Глава 9

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫХ И УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Применения методов теории функций комплексной переменной в теории матриц; проекторы; разложение единицы; каноническое представление матрицы; форма Жордана; нильпотентная часть матрицы; обобщенные собственные векторы и собственные подпространства; теорема Шура о триангуляции; функции и распределения как граничные значения аналитических функций; преобразование Лапласа; каноническое представление самосопряженных и унитарных операторов; слабая, сильная и равномерная сходимость ограниченных операторов; спектр оператора A как множество таких t, для которых E_t — не константа; функции операторов; ограниченные наблюдаемые; полярное разложение оператора.

Предварительные сведения: в основном гл. 1, 7, 8.

Основное содержание данной главы основывается на аналогии (для самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве) с задачей диагонализации эрмитовой матрицы и тем самым с задачей представления матрицы через ее собственные значения и собственные векторы.

9.1. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЭРМИТОВОЙ МАТРИЦЫ

Пусть A — эрмитова $(n\times n)$-матрица. Преобразование $\mathbf{x}\to A\mathbf{x}$ в $\mathbb{C}^n$ можно описать геометрически через собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и ортонормированное семейство собственных векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ этой матрицы. Собственные векторы определяют инвариантные направления, а собственные значения описывают соответствующие растяжения и сжатия, которые осуществляют данное преобразование по этим направлениям. Однако такое описание весьма неоднозначно: любой вектор $\mathbf{v}_k$ можно умножить на любую константу α, такую, что $|\alpha|=1$; более того, если все векторы $\mathbf{v}_{k_1}, \ldots, \mathbf{v}_{k_p}$ соответствуют одному собственному значению, то их можно подвергнуть любому унитарному преобразованию в p-мерном (собственном) подпространстве, порожденном этими векторами. С другой стороны, *фиксация* различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ (скажем, в порядке возрастания) и соответствующих собственных *подпространств* $\boldsymbol{E}_1, \ldots, \boldsymbol{E}_q$ приводит к однозначному описанию преобразования — к такому представлению преобразования, которое можно обобщить на бесконечномерный случай.

Поскольку A — эрмитова матрица, собственные подпространства взаимно ортогональны и в сумме дают $\mathbb{C}^n$. Любой вектор

$x \in \mathbb{C}^n$ имеет единственное представление вида $x_1 + x_2 + \ldots + x_q$, где $x_j \in E_j$; иначе говоря, $\mathbb{C}^n$ является ортогональной прямой суммой:

$$\mathbb{C}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_q. \tag{9.1.1}$$

При фиксированном j и произвольном x отображение $x \to x_j$ является линейным преобразованием $\mathbb{C}^n$ на E_j, называемым *проектированием*; матрицу P_j этого преобразования называют *проектором*, в частности *проектором на j-е собственное подпространство*: $P_j x = x_j$. Разложение самого x_j имеет вид $0 + \ldots + x_j + 0 + \ldots + 0$, потому что x_j уже принадлежит E_j; следовательно, $P_j x_j = x_j$, тогда как $P_k x_j = 0$ при $k \neq j$. Но тогда $P_j^2 x = P_j x$ для любого x, в то время как $P_k P_j x = 0$ при $k \neq j$; значит,

$$P_j^2 = P_j, \tag{9.1.2}$$

$$P_k P_j = 0 \quad (k \neq j). \tag{9.1.3}$$

Так как любой вектор из E_j является собственным вектором, соответствующим λ_j, мы получаем, что $Ax = A \sum_j x_j = \sum_j \lambda_j x_j$; следовательно, для исходной матрицы A имеет место следующее представление:

$$A = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j P_j. \tag{9.1.4}$$

Поскольку, как указывалось выше, разложение $x = x_1 + \ldots + x_q$, где $x_j = P_j x$, для любого x единственно, мы получаем также, что

$$I = \sum_{j=1}^{q} P_j, \tag{9.1.5}$$

и если $f(\lambda)$ — произвольный многочлен (или любая функция соответствующего типа, область определения которой включает все собственные значения λ_j), то

$$f(A) = \sum_{j=1}^{q} f(\lambda_j) P_j. \tag{9.1.6}$$

На основании равенства (9.1.5) говорят, что проекторы P_j образуют *разложение единицы*.

Основная цель данной главы состоит в том, чтобы обобщить приведенные выше формулы на случай произвольного самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве. В общем случае возможен континуум «собственных значений» (т. е. непрерывный спектр); следовательно, суммирование нужно будет заменить интегрированием. Конечно, возможны также и дискретные собственные значения, так что ясно: здесь должен быть интеграл Стилтьеса, с тем чтобы были допустимы оба случая.

9.2. ПРОЕКТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ H

Если оператор P ограничен, определен на всем H и идемпотентен (т. е. $P^2=P$), то он называется *проектором*; очевидно, что $I-P$ также является проектором, потому что $(I-P)^2=I-2P+P^2=I-P$. Пусть M и N—области значений P и $I-P$ соответственно. Если $u\in M$, то $Pu=u$, тогда как если $u\in N$, то $Pu=0$.

Доказательство. M—область значений P, так что если $u\in M$, то $u=Pv$ для некоторого $v\in H$; но тогда $Pu=P^2v=Pv=u$. Если $u\in N$, то тогда из тех же рассуждений получаем, что $(I-P)u=u$, поэтому $Pu=0$.

Упражнение

1. Докажите, что линейные многообразия M и N замкнуты.

Замечание. M и N не обязательно ортогональны—см. ниже.

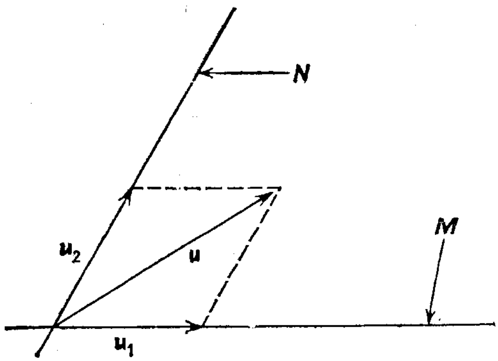

Рис. 9.1. Проекции вектора.

Утверждение. Любое $u\in H$ можно однозначно представить как $u=u_1+u_2$, где $u_1\in M$, $u_2\in N$ (u_1 и u_2 не обязательно ортогональны); см. рис. 9.1. Действительно, $u_1=Pu$, $u_2=(I-P)u$, так что $u_1+u_2=u$. Чтобы доказать единственность, предположим, что $u_1'+u_2'$—другое такое разложение u; но тогда u_1-u_1' $(=u_2'-u_2)$ принадлежало бы одновременно и M, и N, значит, во-первых, $u_1-u_1'=P(u_1-u_1')$ и, во-вторых, аналогично

$$u_1-u_1'=(I-P)(u_1-u_1')=(I-P)P(u_1-u_1')=(P-P^2)(u_1-u_1')=0.$$

Поэтому $u_1=u_1'$ и $u_2=u_2'$. Это и доказывает утверждение. Единственным вектором, принадлежащим как M, так и N, является нулевой элемент пространства H. Элементы u_1 и u_2 называются *проекциями* u на (или в) M и N соответственно.

Обратно, если M и N — любые замкнутые линейные многообразия, такие, что их линейная оболочка совпадает с H и любой элемент $u \in H$ имеет единственное разложение $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in M$, $u_2 \in N$, то соответствующий оператор P может быть определен равенством $Pu = u_1$; легко проверить, что так определенный оператор P является проектором с областью значений M и нуль-пространством N (нуль-пространство любого оператора A — это множество $u \in H$, таких, что $Au = 0$).

В общем случае M и N не ортогональны, но если проектор P также и самосопряжен, то для любого $u \in M$ и любого $v \in N$

$$(u, v) = (Pu, (I-P)v) = (u, P(I-P)v) = (u, (P-P^2)v) = 0,$$

т. е. в этом случае M и N *ортогональны* (символически $M \perp N$) и P называется *ортогональным проектором*.

Упражнение

2. Если P — ортогональный проектор, то $\|P\| = 1$.

9.3. ПОСТРОЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРОЕКТОРОВ ДЛЯ МАТРИЦЫ

В конечномерном случае проекторы P_j можно построить либо непосредственно, исходя из полной ортонормированной системы собственных векторов, либо при помощи методов теории функций, однако при этом только последний подход пригоден для распространения на бесконечномерный случай, и именно он будет сейчас описан.

Пусть A — произвольная матрица размера $n \times n$ (не обязательно эрмитова). Если λ не равно какому-либо собственному значению, то матрица $(A - \lambda I)$ обратима, причем обратная ей матрица — резольвента $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Согласно правилу Крамера, элементы обратной матрицы выражаются через определитель и миноры исходной матрицы; следовательно, элементы матрицы R_λ являются рациональными функциями λ с полюсами в собственных значениях $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ матрицы A. Для $|\lambda| \geqslant a$, где a — произвольная константа, которая больше всех $|\lambda_i|$, резольвенту можно разложить в ряд:

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda}\left(I + \frac{1}{\lambda}A + \frac{1}{\lambda^2}A^2 + \ldots\right). \tag{9.3.1}$$

Поэтому

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=a} R_\lambda \, d\lambda = I, \tag{9.3.2}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=a} \lambda R_\lambda \, d\lambda = A \tag{9.3.3}$$

и вообще

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=a}\lambda^m R_\lambda\, d\lambda = A^m, \quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots .$$

Во всех этих случаях под интегралом в левой части понимается матрица, $(j,\ k)$-й элемент которой является интегралом от $\lambda^m (R_\lambda)_{jk}$. Более того, если $f(\lambda)$ = любая функция, определенная степенным рядом для $|\lambda|\leqslant a$, то

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=a} f(\lambda)\, R_\lambda\, d\lambda = f(A), \tag{9.3.4}$$

в чем можно убедиться, умножив степенной ряд для $f(\lambda)$ на разложение (9.3.1) перед нахождением вычета. [Это последнее соотношение, если его записать как

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\lambda|=a} f(\lambda)\,(\lambda I - A)^{-1}\, d\lambda = f(A), \tag{9.3.5}$$

является обобщением интегральной формулы Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint f(\lambda)\,(\lambda - z)^{-1}\, d\lambda = f(z).]$$

Стянем теперь контур интегрирования настолько, насколько это возможно, а именно настолько, чтобы он превратился в набор малых контуров, каждый из которых окружает только одно собственное значение, как показано на рис. 9.2. Тогда (9.3.2) дает

$$\sum_{j=1}^{q} P_j = I, \tag{9.3.6}$$

где

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits^{(\lambda_j -)} R_\lambda\, d\lambda. \tag{9.3.7}$$

[Символ $(\lambda_j\,—)$ означает, что контур охватывает λ_j, обход контура делается в отрицательном направлении (по часовой стрелке), но при этом он не окружает никаких других особых точек подынтегральной функции.]

Чтобы показать, что P_j является проектором, нужно вычислить

$$P_j^2 = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \oint\limits^{(\lambda_j -)} \oint\limits^{(\lambda_j -)} R_\lambda R_\mu\, d\mu\, d\lambda. \tag{9.3.8}$$

Нет необходимости использовать для интегрирования один и тот же контур для обоих интегралов; в действительности достаточно предположить, что контур для интегрирования по μ лежит внутри области, охватываемой контуром интегрирования по λ,

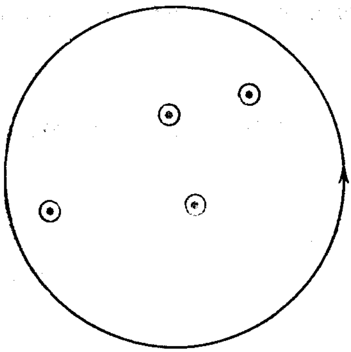

Рис. 9.2. Изменение контура интегрирования.

