\boldsymbol{H}$), чем область определения $R_\lambda(A - \lambda)$. Таким образом,

$$R_\lambda(A - \lambda) \subset (A - \lambda)R_\lambda = I. \tag{8.5.2}$$

Однако $A - \lambda$ коммутирует с $A - \mu$, а R_λ — с R_μ.]

Пусть теперь A — произвольный замкнутый оператор, а λ — произвольное фиксированное комплексное число из $\rho(A)$. Мы покажем сейчас, что открытый круг радиуса $\|R_\lambda\|^{-1}$ с центром в λ также находится в $\rho(A)$. Это означает, что $\rho(A)$ — открытое множество и неравенство (8.3.7) справедливо. Мы найдем также разложение R_μ в ряд по μ для μ из этого круга. Именно, пусть μ таково, что

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} |\mu - \lambda| \, \|R_\lambda\| < 1. \tag{8.5.3}$$

Определим последовательность операторов $B_n = B_n(\mu)$ равенством

$$B_n = R_\lambda + (\mu - \lambda) R_\lambda^2 + \ldots + (\mu - \lambda)^n R_\lambda^{n+1} \tag{8.5.4}$$

и покажем, что $B_n \to R_\mu$ при $n \to \infty$. Для любого $u \in \boldsymbol{H}$ и для $n > l$

$$\|B_n u - B_l u\| \leqslant (\alpha^{l+1} + \alpha^{l+2} + \ldots + \alpha^n) \|R_\lambda u\|, \tag{8.5.5}$$

поэтому $\{B_n u\}$ является последовательностью Коши и при $n \to \infty$ имеет предел, который линейно зависит от u. Это определяет оператор, который мы обозначим через B:

$$Bu = \lim_{n \to \infty} B_n u \quad (\forall u \in \boldsymbol{H}).$$

Более того, поскольку выражение в скобках в (8.5.5) представляет собой сумму геометрической прогрессии, нетрудно убедиться в том, что

$$\|Bu\| = \lim \|B_n u\| \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \|R_\lambda\| \|u\|, \tag{8.5.6}$$

так что B является ограниченным оператором. Если умножить левую часть (8.5.4) на $A-\mu$, правую часть (8.5.4) — на $A-\mu = (A-\lambda)-(\mu-\lambda)$, а затем просуммировать правую часть, то в результате получится

$$(A-\mu) B_n = I - (\mu-\lambda)^{n+1} R_\lambda^{n+1}.$$

Поэтому для любого $u \in \boldsymbol{H}$

$$(A-\mu) B_n u \to u \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а мы видели, что

$$B_n u \to Bu \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и поскольку $(A-\mu)$ — замкнутый оператор, получаем, что $Bu \in \boldsymbol{D}(A)$, $\mu \in \rho(A)$ и

$$B = (A-\mu)^{-1} = R_\mu,$$

что и требовалось доказать. Более того, из (8.5.6) и (8.5.3) следует, что

$$\|R_\mu\| \leqslant \frac{\|R_\lambda\|}{1-|\mu-\lambda|\|R_\lambda\|}. \tag{8.5.7}$$

[Из (8.5.5) следует, что $\|B_n - B_l\| \to 0$ при n, $l \to \infty$; значит, $\|B - B_l\| \to 0$ при $l \to \infty$. Говорят, что B_n сходится *по норме* к B. Различные типы сходимости операторов будут рассматриваться в следующей главе.]