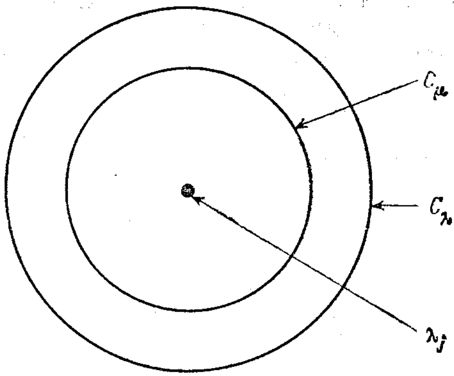

Рис. 9.3. Контуры C_μ и C_λ.

как показано на рис. 9.3. Обозначим эти контуры C_μ и C_λ соответственно. Резольвента R_λ удовлетворяет резольвентному уравнению (8.5.1), поэтому

$$P_j^2=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\limits_{C_\lambda}\int\limits_{C_\mu}\left[\frac{R_\lambda}{\lambda-\mu}-\frac{R_\mu}{\lambda-\mu}\right]d\mu\,d\lambda.$$

Если первый член проинтегрировать сначала по μ, то результат будет равен нулю, потому что λ лежит вне C_μ; если второй член проинтегрировать сначала по λ, то интеграл по λ даст $2\pi i R_\mu$ (напомним, что C_λ обходится по часовой стрелке); следовательно,

$$P_j^2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\mu}R_\mu\,d\mu=P_j. \qquad (9.3.9)$$

Таким образом, P_j—проектор. С помощью таких же рассуждений можно показать, что $P_jP_k=0$ при $j\neq k$, поскольку в этом случае оба контура лежат вне друг друга. Таким образом,

$$P_jP_k=P_kP_j=\delta_{jk}P_j. \qquad (9.3.10)$$

Чтобы выразить A через эти проекторы при помощи формулы (9.3.3), прежде всего определим следующие матрицы D_j:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits^{(\lambda_j-)}\lambda R_\lambda\,d\lambda=\lambda_jP_j+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits^{(\lambda_j-)}(\lambda-\lambda_j)R_\lambda\,d\lambda\overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=}\lambda_jP_j+D_j;$$

тогда

$$A=\sum_j[\lambda_j P_j+D_j]. \tag{9.3.11}$$

Это каноническое представление произвольной матрицы A. Его связь с другими каноническими представлениями будет прослежена в приведенных ниже упражнениях.

Упражнения

1. Используя контуры C_λ и C_μ, описанные выше, и применяя индукцию по m, покажите, что

$$D_j^m=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathscr{C}_\mu}(\mu-\lambda_j)^m R_\mu\,d\mu,$$

и в силу того, что R_μ имеет только полюсы, заключите, что D_j нильпотентна ($D_j^m=0$ для некоторого m).

2. При помощи аналогичных рассуждений выведите следующие уравнения:

$$D_jP_k=P_kD_j=\delta_{jk}D_j, \qquad AP_k=P_kA=\lambda_kP_k+D_k$$

и докажите, что (1) D_j отображает область значений оператора P_j в себя (эта область значений — обобщенное собственное подпространство E_j, соответствующее собственному значению λ_j), следовательно, A отображает E_j в себя; и что (2) если v — любой ненулевой вектор из E_j, то $(A-\lambda_j)^m v=0$ для некоторого положительного целого числа m. Если m — наименьшее такое число, то v называют *обобщенным собственным вектором порядка m* матрицы A [1]).

Исходя из формулы (9.3.11) и нильпотентности соответствующих матриц, можно показать (мы опускаем детали этих рассуждений), что любая матрица A размера $n\times n$ может быть представлена в *жордановой нормальной форме* при помощи преобразования подобия; иначе говоря, существует такая невырожденная матрица T, что

$$T^{-1}AT=J=\begin{bmatrix} J_1 & & & & & & & (0)\\ & J_2 & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ (0) & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & \cdot \end{bmatrix}, \tag{9.3.12}$$

где ненулевые элементы J локализованы в квадратные *жордановы блоки* J_1, J_2, ..., расположенные по главной диагонали; любой

---

[1]) Подпространство E_j часто называют *корневым подпространством*, а ненулевые векторы из E_j — *корневыми векторами*. — *Прим. перев.*

жорданов блок имеет вид

$$J_r=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & (0) \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ (0) & & & & \lambda \end{bmatrix},$$

где λ — одно из собственных значений матрицы A. Столбцы T — обычные и обобщенные (соответствующего порядка) собственные векторы матрицы A. Разные жордановы блоки не обязательно содержат разные собственные значения, т. е. некоторые блоки могут соответствовать подпространствам одного собственного подпространства E_j.

Упражнения

3. Используя неравенство (8.3.3), покажите, что для эрмитовой матрицы A резольвента R_λ имеет только простые полюсы; следовательно, $D_j=0$ для всех j и A задается формулой

$$A=\sum_{j=1}^{q}\lambda_j P_j;$$

в этом случае P_j — также эрмитовы матрицы, T можно считать унитарной матрицей, а жорданова форма матрицы является диагональной.

4. Применяя процедуру ортогонализации Грама — Шмидта к столбцам T в (9.3.12), докажите *теорему Шура*: любую матрицу A можно при помощи унитарного преобразования привести к верхней треугольной форме (т. е. к матрице, у которой все элементы ниже главной диагонали равны нулю).

Если A — оператор (не обязательно самосопряженный) в H и если формулы, подобные (9.3.6), (9.3.10) и (9.3.11), справедливы (естественно, с заменой суммирования интегрированием по Стилтьесу), то A называют *спектральным оператором*. В бесконечномерном случае нелегко выяснить, когда оператор спектрален. (В общем случае невозможно свести контур интегрирования к множеству контуров вокруг дискретных точек; более того, необходимо даже искать контур, который бы окружал спектр.) Используя это понятие, можно сказать, что главный результат данной главы состоит в том, что любой самосопряженный оператор является спектральным. Спектральный оператор, нильпотентная часть которого тождественно равна нулю, называется *оператором скалярного типа*. Именно таким является самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H (как и эрмитова матрица).

Упражнение

5. Пусть A — любая невырожденная $(n\times n)$-матрица, а $R_\lambda=(A-\lambda I)^{-1}$ — ее резольвента. Пусть C — простая замкнутая кривая на плоскости λ, которая обходит все собственные значения A против часовой стрелки, но не охватывает начала координат. На C многозначная функция $\ln\lambda$ расщепляется на независимые однозначные непрерывные ветви; обозначим одну из них через $\ln\lambda$ и определим $\ln A$ следующим образом:

$$\ln A=-\frac{1}{2\pi i}\oint_C R_\lambda \ln\lambda d\lambda.$$

Докажите, что

$$(\ln A)^n=-\frac{1}{2\pi i}\oint_C R_\lambda(\ln\lambda)^n d\lambda \quad (n=2,\ 3,\ \ldots)$$

и что $\exp(\ln A)=A$. Покажите также, что если взять другую ветвь $\ln\lambda$, то $\ln A$ получится из первой добавлением матрицы $2\pi i\, I$, умноженной на некоторое целое число.

9.4. СВЯЗЬ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Пусть A — самосопряженный оператор, а $R_\lambda=(A-\lambda)^{-1}$ — его резольвента. Как и в конечномерном случае, спектральные проекторы имеют вид $(2\pi i)^{-1}\oint R_\lambda d\lambda$, где интегрирование осуществляется вдоль замкнутого контура, окружающего часть спектра A (спектр лежит на вещественной оси). Для λ из резольвентного множества R_λ — аналитическая операторнозначная функция от λ (см. упражнение 4 в § 9.9), которую удобнее всего изучать при помощи обычной аналитической функции

$$\varphi(\lambda)=\varphi(\lambda;\ v)=(v,\ R_\lambda v)=(v,\ u),$$

где v — произвольный элемент H. Процедура поляризации, использованная ниже, показывает, что R_λ для заданного λ полностью определяется заданием $\varphi(\lambda;\ v)$ для всех v.

Согласно § 8.5 $\varphi(\lambda)$ аналитична в верхней и нижней полуплоскостях. Как было указано в § 8.3, мнимая часть равенства

$$(v,\ u)=(Au,\ u)-\bar\lambda(u,\ u)$$

имеет вид

$$\operatorname{Im}(v,\ u)=\operatorname{Im}\lambda\|u\|^2,$$

так что $\operatorname{Im}\varphi(\lambda)$ имеет тот же знак, что и $\operatorname{Im}\lambda$. Более того, на основании неравенства Шварца и оценки нормы резольвенты (8.3.4) получаем, что

$$|(v,\ u)|\leqslant\|v\|^2/|\operatorname{Im}\lambda|.$$

Поэтому $\varphi(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } \varphi(\lambda) \text{ аналитична,}\\ \text{(ii) } |\varphi(\lambda)| \leqslant \|v\|^2/\operatorname{Im}\lambda,\\ \text{(iii) } \operatorname{Im}\varphi(\lambda) > 0\end{array}\right\} \text{ для } \operatorname{Im}\lambda > 0. \tag{9.4.1}$$

[Подобные же утверждения имеют место и для нижней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda < 0$.]

Теорема. *Функцию с указанными выше свойствами можно записать в виде*

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(t)/(t-\lambda) \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0), \tag{9.4.2}$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая функция с конечными пределами при $t \to \pm\infty$; более того, если положить $\sigma(-\infty) = 0$, то $\sigma(t)$ выражается через $\varphi(\lambda)$ формулой

$$\sigma(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (1/\pi) \int_{-\infty}^{t} \operatorname{Im}\varphi(s+i\varepsilon)\, ds, \tag{9.4.3}$$

которая справедлива в точках непрерывности $\sigma(t)$. В точках разрыва $\sigma(t)$ мы произвольно накладываем условие нормализации

$$\sigma(t) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sigma(t+\delta), \tag{9.4.4}$$

т. е. условие непрерывности справа.

Доказательство можно найти в книге Ахиезера и Глазмана [1950, § 59].

Свойство (ii), приведенное выше, показывает, что полная вариация $\sigma(\infty) - \sigma(-\infty)$ пропорциональна $\|v\|^2$. На самом деле оказывается, что

$$\sigma(\infty) - \sigma(-\infty) = \|v\|^2. \tag{9.4.5}$$

9.5. ФУНКЦИИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАК ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Формулы (9.4.2) и (9.4.3), которые используются в спектральной теории, излагаемой ниже (§ 9.6), можно переписать на языке теории распределений следующим образом. Пусть f — производная σ' (в смысле теории распределений) функции $\sigma(t)$; тогда

$$(1/\pi)\operatorname{Im}\varphi(t+i\varepsilon) \to f(t) \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{9.5.1}$$

в смысле сходимости распределений, а

$$\varphi(\lambda) = \langle f(t),\ 1/(t-\lambda)\rangle \quad \text{для } \operatorname{Im}\lambda > 0. \tag{9.5.2}$$

Хотя функция $\psi_\lambda(t)=1/(t-\lambda)$ не является пробной (она принадлежит C^∞, но не C_0^∞ и не $\mathcal{S}$), эта формула все еще допускает разумную интерпретацию, потому что $\sigma(t)$ имеет ограниченную полную вариацию (она не убывает и имеет конечные пределы при $t\to\pm\infty$). А именно, если мы положим

$$\sigma_T(t)=\begin{cases}\sigma(-T) & \text{при } t<-T,\\ \sigma(t) & \text{при } -T\leqslant t<T,\\ \sigma(T) & \text{при } t\geqslant T,\end{cases}$$

то распределение $f_T=\sigma_T'$ имеет ограниченный носитель, следовательно, $\langle f_T, \psi\rangle$ определено для любого $\psi\in C^\infty$, а выражение в правой части (9.5.2) является пределом $\langle f_T, \psi_\lambda\rangle$ при $T\to\infty$.

Свойство (9.5.1) указывает на то, что $f(t)$ как распределение является граничным значением (или *следом*) гармонической функции $(1/\pi)\operatorname{Im}\varphi(\lambda)$ на вещественной оси. След $\operatorname{Re}\varphi(\lambda)$ тоже является распределением, но имеет несколько более сложный вид, поскольку $\operatorname{Re}\varphi(\lambda)$ не обязательно неотрицательна в верхней полуплоскости; в действительности эта функция является *второй* производной от непрерывной функции (в смысле теории распределений).

Упражнение

1. Исходя из равенства

$$\operatorname{Re}\varphi(x+iy)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t-x}{(t-x)^2+y^2}\,d\sigma(t), \tag{9.5.3}$$

которое следует из (9.4.2), покажите, что

$$\operatorname{Re}\varphi(x+iy)\longrightarrow\left(\frac{d}{dx}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}(t-x)\ln\frac{|t-x|}{\sqrt{t^2+1}}\,d\sigma(t) \tag{9.5.4}$$

при $y\longrightarrow 0$ $(y>0)$; здесь предел и производная берутся в смысле теории распределений. Сначала проверьте, что интеграл в (9.5.4) сходится и является непрерывной по x функцией.

Граничные значения аналитических функций хорошо изучены; см. Джонсон [1968] и цитированную там литературу, где приводятся некоторые последние достижения. Из старых результатов известна следующая теорема: если $\varphi(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $(\operatorname{Im} z>0)$ и если для некоторого $p\geqslant 1$

$$M\overset{\text{def}}{=}\sup_{y>0}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+iy)|^p\,dx<\infty \tag{9.5.5}$$

(тогда говорят, что $\varphi(z)$ принадлежит *классу Харди* H_p), то граничные значения $\varphi(z)$ на вещественной оси представляют собой элемент пространства $L^p(\mathbb{R})$. Иначе говоря, найдется такая функция или распределение f из $L^p(\mathbb{R})$, что $\varphi(x+iy)$, рассматриваемые при каждом фиксированном $y>0$ как функции x, сходятся по L^p-норме к $f(x)$ при $y\to 0$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+iy)-f(x)|^p\,dx \to 0 \quad \text{при } y\to 0.$$

L^p-норма f равна $M^{1/p}$; см. Хилле [1962, т. 2, гл. 19].

Для того чтобы привести другие примеры, отобразим полуплоскость $\operatorname{Im} z>0$ на единичный круг $|w|<1$ при помощи преобразования $w=(z-i)/(z+i)$ и тем самым устраним основные трудности, возникающие при $z\to\infty$; детали см. у Джонсона [1968] и Баернстейна [1971]. Если $\varphi(w)$ аналитична для $|w|<1$, обозначим

$$\varphi_r(\theta)=\varphi(re^{i\theta}), \quad 0\leqslant r<1. \tag{9.5.6}$$

Аналогами класса Харди H_p и пространства $L^p(\mathbb{R})$ является класс $\tilde{H}_p$ функций $\varphi(w)$, таких, что

$$\|\varphi\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{r<1}\left\{\int_0^{2\pi} |\varphi_r(\theta)|^p\,d\theta\right\}^{1/p} < \infty, \tag{9.5.7}$$

и пространство $L^p(S^1)$ (S^1 — единичная окружность или одномерная сфера) функций и распределений с нормой

$$\|f\| = \left\{\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p\,d\theta\right\}^{1/p}. \tag{9.5.8}$$

При $p=2$ $\tilde{H}_p=\tilde{H}_2$ является гильбертовым пространством, рассмотренным в § 1.10.

Приведем без доказательства (см. Джонсон [1968]) следующий результат: если $\varphi(w)$ аналитична при $|w|<1$ и удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(w)| < \frac{C}{(1-|w|)^k} \tag{9.5.9}$$

для некоторой постоянной C и некоторого целого числа k, то граничное значение $\varphi(w)$ на окружности $|w|=1$ является распределением. Распределение на S^1 — непрерывный линейный функционал на пространстве $C^\infty(S^1)$ бесконечно дифференцируемых функций $\psi(\theta)$ с периодом 2π по θ. [Сходимость последовательности в $C^\infty(S^1)$ та же, что и в $C_0^\infty(\mathbb{R})$, только ограничений на носители элементов последовательности не требуется, потому что S^1 компактна.] Таким образом, найдется такое распределение f на S^1, что

$$\varphi_r(\theta) \to f(\theta) \quad \text{при } r\to 1$$

в смысле сходимости распределений. Более того, f является $(k+1)$-й производной (в смысле теории распределений) непрерывной на S^1 функции, где k—то целое число, которое входит в неравенство (9.5.9).

Следующий пример показывает, что функция $\varphi(w)$, аналитическая в единичном круге, не обязательно удовлетворяет неравенству (9.5.9): пусть

$$\varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}} w^n \quad (a = \mathrm{const} > 1).$$

Радиус сходимости этого ряда равен 1, а

$$\varphi_r(0) = \sum a^{\sqrt{n}} r^n \quad (0 \leqslant r < 1).$$

При r, близком к 1, наибольшим членом этого ряда является

$$\max a^{\sqrt{n}} r^n \approx \exp\left\{\frac{(\ln a)^2}{4|1-r|}\right\},$$

который при $r \to 1$ ни при каких c и k нельзя оценить выражением $c/|1-r|^k$.

Если $\varphi(w)$ не удовлетворяет неравенству типа (9.5.9), то ее граничные значения на окружности $|w|=1$ являются не распределением, а *аналитическим функционалом*. Пусть $\mathcal{A}$ — класс пробных функций $\psi(w)$, аналитических на единичной окружности; точнее, пусть каждая $\psi(w)$ из $\mathcal{A}$ аналитична на некотором кольце $1-\varepsilon < |w| < 1+\varepsilon$, которое содержит единичную окружность. Последовательность $\{\psi_n\}$ из $\mathcal{A}$ *сходится* к ψ, если найдется такое кольцо $1-\varepsilon_0 < |w| < 1+\varepsilon_0$, на котором все $\psi_n(w)$ аналитичны и на котором они сходятся равномерно к $\psi(w)$. *Аналитическим функционалом* f на единичной окружности называют непрерывный линейный функционал $\langle f, \cdot\rangle$ на $\mathcal{A}$; это обобщение понятия распределения на единичной окружности. Последовательность аналитических функционалов $\{f_n\}$ *сходится к* f, если $\langle f_n, \psi\rangle \to \langle f, \psi\rangle$ для любой $\psi \in \mathcal{A}$. Основной результат этой теории состоит в том, что если $\varphi(w)$ аналитична на круге $|w| < 1$, то найдется такой аналитический функционал f, что

$$\varphi_r(\theta) \to f(\theta) \quad \text{при } r \to 1$$

в смысле определенной выше сходимости аналитических функционалов. Более подробное изложение теории см. у Джонсона [1968].

В настоящее время неясно, в какой степени аналитические функционалы могут заменить распределения в задачах математического анализа и в физических приложениях. Теория локальных свойств является, по-видимому, более трудной, потому что носитель пробной функции $\psi \in \mathcal{A}$ обязательно содержит всю единичную окружность, если только $\psi \not\equiv 0$.

В связи с обращением утверждения, что граничные значения аналитической функции $\varphi(w)$ являются распределением или аналитическим функционалом f, мы должны учитывать, что вещественная и мнимая части f не независимы, поскольку, они являются следами на $|w|=1$ соответственно функций $\operatorname{Re}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$, которые при $|w|<1$ удовлетворяют уравнениям Коши—Римана, т. е. являются *сопряженными* гармоническими функциями. В частном случае, когда $\varphi(w)$ непрерывна при $|w|\leqslant 1$, оказывается, что $f(\theta)=\varphi(e^{i\theta})=\varphi_1(\theta)$, и функция φ получается из f при помощи интеграла Пуассона:

$$\varphi_r(\theta)=\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)f(t)\,dt, \tag{9.5.10}$$

где

$$P_r(t)=\frac{1-r^2}{2\pi(1-2r\cos t+r^2)}. \tag{9.5.11}$$

Выражение в правой части уравнения (9.5.10) представляет собой свертку, поэтому мы можем записать

$$\varphi_r=P_r*f; \tag{9.5.12}$$

в таком виде эта формула справедлива вообще для любой функции $\varphi(w)$, аналитической при $|w|<1$, где f—след этой функции на $|w|=1$ (аналитический функционал) и где свертка аналитических функционалов определяется так же, как и свертка распределений.

Поскольку ядро P_r вещественно, вещественная и мнимая части $\varphi(w)$ и f в (9.5.10) и (9.5.12) разделяются, и в действительности (9.5.12) устанавливает взаимно однозначное соответствие между вещественными гармоническими функциями $\varphi(r,\theta)$ и вещественными аналитическими функционалами f и в связи с этим между комплексными гармоническими функциями (которые не предполагаются аналитическими, т. е. вещественные и мнимые части которых не обязательно являются сопряженными) и комплексными аналитическими функционалами. Если f—распределение, то $\varphi(w)$ удовлетворяет неравенству (9.5.9) для некоторых C и k.

В качестве последнего примера рассмотрим преобразование Лапласа медленно растущих распределений на $\mathbb{R}$ с носителями в $[0,\infty)$. Напоминаем, что если $f(t)$—непрерывная функция, определенная для $t\geqslant 0$ и при $t\to\infty$ удовлетворяющая неравенству $|f(t)|<\text{const}\cdot e^{\alpha t}$, то ее преобразование Лапласа

$$F(z)=\int_0^{\infty} e^{-zt}f(t)\,dt$$

аналитично в полуплоскости $\operatorname{Re} z>\alpha$. Если $f(t)$—функция медленного роста на бесконечности, то можно взять $\alpha=0$.

Пусть $f=f(t)$ — любое медленно растущее распределение на $\mathbb{R}$ с носителем в $[0, \infty)$. Пусть $\chi(t)$ — функция класса C^∞, такая, что она равна единице при $t \geqslant 0$ и нулю при $t \leqslant -1$; см. рис. 9.4. Для любого z с $\operatorname{Re} z > 0$ функция $\varphi_z(t) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(t) e^{-zt}$ принадлежит $\mathscr{S}$. Более того, $(1/\alpha)(\varphi_{z+\alpha}-\varphi_z) \xrightarrow{\mathscr{S}} d\varphi_z/dz$ (при $\alpha \to 0$); поэтому функция

$$F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \varphi_z \rangle \tag{9.5.13}$$

аналитична в правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Она называется преобразованием Лапласа от f. Так как $f=0$ на $(-\infty, 0)$, $F(z)$

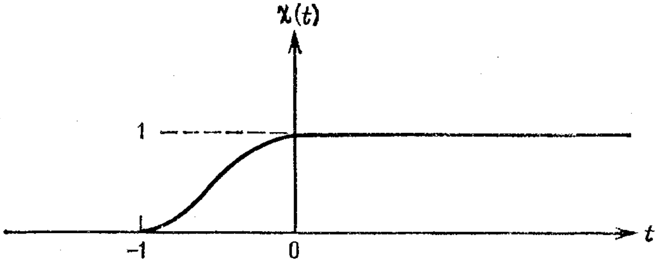

Рис. 9.4. Функция $\chi(t)$.