Из (8.5.4) следует, что для $\lambda \in \rho(A)$, $|\mu-\lambda| < \|R_\lambda\|^{-1}$ и для любых $u, v \in \boldsymbol{H}$ $(u, R_\mu v)$ является суммой сходящегося степенного ряда,

$$(u, R_\mu v) = \sum_{l=0}^{\infty} (\mu-\lambda)^l (u, R_\lambda^{l+1} v);$$

следовательно, $(u, R_\mu v)$ является аналитической функцией аргумента μ. В частности,

$$d(u, R_\mu v)/d\mu\,|_{\mu=\lambda} = (u, R_\lambda^2 v);$$

интересно, что резольвентное уравнение (8.5.1) дает тот же самый результат, потому что

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{(u, R_\mu v)-(u, R_\lambda v)}{\mu-\lambda} = \lim_{\mu \to \lambda} (u, R_\mu R_\lambda v),$$

так что справа получается $(u, R_\lambda^2 v)$, если предположить, что $(u, R_\mu R_\lambda v)$ непрерывно по μ.

В § 9.7 будет показано, что $R_\lambda(A)$ можно саму по себе рассматривать как операторнозначную аналитическую функцию от λ и что, например, $dR_\lambda/d\lambda = R_\lambda^2$.

Примеры явных выражений резольвенты $R_\lambda(A)$ для некоторых операторов A будут приведены в гл. 10 и 11.

8.6. РАСШИРЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ. ИНДЕКСЫ ДЕФЕКТА. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КЭЛИ. ВТОРОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ

В 1929 г. фон Нейман разработал довольно полную теорию возможных симметрических расширений симметрического оператора (т. е. оператора A, определенного на всюду плотном множестве, такого, что $(Au, v) = (u, Av)$ для всех $u, v \in \boldsymbol{D}(A)$). Примеры, приведенные в гл. 7, показывают, что такие операторы могут не иметь самосопряженных расширений, могут быть самосопряженными или, более общо, могут иметь единственное самосопряженное расширение (в этом случае они называются существенно самосопряженными) или много различных самосопряженных расширений. В этой связи важную роль играют индексы дефекта, которые мы сейчас определим. Прежде всего если $\boldsymbol{M}$ — какое-либо линейное многообразие, то его *коразмерность*, обозначаемая $\operatorname{codim} \boldsymbol{M}$, определяется как размерность его ортогонального дополнения $\boldsymbol{M}^\perp$. Это либо неотрицательное целое число, либо трансфинитное кардинальное число — мощность (которая в сепарабельном гильбертовом пространстве может быть только $\aleph_0$). Если A — симметрический оператор, то его *индексами дефекта* называют числа (m, n), где $m = \operatorname{codim} \boldsymbol{R}(A+i)$, а $n = \operatorname{codim} \boldsymbol{R}(A-i)$; ясно, что m и n описывают размеры того, чего нехватает областям значений операторов $A \pm i$ (точнее, замыканиям этих областей) для пополнения до гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$. В § 8.3 было показано, что $A-\lambda$ имеет ограниченный обратный оператор при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$; следовательно, число i (или $-i$) принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$, если $m=0$ (или $n=0$), и остаточному спектру $R\sigma(A)$, если $m>0$ (или $n>0$).

Следующая лемма показывает, что числа $\pm i$ в определении индексов дефекта взяты произвольно: их можно заменить любыми числами λ_1 и λ_2, из которых первое лежит в верхней полуплоскости, а второе — в нижней.

Лемма. *Если T — любой линейный оператор, определенный на плотном в $\boldsymbol{H}$ множестве, то $\operatorname{codim} R(T-\lambda)$ не зависит от λ (т. е. является константой) в любой связной области плоскости λ, в которой $T-\lambda$ имеет ограниченный обратный оператор.*

(Доказательство см. у Ахиезера и Глазмана [1950, § 78].)