не зависит от поведения функции $\chi(t)$ на $(-1, 0)$. Пусть теперь $\psi(y)$ — любая пробная функция из $\mathscr{S}$. Для любого $x > 0$

$$\int_a^b F(x+iy)\psi(y)\,dy = \langle f, \Psi \rangle,$$

где

$$\Psi(t) = \chi(t) \int_a^b e^{-(x+iy)t} \psi(y)\,dy.$$

Ясно, что

$$\Psi(t) \xrightarrow{\mathscr{S}} \sqrt{2\pi}\,\chi(t)\,\hat{\psi}(t)$$

при $x \to 0$, $b \to \infty$, $a \to -\infty$. Поэтому при $x \to 0$

$$(1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} F(x+iy)\psi(y)\,dy \to \langle f, \chi\hat{\psi} \rangle = \langle f\chi, \hat{\psi} \rangle = \langle f, \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{f}, \psi \rangle.$$

Таким образом, граничные значения функции $(2\pi)^{-1/2} F(x+iy)$ на мнимой оси, полученные при $x \downarrow 0$, являются распределением $\hat{f}$, которое представляет собой преобразование Фурье данного распределения f.

9.6. РАЗЛОЖЕНИЕ ЕДИНИЦЫ ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

В этом параграфе мы покажем, что из теоремы § 9.4 следует существование семейства операторов $E_t\,(-\infty < t < \infty)$, которое называется *разложением единицы* для оператора A, и используем операторы E_t для упрощения формул (9.4.2) и (9.4.3).

Чтобы подтвердить зависимость от элемента v из $\boldsymbol{H}$, перепишем формулу (9.4.3) следующим образом:

$$\sigma(t)=\sigma(t;\ v)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{t}\operatorname{Im}(v,\ R_{s+i\varepsilon}v)\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{t}[(v,\ R_{s+i\varepsilon}v)-(v,\ R_{s+i\varepsilon}v)]\,ds \qquad (9.6.1)$$

(здесь было использовано свойство $R_{s-i\varepsilon}=R^{*}_{s+i\varepsilon}$). Последний интеграл равен интегралу от $(v,\ R_\lambda v)$ по контуру на плоскости λ, состоящему из двух полупрямых C_1 и C_2, параллельных вещественной оси и проходящих на расстоянии ε выше и ниже ее, как показано на рис. 9.5. Заменим C_1 и C_2 эквивалентными контурами C_1' и C_2', изображенными на рис. 9.6, а затем устремим ε к нулю. В результате получим

$$\sigma(t;\ v)=(1/(2\pi i))\int_{C(t)}(v,\ R_\lambda v)\,d\lambda, \qquad (9.6.2)$$

где $C(t)$ — контур, проходящий от точки $-\infty+i\alpha$ по прямой в верхней полуплоскости, пересекающий вещественную ось при $\lambda=t$, а затем идущий к $-\infty-i\alpha$ по прямой в нижней полу-

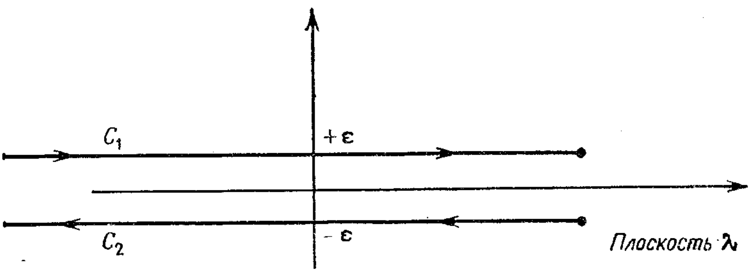

Рис. 9.5. Исходные контуры.

плоскости, и где интеграл понимается в смысле главного значения Коши, т. е. как предел при $\varepsilon\downarrow 0$. Из формул (9.4.2) и (9.4.3) легко видеть, что этот предел существует в любой точке непрерывности $\sigma(t)$. Точки разрыва $\sigma(t)$ (их множество не более чем счетно) требуют особой процедуры, при которой удовлетворяется условие нормализации (9.4.4): интеграл (9.6.2) вычисляется при $t' = t + \delta > t$, затем t' устремляется к t по точкам непрерывности σ. На эту процедуру будет указывать обозначение $C(t+)$ для контура интегрирования.

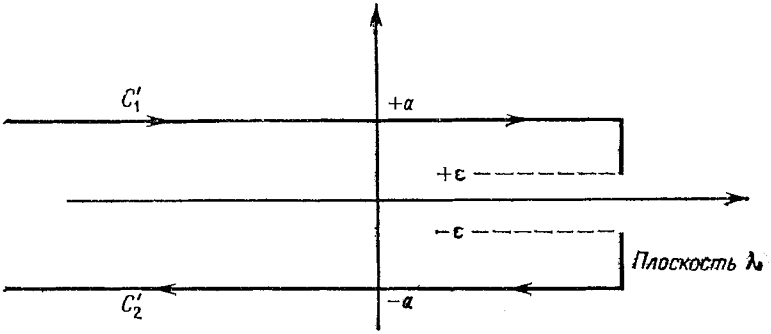

Рис. 9.6. Измененные контуры.

Функция $\sigma(t;\ u,\ v)$, зависящая от вещественной переменной t и для элементов u и v из H, определяется путем поляризации $\sigma(t;\ v)$:

$$\sigma(t;\ u,\ v) = (1/4) \sum_{k=0}^{3} i^{-k} \sigma(t;\ u + i^k v). \tag{9.6.3}$$

Поскольку поляризация $(v,\ R_\lambda v)$ дает $(u,\ R_\lambda v)$, мы имеем

$$\sigma(t;\ u,\ v) = (1/(2\pi i)) \int\limits_{C(t+)} (u,\ R_\lambda v)\, d\lambda. \tag{9.6.4}$$

При фиксированных t и v в правой части стоит полулинейный по u функционал, и поэтому он равен $(u,\ w)$ для некоторого однозначно определенного фиксированного $w \in H$, что следует из теоремы Рисса — Фреше о представлении; очевидно, что получающийся таким образом w линейно зависит от v, так что $w = E_t v$, где E_t — линейный оператор, определенный при любом вещественном t, т. е. $\sigma(t;\ u,\ v) = (u,\ E_t v)$; следовательно,

$$(u,\ E_t v) = (1/(2\pi i)) \int\limits_{C(t+)} (u,\ R_\lambda v)\, d\lambda. \tag{9.6.5}$$

Семейство операторов $\{E_t\}$ $(-\infty < t < \infty)$ называется *разложением единицы* для самосопряженного оператора A.

Замечание. В конечномерном случае, когда A — эрмитова матрица, а $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, выражение (9.6.5) дает $E_t = \sum P_j$, где суммирование осуществляется по тем значениям j, для которых $\lambda_j < t$, т. е. λ_j окружены контуром $C(t+)$. В этом случае E_t

является (матричнозначной) ступенчатой функцией, а выражение $A=\sum \lambda_j P_j$ можно записать как интеграл Стилтьеса $A=\int t\,dE_t$; это и есть в точности та формула, которая будет получена для произвольного самосопряженного оператора A в $\boldsymbol{H}$ (формула (9.8.2) ниже). Равенство (9.6.5) часто записывают просто как

$$E_t=(1/(2\pi i))\int\limits_{C(t+)} R_\lambda d\lambda, \tag{9.6.6}$$

что в конечномерном случае верно всегда, а в бесконечномерном случае тогда, когда интеграл берется с использованием подходящего типа сходимости операторов (см. § 9.9).

Из теоремы § 9.4 следует обращение этого соотношения, которое выглядит так:

$$(v,\ R_\lambda v)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-\lambda}\,d(v,\ E_t v)$$

при $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Поляризация этого равенства дает формулу

$$(u,\ R_\lambda v)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-\lambda}\,d(u,\ E_t v)\quad \forall u,\ v, \tag{9.6.7}$$

или

$$R_\lambda=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t-\lambda}\,dE_t, \tag{9.6.8}$$

где в определении интеграла снова используется подходящий вид сходимости операторов.

9.7. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ E_t

В приложении А, в конце данной главы, доказывается, что семейство операторов $\{E_t\}$ обладает следующими свойствами.

1. Для любого вещественного значения параметра t оператор E_t — ограниченный, самосопряженный и идемпотентный оператор и, следовательно, — ортогональный проектор.

2. Если $s<t$, то $E_tE_s=E_sE_t=E_s$. Отсюда следует, что если для каждого t $\boldsymbol{M}_t$ — область значений оператора E_t, то $\boldsymbol{M}_s\subset\boldsymbol{M}_t$, когда $s<t$; кроме того, отсюда следует, что $(E_t-E_s)^2=E_t-E_s$, так что E_t-E_s — ортогональный проектор; фактически E_t-E_s — ортогональный проектор на ортогональное дополнение $\boldsymbol{M}_s$ в $\boldsymbol{M}_t$, а именно на многообразие, обозначаемое через $\boldsymbol{M}_t\ominus\boldsymbol{M}_s$ и состоящее из всех тех v из $\boldsymbol{M}_t$, которые ортогональны всем u из $\boldsymbol{M}_s$. Проектор E_t-E_s соотносится с интервалом $\Delta=(s,\ t]$

вещественной оси и обозначается $E(\Delta)$; его область значений — многообразие $\boldsymbol{M}(\Delta)=\boldsymbol{M}_t \ominus \boldsymbol{M}_s$. Если Δ_1 и Δ_2 — непересекающиеся интервалы, то $E(\Delta_1)E(\Delta_2)=0$, поэтому $\boldsymbol{M}(\Delta_1) \perp \boldsymbol{M}(\Delta_2)$. Мы увидим далее, что проекторы $E(\Delta)$ в определенном смысле аналогичны проекторам P_j для конечномерного случая, а $\boldsymbol{M}(\Delta)$ аналогичны соответствующим собственным подпространствам $\boldsymbol{E}_j$, по крайней мере когда интервалы Δ достаточно малы.

3. $E_{-\infty}=0$, $E_{\infty}=I$ в том смысле, что для любого $v \in \boldsymbol{H}$ $E_t v \to 0$ при $t \to -\infty$ и $E_t v \to v$ при $t \to +\infty$. С увеличением t от $-\infty$ до $+\infty$ многообразие $\boldsymbol{M}_t$ постоянно расширяется от нулевого многообразия до (в конце концов) всего $\boldsymbol{H}$. Если

$$-\infty=t_0<t_1<\ldots<t_N=+\infty \tag{9.7.1}$$

— разбиение вещественной прямой на интервалы $\Delta_j=(t_{j-1}, t_j]$, то

$$I=E(\Delta_1)+E(\Delta_2)+\ldots+E(\Delta_N) \tag{9.7.2}$$

и

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{M}(\Delta_1)\oplus\ldots\oplus\boldsymbol{M}(\Delta_N). \tag{9.7.3}$$

Это очень напоминает разложение $\mathbb{C}^n$ на ортогональную прямую сумму собственных подпространств $\boldsymbol{E}_j$ эрмитовой матрицы, однако разложение (9.7.3) обычно можно бесконечно уточнять простым измельчением разбиения (9.7.1) прямой $\mathbb{R}$.