Следствие. *Если T симметричен, то* $\operatorname{codim} R(T-\lambda)$ *имеет постоянные значения m и n в нижней и верхней полуплоскостях. Более того, если $T-\lambda$ имеет ограниченный обратный оператор при некотором вещественном λ, то $m=n$.*

Теперь допустим, что T — симметрический оператор с индексами дефекта (m, n) и мы хотим найти все самосопряженные расширения A оператора T, если таковые существуют. Если такие расширения существуют, то T по меньшей мере замыкаем и без потери общности можно предположить, что он замкнут. [*Доказательство.* Если оператор A — самосопряженное расширение T (и, значит, замкнут) и если последовательности Коши $\{u_n\}$ и $\{Tu_n\}$ с $u_n \in \boldsymbol{D}(T)$ имеют пределы v и w, то $u_n \in \boldsymbol{D}(A)$ и $Tu_n = Au_n$ $(n=1, 2, \ldots)$; следовательно, $w=Av$, так что предел $\lim Tu_n$ зависит только от $\lim u_n$, значит, T замыкаем.] Кроме того, предположим пока, что $m=n$ и даже что $m=n<\infty$. (Мы увидим потом, что T не имеет самосопряженных расширений, если $m \neq n$.) Очевидно, что $T+i$ — также замкнутый оператор, а это указывает на то, что область значений $T+i$ является замкнутым линейным многообразием. Чтобы убедиться в этом, возьмем последовательность Коши $\{u_n\}$ элементов $\boldsymbol{R}(T+i)$; поскольку $(T+i)^{-1}$ ограничен, элементы $w_n=(T+i)^{-1}u_n$ образуют последовательность Коши и $u_n=(T+i)w_n$; оператор $T+i$ замкнут, следовательно, $\lim w_n \in \boldsymbol{D}(T+i)$, а $\lim u_n \in \boldsymbol{R}(T+i)$, поэтому $\boldsymbol{R}(T+i)$ замкнута.

Преобразование Кэли V симметрического оператора T определяется аналогично преобразованию Кэли эрмитовой матрицы, именно

$$\begin{gathered} \boldsymbol{D}(V)=\boldsymbol{R}(T+i), \\ Vw=(T-i)(T+i)^{-1}w \quad \text{для всех} \quad w \in \boldsymbol{D}(V). \end{gathered} \tag{8.6.1}$$

Если $(T+i)^{-1}w=u$, т. е. $w=(T+i)u$, то $Vw=Tu-iu$; следовательно, $\|Vw\|^2=(Tu-iu,\ Tu-iu)=\|Tu\|^2+\|u\|^2=\|w\|^2$, потому что $(Tu, u)=(u, Tu)$, т. е. $(Tu, iu)=-(iu, Tu)$. Таким образом, преобразование $w \to Vw$ является взаимно однозначным изометрическим отображением $\boldsymbol{R}(T+i)$ на $\boldsymbol{R}(T-i)$ или просто (для краткости) — *изометрией*. [Заметим, что если $\|Vw\|=\|w\|$ для всех $w \in \boldsymbol{D}(V)$, то $(Vu, Vw)=(u, w)$ для всех u, $w \in \boldsymbol{D}(V)$. Это можно показать с помощью процедуры поляризации, использованной и для вывода уравнения (7.2.3) из (7.2.2).] Если T самосопряжен, то $\boldsymbol{R}(T+i)=\boldsymbol{R}(T-i)=\boldsymbol{H}$ (по теореме 1 § 8.3) и V унитарен; обратно, если V — унитарный оператор, то T самосопряжен.

Следующая лемма описывает обращение преобразования Кэли.

Лемма. *Пусть T — симметрический оператор, и пусть V — его преобразование Кэли. Тогда оператор $V-1$ обратим и T можно выразить через V при помощи равенств*

$$\boldsymbol{D}(T)=\boldsymbol{R}(V-1), \quad T=-i(V+1)(V-1)^{-1}. \tag{8.6.2}$$

Обратно, если V — произвольная изометрия, такая, что $\boldsymbol{R}(V-1)$ плотна в $\boldsymbol{H}$, то $V-1$ обратим, оператор T, определенный в (8.6.2), *симметричен, а V является его преобразованием Кэли.*