4. Проекторнозначная функция E_t непрерывна справа в том смысле, что для любого $v \in \boldsymbol{H}$ $E_{t+\varepsilon}v \to E_t v$ при $\varepsilon \downarrow 0$, т. е. многообразие $\boldsymbol{M}_{t+\varepsilon} \ominus \boldsymbol{M}_t$ стягивается к нулю. При данном t E_t не обязательно непрерывна слева. Если E_t разрывна слева при данном t, то $\boldsymbol{M}_t \ominus \boldsymbol{M}_{t-\varepsilon}$ при $\varepsilon \downarrow 0$ стягивается, как будет видно, к собственному (в строгом смысле) подпространству оператора A, соответствующему собственному значению t. В действительности непрерывность E_t справа несущественна, потому что все утверждения можно сформулировать без использования этого свойства. Например, только что упомянутое собственное подпространство можно описать как предел, к которому стягивается многообразие $\boldsymbol{M}_{t+\varepsilon} \ominus \boldsymbol{M}_{t-\varepsilon}$ при $\varepsilon \downarrow 0$.

9.8. КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Мы видели, что каждый самосопряженный оператор A при помощи своей резольвенты и формулы (9.6.5) или (9.6.6) порождает единственное разложение единицы, т. е. единственное семейство проекторов $\{E_t\}$, которое обладает свойствами 1—4 предыдущего параграфа. Обратно, $\{E_t\}$ посредством равенств (9.8.5)—(9.8.7), приведенных ниже, однозначно определяет оператор A, а это устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех самосопряженных операторов A и множеством всех разложений единицы $\{E_t\}$.

Идея, лежащая в основе формулы, выражающей A через $\{E_t\}$, связана с формулой $A=\sum \lambda_j P_j$ для эрмитовой матрицы (см. § 9.1). Если Δ_j ($j=1, \ldots, N$) — интервалы разбиения $\mathbb{R}$, как было определено в (9.7.1), то для каждого j проектор $E(\Delta_j)=E_{t_j}-E_{t_{j-1}}$ в какой-то мере аналогичен проектору P_j, а соответствующее собственное значение можно грубо приблизить некоторым числом λ_j из интервала Δ_j. Следовательно, можно предположить, что

$$A \approx \sum \lambda_j (E_{t_j}-E_{t_{j-1}}), \tag{9.8.1}$$

и, значит, можно ожидать, что в пределе при бесконечном измельчении разбиения $\mathbb{R}$ оператор A будет получаться как интеграл Стилтьеса,

$$A=\int_{-\infty}^{\infty} t\,dE_t, \tag{9.8.2}$$

хотя пока еще не ясен смысл сходимости интегральных сумм Римана—Стилтьеса (и, следовательно, не определено значение интеграла самого по себе), потому что справа в (9.8.1) стоит ограниченный оператор, определенный на всем $\boldsymbol{H}$, тогда как A в общем случае — неограниченный оператор, определенный только на некоторой области $\boldsymbol{D}(A) \neq \boldsymbol{H}$.

Если формула (9.8.2) верна хоть в каком-то смысле, то, по-видимому,

$$(u, Av)=\int_{-\infty}^{\infty} t\,d(u, E_t v) \tag{9.8.3}$$

для всех $u, v \in \boldsymbol{D}(A)$. Это уже обычный интеграл Стилтьеса, который, однако, может расходиться из-за бесконечности интервала изменения t. Однако для любого $n=1, 2, \ldots$ можно определить оператор A_n (ограниченный и определенный на всем $\boldsymbol{H}$) при помощи уравнения

$$(u, A_n v)=\int_{-n}^{n} t\,d(u, E_t v). \tag{9.8.4}$$

Для данного v последовательность $A_n v$ может иметь предел при $n \to \infty$, а может и не иметь его, и разумно предположить, что если такой предел существует, то $v \in \boldsymbol{D}(A)$ и $Av=\lim A_n v$. Это действительно так, согласно приложению Б к данной главе, посвященному доказательству приведенной ниже теоремы. Для того чтобы это было справедливо, необходимо (и, как оказывается, также достаточно), чтобы последовательность $\{\|A_n v\|\}$

имела предел, а это будет тогда и только тогда, когда $\int t^2 d(v, E_t v)$ сходится. Результатом подобных рассуждений, подробно изложенных в приложении, является следующая теорема.

Теорема. *Любое разложение единицы* $\{E_t\}$ *(т. е. любое семейство операторов, обладающее свойствами* 1—4 *из* § 9.7) *однозначно определяет самосопряженный оператор* A, *и обратно. Оператор* A *определяется по* $\{E_t\}$ *следующим образом:*

$$D(A)=\left\{v:\ \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(v,\ E_t v)<\infty\right\}; \tag{9.8.5}$$

тогда

$$\|Av\|^2=\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(v,\ E_t v) \tag{9.8.6}$$

и для таких v *и для всех* $u \in H$

$$(u,\ Av)=\int_{-\infty}^{\infty} t\,d(u,\ E_t v). \tag{9.8.7}$$

Такое построение часто символически обозначают формулой (9.8.2) *и называют* спектральным разложением *оператора* A.

Упражнение

1. Покажите, что если A ограничен, то E_t постоянна для $t<-\|A\|$ и $t \geqslant \|A\|$, точнее, что $E_t=0$ для $t<-\|A\|$ и $E_t=I$ для $t>\|A\|$. *Указание.* Если предположить противное, то можно найти вектор v, такой, что правая часть (9.8.6) больше $\|A\|^2\|v\|^2$.

9.9. ТИПЫ СХОДИМОСТИ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ. СВЯЗЬ МЕЖДУ СВОЙСТВАМИ НЕПРЕРЫВНОСТИ E_t И СПЕКТРОМ A

Пусть B, B_n ($n=1, 2, \ldots$)—ограниченные операторы. Если $(u,\ B_n v) \to (u,\ Bv)$ при $n \to \infty$ для всех u, $v \in H$, то говорят, что последовательность $\{B_n\}$ сходится *слабо* к B. Если $\|B_n v - Bv\| \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $v \in H$, то говорят, что $\{B_n\}$ *сильно* сходится к B. Наконец, если $\|B_n - B\| \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность называют сходящейся к B *равномерно* или *по норме*. Очевидно, что из сходимости по норме следует сильная сходимость (к тому же самому пределу), потому что $\|B_n v - Bv\| \leqslant \leqslant \|B_n - B\|\|v\|$, а из сильной сходимости следует слабая, поскольку

$$|(u,\ B_n v)-(u,\ Bv)| \leqslant \|u\|\|B_n v - Bv\|.$$

Таким образом, чтобы говорить о сильной (или слабой) сходимости B_n к оператору B, следует доказать, что векторы $B_n v$ сходятся сильно (слабо) к вектору Bv, как определено в § 1.9, при любом $v \in H$.

[Эти понятия используются в любом банаховом пространстве $\boldsymbol{H}$, только слабая сходимость здесь определяется так. Линейный функционал $l(v)$, определенный на всем $\boldsymbol{B}$, называется *ограниченным*, как и в § 1.8, если найдется такая константа K, что $|l(v)| \leqslant K\|v\|$ для всех $v \in \boldsymbol{B}$; тогда о *слабой* сходимости B_n к B говорят в том случае, когда $l(B_n v) \to l(Bv)$ для всех $v \in \boldsymbol{B}$ и любого ограниченного линейного функционала $l(\cdot)$. В случае гильбертова пространства это определение согласуется с данным выше, потому что, согласно теореме Рисса—Фреше о представлении (§ 1.8), ограниченный линейный функционал $l(v)$ всегда можно записать как (u, v). С понятиями сильной сходимости и сходимости по норме для операторов в банаховом пространстве мы еще встретимся в связи с изучением корректно поставленных задач с начальными данными в гл. 15 и 16.]

Примеры в $L^2(\mathbb{R})$

Пример 1

Пусть B_n—оператор сдвига:

$$(B_n f)(x) = f(x+2n);$$

тогда

$$(g, B_n f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} f(x+2n)\, dx.$$

Этот интеграл разбивается на две части, $\int_{-\infty}^{-n}$ и $\int_{-n}^{\infty}$, и во втором интеграле вводится новая переменная $y = x+2n$:

$$(g, B_n f) = \int_{-\infty}^{-n} \overline{g(x)} f(x+2n)\, dx + \int_{n}^{\infty} \overline{g(y-2n)} f(y)\, dy = I_1 + I_2.$$

В силу неравенства Шварца

$$|I_1|^2 \leqslant \|f\|^2 \int_{-\infty}^{-n} |g(x)|^2\, dx,$$

$$|I_2|^2 \leqslant \|g\|^2 \int_{n}^{\infty} |f(y)|^2\, dy;$$

интегралы в этих неравенствах стремятся к нулю при $n \to \infty$, потому что $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ квадратично интегрируемы. Поэтому B_n слабо сходятся к нулевому оператору; однако B_n не сходятся сильно ни к какому оператору, потому что если бы они сходились, то пределом был бы нуль, в то время как для любого f $\|B_n f\| = \|f\|$ не стремится к нулю.

Пример 2

Пусть B_n—операторы усечения:

$$(B_n f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } |x| < n, \\ 0 & \text{при } |x| > n. \end{cases}$$

(Отметим, что B_n — проектор, потому что $B_n^2 = B_n$.) Очевидно, что $\| B_n f - f \| \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow \infty$; следовательно, B_n сходится сильно к единичному оператору I. Однако B_n не сходится по норме к I, потому, что $\| B_n - I \| = 1$ для любого n; это можно установить, применив $B_n - I$ к функции, носитель которой находится вне интервала $(-n, n)$.

Пример 3

Пусть B и B_n — интегральные операторы Гильберта — Шмидта

$$(B_n f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_n(x, y) f(y)\, dy,$$

$$(Bf)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y) f(y)\, dy,$$

ядра которых таковы, что

$$M_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} | K_n(x, y) - K(x, y) |^2\, dx\, dy \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \longrightarrow \infty$$

(т. е. $K_n \longrightarrow K$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$). Применив неравенство Шварца, получим, что

$$\| (B_n - B) f \|^2 \leqslant M_n \| f \|^2 \quad \forall f,$$

так что $\| B_n - B \| \leqslant M_n$; поэтому B_n сходится по норме к B.

Каждому типу сходимости соответствует свой тип непрерывности. Говорят, что однопараметрическое семейство ограниченных операторов $B(t)$ *слабо* или *сильно непрерывно*, или *непрерывно по норме* в точке t, если $B(t+\delta)$ сходится слабо, сильно или по норме к $B(t)$, когда $\delta \longrightarrow 0$. Односторонняя непрерывность (слева или справа) каждого типа определяется аналогично.

Если $B(t)$ — разложение единицы E_t, заданное формулой (9.6.5) или (9.6.6), то $B(t)$ автоматически слабо непрерывно справа. Более того, для разложения единицы слабая непрерывность (справа, слева, двусторонняя) автоматически означает сильную непрерывность (того же вида), потому что если

$$(u, (E_{t+\delta} - E_t) v) \longrightarrow 0 \quad \text{при } \delta \longrightarrow 0$$

для любых u и v, то это верно и для $u = v$. Так как $E_{t+\delta} - E_t$ — проектор, выписанная выше величина равна

$$(v, (E_{t+\delta} - E_t)^2 v),$$

а поскольку проектор самосопряжен, эта величина равна также и

$$((E_{t+\delta} - E_t) v, (E_{t+\delta} - E_t) v) = \| (E_{t+\delta} - E_t) v \|^2.$$

Поэтому в данном частном случае слабая непрерывность эквивалентна сильной. В силу этого для любого вещественного t_0 нужно рассмотреть следующие возможности:

(а) E_t разрывна (имеется в виду слева) в точке t_0,
(б) E_t сильно непрерывна (но не по норме) в t_0,
(в) E_t непрерывна по норме в t_0.