Доказательство. Взяв u и w, определенные выше для произвольного $u\in\boldsymbol{D}(T)$, получим

$$w=(T+i)u, \quad Vw=(T-i)u, \quad (V-1)w=-2iu. \tag{8.6.3}$$

Следовательно, $(V-1)w=0\Rightarrow u=0\Rightarrow w=0$; значит, $V-1$ обратим. Из тех же уравнений легко вывести, что $u\in\boldsymbol{D}(T)$, если $u\in\boldsymbol{R}(V-1)$, и что $Tu=-i(V+1)(V-1)^{-1}u$, что и требовалось доказать. Обратно, пусть V — любая изометрия, для которой $\boldsymbol{R}(V-1)$ плотна в $\boldsymbol{H}$. Покажем, что $V-1$ обратим. Именно, предположим, что $(V-1)w=0$ для некоторого w. Поскольку $(w, z)=(Vw, Vz)$, для любого $z\in\boldsymbol{D}(V)$

$$0=(Vw-w, z)=(Vw, z)-(w, z)=-(Vw, Vz-z).$$

Так как элементы вида $Vz-z$ плотны в $\boldsymbol{H}$, отсюда следует, что $Vw=0$ и, следовательно, $w=0$. Поэтому $V-1$ обратим. Пусть теперь T определен равенствами (8.6.2). Для любых $u, v\in\boldsymbol{D}(T)$ мы можем тогда написать $u=(V-1)x$, $v=(V-1)y$ и затем $Tu=-i(V+1)x$ и $Tv=-i(V+1)y$. Поэтому

$$(u, Tv)=((Vx-x), -i(Vy+y)),$$
$$(Tu, v)=(-i(Vx+x), (Vy-y)),$$

откуда видно, что левые части равны, потому что $(Vx, Vy)=(x, y)$; следовательно, оператор T симметричен. Дополнительные выкладки показывают, что преобразование Кэли оператора T совпадает с V.

Теперь можно сформулировать первую теорему о расширениях симметрических операторов.

Теорема (фон Нейман). *Пусть T — замкнутый симметрический оператор с индексами дефекта (m, m) $(m<\infty)$, и пусть V — его преобразование Кэли. Тогда* (1) *если A — любое самосопряженное расширение оператора T и U — его преобразование Кэли, то U является расширением V, изометрически отображающим $\boldsymbol{N}(T^*-i)$ на $\boldsymbol{N}(T^*+i)$;* (2) *любое изометрическое отображение V' $\boldsymbol{N}(T^*-i)$ на $\boldsymbol{N}(T^*+i)$ определяет единственное самосопряженное расширение A оператора T, задаваемое уравнениями* (8.6.4) (*см. ниже*). *Так как V' можно представить унитарной матрицей размера $m\times m$, имеется m^2-параметрическое семейство самосопряженных расширений T. (Эти m^2 параметров вещественны.)*

Доказательство. Согласно теореме о связи нуль-пространства и области значений (см. упражнение 2 § 7.7), гильбертово пространство может быть представлено в виде ортогональной прямой суммы двумя способами:

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{R}(T+i)\oplus\boldsymbol{N}(T^*-i),$$
$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{R}(T-i)\oplus\boldsymbol{N}(T^*+i).$$

[*Замечание.* $\boldsymbol{R}(T\pm i)$ — замкнутые линейные многообразия, поскольку $(T\pm i)^{-1}$ — ограниченные замкнутые операторы.] (1) Так как A — расширение T, U является расширением V. Следовательно, по определению V оператор U изометрически отображает $\boldsymbol{R}(T+i)$ на $\boldsymbol{R}(T-i)$. Так как U сохраняет ортогональность, оно изометрически отображает и $\boldsymbol{N}(T^*-i)$ на $\boldsymbol{N}(T^*+i)$, что и утверждалось. (2) Пусть V' — *произвольное* изометрическое отображение $\boldsymbol{N}(T^*-i)$ на $\boldsymbol{N}(T^*+i)$, и пусть унитарный оператор U определен следующим образом:

$$Uv=Vv \quad \text{для} \quad v\in\boldsymbol{R}(T+i),$$
$$Uv=V'v \quad \text{для} \quad v\in\boldsymbol{N}(T^*-i),$$

а затем расширяется по линейности на все $\boldsymbol{H}$. Так как $V-1$ имеет плотную в $\boldsymbol{H}$ область значений, $U-1$ обладает таким же свойством. Поэтому, согласно вышеприведенной лемме, оператор A можно определить так:

$$\boldsymbol{D}(A)=\boldsymbol{R}(U-1);\quad Av=-i(U+1)(U-1)^{-1}v, \tag{8.6.4}$$

а тогда U есть преобразование Кэли оператора A. Так как U унитарен, A самосопряжен.

В качестве примера рассмотрим оператор T, описанный в § 7.5 и заданный в $L^2(-1, 1)$ следующим образом:

$$\boldsymbol{D}(T)=\{f\in L^2\colon f'\in L^2,\ f(-1)=f(1)=0\},$$
$$Tf=-if'.$$

Мы получили, что T^* совпадает с T, если исключить то, что у него отсутствуют граничные условия. Теперь мы найдем самосопряженные расширения T. Для любого $\lambda\in\mathbb{C}$ уравнение $(T^*-\lambda)f=0$ имеет решение $f(x)=e^{i\lambda x}$, которое всегда принадлежит $L^2(-1, 1)$; следовательно, индексы дефекта T есть (1, 1). Нуль-пространства $\boldsymbol{N}(T^*+i)$, $\boldsymbol{N}(T^*-i)$ состоят из функций, кратных e^x, e^{-x} соответственно; следовательно, общее изометрическое отображение $\boldsymbol{N}(T^*-i)$ на $\boldsymbol{N}(T^*+i)$ есть $V'=V'_\alpha\colon e^{-x}\to e^{i\alpha}e^x$, где α — фиксированное вещественное число. Область определения самосопряженного оператора A, соответствующего такому выбору V', есть область значений $U-1$, согласно (8.6.4), где U — унитарный оператор, определенный, как и выше, через V' и преобразование Кэли $V=(T-i)(T+i)^{-1}$ оператора T. Область определения V совпадает с областью значений $T+i$. Разложение $\boldsymbol{H}$ показывает, что области значений операторов $T+i$ и $T-i$ состоят из всех таких $f\in L^2$, для которых $\int_{-1}^{1} e^{-x}f(x)\,dx=0$ и $\int_{-1}^{1} e^{x}f(x)\,dx=0$ соответственно, что можно показать и непосредственно, вычисляя все f вида $(T+i)g$ с $g\in\boldsymbol{D}(T)$. Непосредственные вычисления показывают, что для любого $f_1\in\boldsymbol{R}(T+i)$

функция $Vf_1 (= (T-i)(T+i)^{-1} f_1)$ получается из уравнения

$$(Vf_1)(x) = 2e^x \int_{-1}^{x} e^{-y} f_1(y)\, dy + f_1(x).$$

Поэтому если произвольное $f \in L^2(-1, 1)$ записать как $f_1(x) + ce^{-x}$, где $f_1 \in \boldsymbol{R}(T+i)$ и $ce^{-x} \in \boldsymbol{N}(T^*-i)$, то

$$((U-1)f)(x) = 2e^x \int_{-1}^{x} e^{-y} f_1(y)\, dy + c(e^{x+i\alpha} - e^{-x})$$

или, короче,

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x).$$

Теперь $g_1(x)$ обращается в нуль при $x = \pm 1$ и является фактически общим элементом $\boldsymbol{D}(T)$. Влияние члена $g_2(x) = c(e^{x+i\alpha} - e^{-x})$ сказывается в том, что $\boldsymbol{D}(T)$ расширяется до $\boldsymbol{D}(A)$ ослаблением граничных условий $g(\pm 1) = 0$ до условия

$$g(1) = \frac{e^{1+i\alpha} - e^{-1}}{e^{-1+i\alpha} - e^{1}} g(-1) = e^{i\theta} g(-1),$$