Мы покажем, что в случае (а) точка t_0 принадлежит точечному спектру A, в случае (б) — непрерывному спектру, а в случае (в) — резольвентному множеству. [Можно также рассмотреть и другие случаи, например непрерывность по норме с одной стороны t_0 и просто сильную непрерывность — с другой, однако значение такого поведения E_t для характеристики спектра выяснится только после того, как будут проанализированы перечисленные выше случаи.]

Непрерывность E_t справа (одновременно слабая и сильная, но, вообще говоря, не по норме) была получена в § 9.6 при определении E_t формулой

$$(u, E_t v) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \downarrow 0} \int\limits_{C(t+\delta)} (u, R_\lambda v)\, d\lambda,$$

где $C(s)$ — контур, который идет от $-\infty$ выше вещественной оси на плоскости λ, пересекает эту ось в точке s, а затем возвращается к $-\infty$ ниже вещественной оси. Очевидно, что подобным же образом можно определить оператор (который мы обозначим через E_{t-}) и в случае, когда δ приближается к нулю снизу, а не сверху. Тогда E_{t-} будет семейством проекторов, обладающим всеми свойствами E_t, за исключением того, что оно непрерывно слева, а не справа. При помощи методов § 9.6 нетрудно убедиться в том, что оператор

$$P_t \stackrel{\text{def}}{=\!=} E_t - E_{t-} \tag{9.9.1}$$

является проектором; в точке непрерывности E_t оператор P_t равен нулевому проектору (нулевому оператору, который отображает все $\boldsymbol{H}$ в нулевой элемент), однако в точке разрыва E_t оператор P_t не равен нулю. Многообразие, на которое проектирует P_t, т. е. его область значений $\boldsymbol{R}(P_t)$, состоит из тех векторов из области значений E_t, которые ортогональны области значений E_s для любого $s < t$. Это выражается уравнениями

$$P_t E_s = E_s P_t = \begin{cases} P_t & \text{при} \quad s \geqslant t, \\ 0 & \text{при} \quad s < t, \end{cases} \tag{9.9.2}$$

которые легко получить при помощи методов приложения А.

Предположим теперь, что для данного вещественного числа t_0 имеет место случай (а), так что $P_{t_0} \neq 0$. Для $v\,(\neq 0)$ из $\boldsymbol{R}(P_{t_0})$ мы имеем

$$(u, Av) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t\, d(u, E_t v) \quad \forall u. \tag{9.9.3}$$

Так как $v=P_t v$, функция $(u, E_t v)$, согласно (9.9.2), постоянна всюду, кроме скачка величины (u, v) при $t=t_0$. Поэтому

$$(u, Av)=t_0(u, v) \quad \text{для всех } u\in \boldsymbol{H},$$

т. е. $Av=t_0 v$; следовательно, t_0 принадлежит точечному спектру A, а v — собственный вектор; подпространство

$$\boldsymbol{E}_{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{R}(P_{t_0}) \tag{9.9.4}$$

является собственным подпространством, соответствующим собственному значению t_0; см. пояснение ниже.

Следующим рассмотрим случай (б). В § 9.8 мы выяснили, что если v принадлежит области определения самосопряженного оператора A, то

$$\|Av\|^2=(Av, Av)=\int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(v, E_t v). \tag{9.9.5}$$

Предположим теперь, что E_t сильно (но не по норме) непрерывно при $t=t_0$. Тогда для любого $\delta>0$ найдется ненулевой элемент $v=v_\delta$ из области значений $E_{t_0+\delta}-E_{t_0-\delta}$; для такого v функция $(v, E_t v)$ постоянна при $|t-t_0|>\delta$; поэтому

$$(Av-t_0 v, Av-t_0 v)=\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} (t-t_0)^2 d(v, E_t v). \tag{9.9.6}$$

[Здесь наряду с формулой (9.9.5) следует использовать формулы $\int t d(v, E_t v)=(v, Av)$ и $\int d(v, E_t v)=(v, v)$.] На интервале $(t_0-\delta, t_0+\delta)$ функция $(v, E_t v)$ возрастает от нуля до $\|v\|^2$, поэтому

$$\|Av-t_0 v\|^2 \leqslant \delta^2 \|v\|^2.$$

Отсюда следует, что вектор v_δ является приближенным собственным вектором в смысле § 8.1, и, значит, t_0 принадлежит непрерывному спектру.

Чтобы исследовать случай (в), возьмем точку t_0 непрерывности по норме функции E_t. Тогда $\|E_t-E_{t_0}\|\to 0$ при $t\to t_0$. Однако $\|E_t-E_{t_0}\|$ всегда равна либо 1, либо 0, так как $E_t-E_{t_0}$ — либо ортогональный проектор, либо нулевой оператор, если $t\geqslant t_0$; это же верно и для $E_{t_0}-E_t$ при $t\leqslant t_0$ (см. упражнение 2 в § 9.2). Поэтому найдется такое $\varepsilon>0$, что $E_t=E_{t_0}$ на интервале $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$. На этом интервале функция $(u, E_t v)$ постоянна для любых u и v из $\boldsymbol{H}$. Вместо (9.9.6) мы получаем

$$(Av-t_0v,\ Av-t_0v)=\left(\int_{-\infty}^{t_0-\varepsilon}+\int_{t_0+\varepsilon}^{\infty}\right)(t-t_0)^2\,d(v,\ E_tv),$$

и поэтому

$$\|Av-t_0v\|^2\geqslant\varepsilon^2\left(\int_{-\infty}^{t_0-\varepsilon}+\int_{t_0+\varepsilon}^{\infty}\right)d(v,\ E_tv)=$$

$$=\varepsilon^2\int_{-\infty}^{\infty}d(v,\ E_tv)=\varepsilon^2\|v\|^2$$

для любого $v\in\boldsymbol{H}$. Отсюда следует, что $(A-t_0I)^{-1}$ ограничен, более того, $\|(A-t_0I)^{-1}\|\leqslant 1/\varepsilon$; следовательно, t_0 находится в резольвентном множестве оператора A.

Пояснение. Выше было установлено, что любой вектор v из $\boldsymbol{R}(P_{t_0})$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению t_0. Заметим теперь, что таким образом получаются все собственные векторы. Возьмем произвольный ненулевой вектор v, такой, что $Av=t_0v$ для некоторого t_0; тогда

$$0=\|Av-t_0v\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}(t-t_0)^2\,d(v,\ E_tv).$$

Здесь $(v,\ E_tv)$ — неубывающая функция, а функция $(t-t_0)^2$ положительна всюду, кроме точки $t=t_0$. Из того, что интеграл равен нулю, следует, что $(v,\ E_tv)$ постоянна и лишь при $t=t_0$ имеет скачок. Поскольку $E_t\to 0$ и I при $t\to-\infty$ и $+\infty$ соответственно, величина этого скачка равна $(v,\ v)$, но, кроме того, равна и $(v,\ P_{t_0}v)$ по определению P_{t_0}. Следовательно, $(v,\ (I-P_{t_0})v)=0$, но $I-P_{t_0}$ — проектор, значит, он самосопряжен и $I-P_{t_0}=(I-P_{t_0})^2$, так что

$$(v-P_{t_0}v,\ v-P_{t_0}v)=0$$

и, значит, $v=P_{t_0}v$; поэтому $v\in\boldsymbol{R}(P_{t_0})$, что и утверждалось.

Резюме. Разрыв E_t при $t=t_0$ означает, что $t_0\in P\sigma(A)$. Сильная непрерывность (но без непрерывности по норме) означает, что $t_0\in C\sigma(A)$. Из непрерывности по норме следует, что $t_0\in\rho(A)$.

Упражнения

1. Пусть A_n $(n=1,2,\ldots)$ — операторы, введенные в § 9.8 как аппроксимации самосопряженного оператора A. Покажите, что если $v\in\boldsymbol{D}(A)$, то $A_nv\to Av$ сильно. *Указание.* Используйте упражнение 5 из § 1.9. Докажите,

что если A ограничен, то $A_n \to A$ сильно. Из упражнения § 9.8, конечно, следует, что если A ограничен, то $A_n = A$ при достаточно большом n, так что $A_n \to A$ также и по норме. Если A неограничен, то A_n не сходится к A ни в каком смысле (имея в виду три типа сходимости, введенные в данном параграфе)[1].

2. Если A ограничен, то в каком смысле сходится к A сумма Римана—Стилтьеса (9.8.1)? *Указание.* Эту сумму можно записать как $\int f(t)\, dE_t$, где $f(t)$ — ступенчатая функция.

3. Если A неограничен, то в каком смысле $E_n - E_{-n}$ сходятся к I при $n \to \infty$?

4. При помощи неравенства (8.5.7) и резольвентного уравнения (8.5.1) покажите, что R_λ дифференцируема по λ как функция комплексной переменной в любой точке λ резольвентного множества, причем разностное отношение $(R_{\lambda+\alpha} - R_\lambda)/\alpha$ стремится к производной по норме, а эта производная равна R_λ^2 в соответствии с формальными правилами дифференцирования $R_\lambda = (A-\lambda)^{-1}$. Поэтому говорят, что R_λ является аналитической или голоморфной операторнозначной функцией комплексной переменной λ на резольвентном множестве $\rho(A)$.

5. Предположим, что $F(\lambda)$ — ограниченный оператор при любом λ из некоторой области Ω и что функция $F(\lambda)$ дифференцируема по λ в области Ω в смысле упражнения 4. Покажите, что для $F(\lambda)$ справедливы теорема Коши и интегральная формула Коши, как только решено, в каком смысле рассматривается интеграл $\oint F(\lambda)\, d\lambda$.

6. Если R_λ — резольвента самосопряженного оператора A и λ_0 — изолированное собственное значение A, то какого рода особенность имеет R_λ при $\lambda = \lambda_0$ и чему равен вычет в этой точке?

9.10. УНИТАРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ФУНКЦИИ ОТ ОПЕРАТОРОВ. ОГРАНИЧЕННЫЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ. ПОЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Преобразование Кэли $U = (A-i)(A+i)^{-1}$ самосопряженного оператора A было введено в § 8.6 в связи с расширениями симметрического оператора. Пусть $\{E_t\}$ — разложение единицы, соответствующее A. Тогда утверждается, что

$$U = \int_{-\infty}^{\infty} [(t-i)/(t+i)]\, dE_t. \tag{9.10.1}$$

Эту формулу можно интерпретировать либо в смысле сильной сходимости (фактически сходимости по норме) соответствующих сумм Римана—Стилтьеса (см. упражнение 1 ниже), либо как сокращенную запись формулы

$$(u, Uv) = \int_{-\infty}^{\infty} [(t-i)/(t+i)]\, d(u, E_t v). \tag{9.10.2}$$

[1]) Напоминаем, что в определении слабой и сильной сходимости операторов требовалась сходимость для всех $v \in H$ (а не только для $v \in D(A)$). — *Прим. перев.*

Чтобы получить эту формулу, прежде всего заметим, что для любых w и v из $\boldsymbol{D}(A)$

$$((A+i)w, v)=(w, (A-i)v)=\int_{-\infty}^{\infty}(t-i)\,d(w, E_t v).$$

Пусть теперь u — произвольный вектор из $\boldsymbol{H}$; положим

$$w=\int_{-\infty}^{\infty}[1/(s+i)]\,dE_s u;$$

тогда

$$((A+i)w, v)=\int_{-\infty}^{\infty}(t-i)\,d_t\int_{-\infty}^{\infty}[1/(s-i)]\,d_s(E_s u, E_t v).$$

При помощи соотношения (9.Б.5) из приложения к данной главе такие двойные интегралы можно свести к однократным; в результате мы получим

$$((A+i)w, v)=\int_{-\infty}^{\infty}[(t-i)/(t-i)]\,d(u, E_t v)=(u, v).$$

Поэтому $(A+i)w=u$, или $w=(A+i)^{-1}u$, т. е.

$$(A+i)^{-1}u=\int_{-\infty}^{\infty}[1/(s+i)]\,dE_s u. \qquad (9.10.3)$$

После этого повторное использование (9.Б.5) приводит нас к формуле (9.10.2).