где константа $e^{i\theta}$ определяется выражением

$$e^{i\theta} = \frac{e^{1+(1/2)i\alpha} - e^{-1-(1/2)i\alpha}}{e^{-1+(1/2)i\alpha} - e^{1-(1/2)i\alpha}}$$

и, значит, имеет модуль, равный единице. Отсюда следует вывод, что самосопряженные расширения T точно те же, что были найдены ранее и задавались с помощью (7.5.5) для каждого $\theta \in [0, 2\pi)$; в § 7.5 они были обозначены через A_θ.

Упражнения

1. Проверьте, что уравнение (8.6.4) дает для данного примера $A_\theta f = -if'$ для $f \in \boldsymbol{D}(A_\theta)$. *Указание.* Достаточно рассмотреть $f(x) = e^{x+i\alpha} - e^{-x}$.

2. Проведите аналогичное исследование для оператора T, определяемого следующим образом:

$$\boldsymbol{D}(T) = \{f\colon f^{(m)} \in L^2,\ f^{(p)}(-1) = f^{(p)}(1) = 0\ (p = 0, 1, \ldots, m-1)\},$$
$$Tf = (-i)^m f^{(m)},$$

где для любого целого $p \geqslant 0$ $f^{(p)}$ означает p-ю производную распределения f.

Метод, использованный для доказательства предыдущей теоремы, делает очевидной общую ситуацию. Пусть T — произвольный замкнутый симметрический оператор, и пусть (m, n) — его индексы дефекта. Далее, пусть F и G — замкнутые линейные многообразия, содержащиеся в $\boldsymbol{N}(T^*-i)$ и $\boldsymbol{N}(T^*+i)$ соответственно, оба имеющие размерность $m_0 \leqslant \min(m, n)$, и пусть V' — любая изометрия F на G. Линейное преобразование U, определяемое так:

$$Uw = Vw \quad \text{для} \quad w \in \boldsymbol{R}(T+i),$$
$$Uw = V'w \quad \text{для} \quad w \in F,$$

является изометрией $\boldsymbol{R}(T+i)\oplus F$ на $\boldsymbol{R}(T-i)\oplus G$. Тогда оператор A, определяемый в (8.6.4), является симметрическим расширением T, и все симметрические расширения могут быть получены таким образом. Оператор A оказывается *максимальным* (т. е. не допускает дальнейших расширений) тогда и только тогда, когда его индексы дефекта либо $(0, l)$, либо $(l, 0)$. Оператор A самосопряжен тогда и только тогда, когда его индексы дефекта есть $(0, 0)$, а для этого требуется, чтобы индексы дефекта оператора T имели вид (m, m). Если индексы дефекта оператора T есть (∞, ∞), то оператор T имеет как самосопряженные, так и несамосопряженные максимальные расширения.

Операторы радиального импульса (§ 7.8) имеют индексы дефекта $(1, 0)$ и, следовательно, являются максимальными, но не самосопряженными операторами.

Второе определение самосопряженности, эквивалентное первому, данному в предыдущей главе, но более удобное для некоторых целей, выглядит так: симметрический оператор (или замкнутый симметрический оператор) *существенно самосопряжен* (или *самосопряжен*), если $+i$ и $-i$ принадлежат его резольвентному множеству.

Следовательно, чтобы показать, что данный оператор A с плотной областью определения, такой, что $(Au, v)=(u, Av)$ для всех $u, v\in \boldsymbol{D}(A)$, существенно самосопряжен, т. е. является наблюдаемой, достаточно показать, что уравнения $Af\pm if=g$ имеют единственное решение f для любого g из плотного в $\boldsymbol{H}$ множества. Примеры можно найти в § 8.2, а также в гл. 10 и 11.