Формулы (9.10.2) и (9.10.3) дают основание для следующего определения: если $f(t)$ — любая непрерывная или кусочно непрерывная функция, то оператор $f(A)$ определяется как

$$f(A)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,dE_t. \qquad (9.10\ 4)$$

Эта формула интерпретируется аналогично равенству $A=\int_{-\infty}^{\infty}t\,dE_t$, а именно

$$\boldsymbol{D}(f(A))=\left\{v:\left(v, \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dE_t v\right)<\infty\right\},$$

$$(u, f(A)v)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,d(u, E_t v). \qquad (9.10.5)$$

Если $f(t)$ — ограниченная на всей вещественной оси функция, как в (9.10.2) и (9.10.3), то $f(A)$ — ограниченный оператор; если $f(t)$ — вещественнозначная функция, то оператор $f(A)$ самосопряжен; если $|f(t)|=1$, то $f(A)$ унитарен.

Например, из A можно получить другой унитарный оператор, взяв $f(t)=e^{i\alpha t}$ с вещественным α. [Унитарный оператор, полученный при помощи преобразования Кэли, имеет то преимущество, что может быть определен без использования спектрального разложения A и что уравнение $U=(A-i)(A+i)^{-1}$ можно разрешить относительно A.]

В качестве другого примера возьмем $f(t)=\operatorname{th} t$. Тогда $f(A)$ ограничен и самосопряжен. Если A рассматривается как наблюдаемая в квантовой механике, то $f(A)$—эквивалентная ограниченная наблюдаемая. Аппаратура для измерения $f(A)$ та же, что и для измерения A, только дополняется простым компьютером для вычисления $\operatorname{th} t$ от измеренных значений A. Наблюдаемая $f(A)$ дает ту же информацию, что и A, потому что t всегда можно получить из $f(t)$. Такое представление о наблюдаемых окажется полезным в гл. 14.

Если отображение $t \to f(t)$ взаимно однозначно на вещественной оси t, как и во всех приведенных выше примерах, исключая $f(t)=e^{i\alpha t}$, то (9.10.4) можно переписать следующим образом. Пусть $\mathscr{C}$—кривая на комплексной плоскости, заданная уравнением $z=f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, а g—функция, обратная f, т. е. $t=g(z)$. Тогда на $\mathscr{C}$ определяется семейство ортогональных проекторов как $F_z=E_{g(z)}$, где $\{E_t\}$—разложение единицы для оператора A. При этом (9.10.4) переходит в формулу

$$f(A)=\int_{\mathscr{C}} z\,dF_z. \qquad (9.10.6)$$

В частности, взяв функцию $f(t)=(t-i)/(t+i)$, получим, что любой унитарный оператор, для которого единица не является собственным значением, характеризуется разложением единицы $\{F_z\}$, определенным на единичной окружности $\mathscr{C}$: $|z|=1$. В этом случае F_z обычно записывается как F_θ, где $z=e^{i\theta}$ (следовательно, $t=-\operatorname{ctg}(\theta/2)$); поэтому каноническое представление унитарного оператора имеет вид

$$U=\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\,dF_\theta, \qquad (9.10.7)$$

где семейство $\{F_\theta\}$ обладает свойствами 1—4 § 9.7 с заменой интервала $(-\infty, \infty)$ на интервал $(0, 2\pi)$.

Упражнение

1. Покажите, что если $f(t)$ ограничена, то суммы Римана—Стилтьеса, соответствующие интегралу (9.10.4), сильно сходятся к $f(A)$. При каких обстоятельствах они сходятся к $f(A)$ по норме?

Дробные степени неотрицательного самосопряженного оператора можно определить после следующего краткого предварительного рассмотрения.

Теорема. *Если A — самосопряженный оператор, E_t — соответствующее разложение единицы, а v — единичный вектор* ($\|v\|=1$) *из области значений проектора $E_b - E_a$, где $a<b$, то*

$$a \leqslant (v,\ Av) \leqslant b. \tag{9.10.8}$$

Доказательство. Неубывающая функция $(v,\ E_t v)$ равна нулю при $t<a$ и равна единице при $t>b$. Поэтому

$$b-(v,\ Av)=\int\limits_{a-0}^{b+0}(b-t)\,d\,(v,\ E_t v)\geqslant 0;$$

второе неравенство доказывается аналогично.

Эта теорема показывает, что спектр A лежит в замыкании числовой области значений, так как если t_0 — такая точка, что E_t не постоянна на любом интервале $(t_0-\varepsilon,\ t_0+\varepsilon)$, то t_0 с точностью до любого $\varepsilon>0$ можно аппроксимировать величиной $(v,\ Av)$, где v — единичный вектор.

Теорема показывает также, что если A неотрицателен, то $E_t=0$ при $t<0$, иначе можно найти такой вектор v, что $(v,\ Av)<0$. Поэтому если $A\geqslant 0$, то функция $f(A)=A^{1/2}$ и вообще A^{α} $(\alpha>0)$ может быть определена как

$$A^{\alpha}=\int\limits_{0}^{\infty}t^{\alpha}dE_t, \tag{9.10.9}$$

где подразумевается положительный корень t^{α}. В частности, если T — произвольный замкнутый оператор с плотной в $\boldsymbol{H}$ областью определения, так что T^*T определен и самосопряжен по теореме фон Неймана, упомянутой в § 7.9, то $(T^*T)^{1/2}$ является самосопряженным (и неотрицательным) оператором, который часто можно рассматривать как своего рода абсолютное значение T. Однако он отличается от $(TT^*)^{1/2}$, если T не является нормальным оператором.

Теперь рассмотрим так называемое полярное разложение общего оператора (сначала для случая ограниченного оператора A, определенного на всем $\boldsymbol{H}$). Пусть $R=(A^*A)^{1/2}$; R неотрицателен. Обозначим через $\hat{R}$ ограничение R на $\boldsymbol{R}(R)=\boldsymbol{N}(R)^{\perp}\overset{\text{def}}{=}\boldsymbol{D}(\hat{R})$, где $\boldsymbol{N}$ — нуль-пространство. (Этот этап построений необязателен для случая положительного, а не просто неотрицательного R.) Поскольку любой элемент $w\in\boldsymbol{H}$ можно записать как $w=u+v$, где $u\in\boldsymbol{D}(\hat{R})$, а $v\in\boldsymbol{N}(R)$ и, значит, $Rw=\hat{R}u=Ru$, то очевидно, что R и $\hat{R}$ имеют одну и ту же область значений, а именно $\boldsymbol{D}(\hat{R})$. Поэтому $\hat{R}$ отображает $\boldsymbol{D}(\hat{R})$ взаимно однозначно на себя. Положим

$$\hat{V}=A\hat{R}^{-1},\quad \boldsymbol{D}(\hat{V})=\boldsymbol{R}(\hat{R})=\boldsymbol{D}(\hat{R}).$$

Тогда для любого v из $\boldsymbol{H}$

$$\hat{V}Rv = A\hat{R}^{-1}Rv = Av.$$

Замечание. $\boldsymbol{N}(R) = \boldsymbol{N}(A)$. Теперь $\hat{V}$ — изометрическое отображение своей области определения на свою область значений (совпадающей с областью значений оператора A), потому что если v — любой вектор из $\boldsymbol{R}(\hat{R})$ и $w = \hat{R}^{-1}v$, то

$$\|v\|^2 = \|Rw\|^2 = (Rw, Rw) = (w, R^2w) = (w, A^*Aw) =$$
$$= (Aw, Aw) = \|Aw\|^2 = \|A\hat{R}^{-1}v\| = \|\hat{V}v\|^2$$

и, следовательно, $\hat{V}$ изометрично. Определим теперь оператор V как расширение $\hat{V}$ на $\boldsymbol{H}$, получаемое так: $Vw = 0$ для $w \perp \boldsymbol{R}(R)$. Такой оператор V называется *частично изометрическим*. Очевидно, что $\|V\| = 1$, исключая случай нулевого оператора A.

Вывод. Любой ограниченный оператор A можно записать как $A = VR$, где $R \geqslant 0$, а V — частично изометрический оператор. Это разложение единственно, если потребовать, что $Vw = 0$ для $w \perp \boldsymbol{R}(R)$. Если $Av \neq 0$ для $v \neq 0$, то оператор $R > 0$, а оператор V унитарен. Этот вывод справедлив и для неограниченного, но замкнутого оператора A с плотной в $\boldsymbol{H}$ областью определения; см. Като [1966], а также § 7.9. Разложение VR называется *полярным разложением* A. Если V — унитарный оператор, то его всегда можно представить как $\exp(i\Theta)$, где Θ — самосопряженный оператор. Поскольку самосопряженные операторы соответствуют вещественным числам, выражение $A = VR$ напоминает выражение $z = e^{i\theta}r$ для произвольного комплексного числа z.

Упражнения

2. Покажите, что если V частично изометричен, то V^* также частично изометричен.

3. Докажите, что любой ограниченный оператор A можно записать также как R_1V_1, где $R_1 = (AA^*)^{1/2}$, а V_1 — частично изометрический оператор.

Приложение А к главе 9. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ E_t

Прежде всего докажем, что для каждого t оператор E_t является ограниченным. По теореме из § 9.4 $0 \leqslant \sigma(t) \leqslant C\|v\|^2$ для всех t, где C — постоянная, т. е.

$$\sigma(t) = \sigma(t;\, v) = (v,\, E_tv) \leqslant C\|v\|^2.$$

При помощи поляризации получаем (см. также (1.11.3)), что

$$|(u,\, E_tv)| \leqslant 4C\|u\|\|v\|,$$

а после подстановки $u = E_tv$ и сокращения одного множителя получаем

$$\|E_tv\| \leqslant 4C\|v\|,$$

т. е. E_t — ограниченный оператор (что следует также из теоремы о замкнутом графике, поскольку E_tv определено для всех v из $\boldsymbol{H}$); ниже будет доказано, что константу $4C$ можно заменить единицей.

Так как $\sigma(-\infty)=0$, ясно, что $E_{-\infty}$ — нулевой оператор; сейчас мы покажем, что $E_{+\infty}$ — единичный оператор I. Для этого возьмем в (9.6.7) $u=(A-\bar{\lambda}I)w$, где w — произвольный элемент $D(A)$; тогда

$$(Aw-\bar{\lambda}w,\ R_\lambda v)=(w,\ (A-\lambda I)\ R_\lambda v)=(w,\ v)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}[1/(t-\lambda)]\,d\,(Aw-\bar{\lambda}w,\ E_t v)=\int_{-\infty}^{\infty}[1/(t-\lambda)]\,d\,(Aw,\ E_t v)+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}[-\lambda/(t-\lambda)]\,d\,(w,\ E_t v).$$

Далее, $(Aw,\ E_t v)$ и $(w,\ E_t v)$ были получены поляризацией функции $\sigma(t;\ v)$, которая (как функция от t) имеет конечную полную вариацию; следовательно, и они имеют конечную полную вариацию. Поэтому при $\lambda\to i\infty$ первый интеграл стремится к нулю, а второй — к $\int_{-\infty}^{\infty}d\,(w,\ E_t v)=(w,\ E_\infty v)$; значит, $(w,\ v)=(w,\ E_\infty v)$ для всех $w\in D(A)$; но $D(A)$ плотна в H, поэтому $v=E_\infty v$, иначе говоря, $E_\infty=I$, что и следовало доказать.

Для любого t оператор E_t самосопряжен, потому что $\sigma(t;\ v)$ вещественна, и поэтому функция $\sigma(t;\ u,\ v)$, полученная поляризацией, удовлетворяет уравнению $\sigma(t;\ v,\ u)=\overline{\sigma(t;\ u,\ v)}$, т. е.

$$(v,\ E_t u)=\overline{(u,\ E_t v)}=(E_t v,\ u),$$

а поскольку E_t ограничен и определен на всем H, отсюда получается $E_t^*=E_t$.

Покажем теперь, что для любых вещественных чисел s и t

$$E_t E_s=E_s E_t=E_{\min(s,\ t)}. \tag{9.A.1}$$

Сначала предположим, что $s\neq t$, для определенности $s<t$; тогда

$$(u,\ E_t E_s v)=(E_t u,\ E_s v)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(s+)}d\lambda\,(E_t u,\ R_\lambda v)==\frac{1}{2\pi i}\int_{C(s+)}d\lambda(u,\ E_t R_\lambda v)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C(s+)}d\lambda\int_{C(t+)}d\mu\,(u,\ R_\mu R_\lambda v)=$$
$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C(s+)}d\lambda\int_{C(t+)}d\mu\left(u,\ \frac{R_\mu-R_\lambda}{\mu-\lambda}\,v\right) \tag{9.A.2}$$

(в конце было использовано резольвентное уравнение).

Предположим теперь, что контур $C(s)$ лежит внутри контура $C(t)$, как на рис. 9.7. [Сравните с выкладками, связанными с уравнением (9.3.8) в конечномерном случае.] Последний интеграл записывается как разность двух интегралов, один — содержащий R_μ, другой — содержащий R_λ. Интегрирование сначала по λ в первом из них показывает, что

$$\int_{C(s+)}[1/(\mu-\lambda)]\,d\lambda=0,$$

поскольку μ лежит вне контура $C(s)$. Интегрирование сначала по μ дает для второго интеграла

$$\int_{C(t+)}[1/(\mu-\lambda)]\,d\mu=-2\pi i,$$

потому что λ лежит внутри контура $C(t)$ (заметим, что $C(t)$ обходится по часовой стрелке). В результате получаем

$$(u, E_t E_s v) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C(s+)} d\lambda\, (u, R_\lambda v) = (u, E_s v),$$

т. е. $E_t E_s = E_s$. Очевидно, что из (9.А.2) следует, что E_s и E_t коммутативны. До сих пор у нас было $s \neq t$. По построению $(u, E_t w)$ непрерывна по t справа для любых u и w, в частности для $w = E_s v$; поэтому если t стремится к s

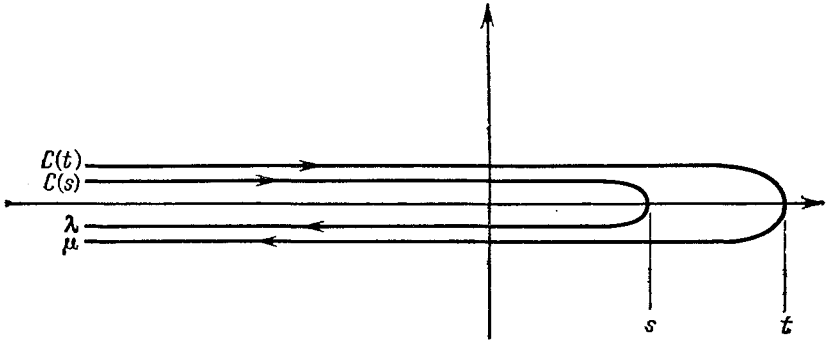

Рис. 9.7. Контуры $C(s)$ и $C(t)$.

справа, то равенство $(u, E_t E_s w) = (u, E_s w)$ показывает, что $E_s^2 = E_s$, что и утверждалось. Следовательно, E_s — проектор. Для $s < t$ $E_t - E_s$ также является проектором, потому что

$$(E_t - E_s)^2 = E_t^2 - 2E_s E_t + E_s^2 = E_t - 2E_s + E_s = E_t - E_s.$$

Резюме. $\{E_t\}$ — однопараметрическое семейство самосопряженных проекторов, таких, что

$$E_t E_s = E_s E_t = E_{\min(s,\, t)}, \tag{9.А.3}$$

и для любых u, v из H

$$\lim_{t \to -\infty} (u, E_t v) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} (u, E_t v) = (u, v), \tag{9.А.4}$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (u, E_{t+\varepsilon} v) = (u, E_t v). \tag{9.А.5}$$

Равенство (9.А.4) можно переписать как $E_{-\infty} = 0$, $E_{+\infty} = I$. Равенство (9.А.5) описывает непрерывность E_t справа; более подробно свойства непрерывности E_t обсуждались в § 9.9.

Приложение Б к главе 9. КАНОНИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

Здесь будет показано, что любое семейство $\{E_t\}$ самосопряженных проекторов, обладающих свойствами 1—4 из § 9.7, определяет самосопряженный оператор $\hat{A}$; если же $\{E_t\}$ получено по оператору A с помощью формулы (9.6.5), где $R_\lambda = R_\lambda(A) = (A - \lambda)^{-1}$, то $\hat{A} = A$, так что имеется взаимно однозначное соответствие между классом всех таких семейств и множеством самосопряженных операторов.

Определим сначала операторы A_n $(n=1, 2, \ldots)$ по формуле

$$(u, A_n v)=\int_{-n}^{n} t\,d(u, E_t v). \tag{9.Б.1}$$

Ясно, что каждый A_n линеен, ограничен, самосопряжен, так что остался только вопрос о сходимости $A_n v$ для заданного $v \in \boldsymbol{H}$ при $n \to \infty$. Для сходимости $A_n v$ необходимо (и, как будет показано, достаточно), чтобы нормы $\| A_n v \|$ были ограничены при $n \to \infty$. Уравнение, комплексно сопряженное уравнению (9.Б.1), выглядит так:

$$(A_n v, u)=\int_{-n}^{n} t\,d(E_t v, u).$$

Подставим в это уравнение $u=A_n v$ и снова используем (9.Б.1) с заменой t на s; тогда

$$\| A_n v \|^2=\int_{-n}^{n} t\,d_t \int_{-n}^{n} s\,d_s (E_t v, E_s v). \tag{9.Б.2}$$

В силу (9.А.1) функция $(E_t v, E_s v)=(E_s E_t v, v)$ не зависит от s при $s \geqslant t$; поэтому

$$\int_{-n}^{n} s\,d_s (E_t v, E_s v)=\int_{-n}^{t} s\,d(E_s v, v) \tag{9.Б.3}$$

и при применении d_t к этой функции получается просто $t\,d(E_t v, v)$. Но тогда двойной интеграл сводится к однократному и

$$\| A_n v \|^2=\int_{-n}^{n} t^2 d(v, E_t v). \tag{9.Б.4}$$

[Поскольку данный интеграл меньше $n^2 \| v \|^2$, мы имеем $\| A_n \| \leqslant n$, но этот результат использоваться не будет.] Связь между двойным и однократным интегралами обобщается; это обобщение приводится здесь для последующих ссылок:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,d_t \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,d_s (E_t u, E_s v)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(t)\,d(u, E_t v), \tag{9.Б.5}$$

если только функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ таковы, что интегралы сходятся.

Определим теперь оператор $\hat{A}$, положив

$$\boldsymbol{D}(\hat{A})=\left\{ v \in \boldsymbol{H}\colon \int_{-\infty}^{\infty} t^2 d(v, E_t v) < \infty \right\}, \tag{9.Б.6}$$

$$\hat{A} v=\lim_{n \to \infty} A_n v \quad \forall v \in \boldsymbol{D}(\hat{A}).$$

Рассуждения, приведенные выше, показывают, что выражение, подобное (9.Б.4), имеет место и для $\| A_n v - A_m v \|^2$, только интегрирование проводится лишь для таких t, для которых $n < |t| < m$. Следовательно, $\{A_n v\}$ — последовательность Коши в $\boldsymbol{H}$, если интеграл в (9.Б.6) конечен. Покажем дополнительно, что (1) $\hat{A}$ определен на плотном множестве (и, следовательно, имеет сопряженный), (2) $\hat{A}$ самосопряжен и (3) $R_\lambda (\hat{A}-\lambda) w=w$ для всех $w \in \boldsymbol{D}(\hat{A})$. Последнее означает, что R_λ является резольвентой и для $\hat{A}$, так что $(\hat{A}-\lambda)^{-1}=(A-\lambda)^{-1}$, т. е. $\hat{A}=A$.

Чтобы показать, что $\boldsymbol{D}(\hat{A})$ плотна в $\boldsymbol{H}$, возьмем произвольный элемент $v\in \boldsymbol{H}$. Тогда последовательность $\{v_k\}$, где $v_k=(E_k-E_{-k})\,v$, сходится к v при $k\to\infty$, в то время как $A_n v_k=A_k v_k$ для всех $n\geqslant k$, так что $v_k\in \boldsymbol{D}(\hat{A})$.

Для нахождения $\hat{A}^*$ рассмотрим все пары элементов u, $w\in \boldsymbol{H}$, такие, что

$$(u, \hat{A}v)=\int_{-\infty}^{\infty} t\,d\,(u,\,E_t v)=(w,\,v)$$

для всех $v\in \boldsymbol{D}(\hat{A})$. Возьмем комплексно сопряженное уравнение:

$$(v,\,w)=\int_{-\infty}^{\infty} t\,d\,(E_t v,\,u)=\int_{-\infty}^{\infty} t\,d\,(v,\,E_t u).$$

Задача нахождения u и w, удовлетворяющих этому уравнению, в точности та же задача, с которой мы встретились при определении $\boldsymbol{D}(\hat{A})$ и $\hat{A}u$, и поэтому мы делаем вывод, что $\hat{A}^*=\hat{A}$.

Наконец, для любых u, v по формуле (9.6.7)

$$(u,\,R_\lambda v)=\int_{-\infty}^{\infty} [1/(t-\lambda)]\,d\,(u,\,E_t v)=\int_{-\infty}^{\infty} [1/(t-\lambda)]\,d\,(E_t u,\,v) \qquad (9.Б.7)$$

для любого невещественного λ. Далее возьмем $v=\hat{A}w-\lambda w$, где w — произвольный элемент из $\boldsymbol{D}(\hat{A})$ (заданной в (9.Б.6)). По определению оператора $\hat{A}$

$$(E_t u,\;\hat{A}w-\lambda w)=\int_{-\infty}^{\infty} (s-\lambda)\,d_s\,(E_t u,\;E_s w);$$

подставив это в (9.Б.7), получим

$$(u,\;R_\lambda\,(\hat{A}-\lambda I)\,w)=\int_{-\infty}^{\infty} [1/(t-\lambda)]\,d_t \int_{-\infty}^{\infty} (s-\lambda)\,d_s\,(E_t u,\;E_s w);$$

применение же соотношения (9.Б.5) между двойным и однократным интегралами дает

$$(u,\;R_\lambda\,(\hat{A}-\lambda I)\,w)=\int_{-\infty}^{\infty} [(t-\lambda)/(t-\lambda)]\,d\,(u,\,E_s w)=(u,\;w).$$

Поэтому $R_\lambda=(\hat{A}-\lambda I)^{-1}$, что и требовалось доказать. Следовательно, из (9.Б.1) при $n\to\infty$ получаем нужное представление оператора A для $v\in \boldsymbol{D}(A)$.