Глава 12

КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ОПЕРАТОРЫ ГИЛЬБЕРТА—ШМИДТА И ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Каноническое представление компактного оператора; спектр; норма Гильберта—Шмидта; след; спектры операторов с компактной резольвентой; применения к дифференциальным и интегральным операторам.

Предварительные сведения: гл. 1—9.

В этой главе мы будем иметь дело с некоторыми классами ограниченных операторов, а именно с классами компактных операторов, операторов Гильберта—Шмидта, ядерных и вырожденных операторов. Эти классы связаны между собой вложениями:

ограниченные $\supset$ компактные $\supset$ Гильберта—Шмидта $\supset$ ядерные $\supset$ $\supset$ вырожденные.

Операторы каждого из этих классов имеют ряд свойств, общих с конечномерными операторами или матрицами. В конечномерном пространстве все эти классы совпадают.

12.1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ

Согласно одному из видов формулы полярного разложения, любая $(n\times n)$-матрица A может быть записана в виде $A=UR$, где U — унитарная матрица, а R — положительно полуопределенная матрица. Диагонализуя затем матрицу R при помощи некоторой унитарной, произвольную матрицу A можно записать в виде

$$A=U_1DU_2, \tag{12.1.1}$$

где U_1 и U_2 унитарны, а D диагональна с неотрицательными диагональными элементами. Это конечномерный случай стандартной формы компактного оператора, которая будет приведена ниже.

Если λ — собственное значение A, а $\mathbf{v}$ — вектор, такой, что для некоторого положительного целого m

$$(A-\lambda)^m \mathbf{v}=0, \quad (A-\lambda)^{m-1} \mathbf{v}\neq 0, \tag{12.1.2}$$

то $\mathbf{v}$ является *обобщенным собственным вектором порядка m*. Обобщенный собственный вектор порядка 1 представляет собой обычный собственный вектор. Размерность нуль-пространства

$N(A-\lambda)$ есть *геометрическая кратность* λ: это максимальное число линейно независимых обычных собственных векторов, соответствующих данному собственному значению λ. Пространство, порожденное обычными и обобщенными собственными векторами всех порядков, соответствующими λ, называется (*алгебраическим*) *собственным подпространством*. Его размерность называется *алгебраической кратностью* λ. Она равна кратности λ как корня характеристического уравнения $\det(A-\lambda)=0$ и равна числу появлений λ на главной диагонали жордановой нормальной формы матрицы A. Наибольший порядок собственного вектора для данного λ есть *индекс* λ. Эти определения применимы к любому ограниченному оператору в гильбертовом или банаховом пространстве, когда λ — изолированная точка точечного спектра. Если A — нормальная матрица ($AA^*=A^*A$), то геометрическая и алгебраическая кратности совпадают для каждого собственного значения, индекс равен единице, а все собственные векторы являются обычными собственными векторами.

Одной из стандартных норм матриц (см. книгу Гантмахера [1953]), часто обозначаемой через $\|\cdot\|_2$, является

$$\|A\|_2=\left(\sum_{j,k=1}^{n}|A_{jk}|^2\right)^{1/2}=(\operatorname{tr}(A^*A))^{1/2}; \qquad (12.1.3)$$

это конечномерный случай нормы Гильберта—Шмидта, которая будет приведена ниже.

Сумма собственных значений A с учетом их алгебраической кратности есть *след* матрицы A, он обозначается через $\operatorname{tr} A$ и равен сумме диагональных элементов

$$\operatorname{tr} A=\sum_{j=1}^{n} A_{jj};$$

кроме того, $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ или в более общем виде

$$\operatorname{tr}(A_1A_2\ \ldots\ A_k)=\operatorname{tr}(A_2\ \ldots\ A_kA_1)$$

(циклическая перестановка). След A равен произведению $(-1)^{n-1}$ и коэффициента при λ^{n-1} в характеристическом уравнении. Если P — неособенная матрица, то $P^{-1}AP$ имеет те же собственные значения, что и A, а значит, и тот же след. Это можно установить, используя циклическую перестановку: $\operatorname{tr} P^{-1}AP=\operatorname{tr} APP^{-1}=\operatorname{tr} A$.

Ранг $r(A)$ матрицы A размера $n\times n$ равен максимальному числу ее линейно независимых столбцов (или строк). Это число является также размерностью области значений A; в таком виде данное определение применимо и к любому вырожденному оператору.

12.2. КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Почти все в этом параграфе справедливо для операторов в банаховом пространстве или для отображений одного банахова пространства на другое (см. Като [1966]), но мы будем рассматривать лишь ограниченные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Как будет ясно из нижеследующего определения, только ограниченный оператор может быть компактным.

Оператор A называется *компактным* или *вполне непрерывным*, если для каждой ограниченной последовательности $\{\varphi_j\}$ элементов из H последовательность $\{A\varphi_j\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. *Замечание.* Если A не является ограниченным, то мы могли бы найти ограниченную последовательность $\{\varphi_i\}$, такую, что $\|A\varphi_i\| \to \infty$, а потому A не был бы компактным. Как мы видим, компактный оператор можно определить как оператор, который преобразует последовательность, сходящуюся слабо, в последовательность, сходящуюся сильно.

Оператор A^*A положительно полуопределен, и мы определяем $R=(A^*A)^{1/2}$, как в § 9.10. Так как $\|Rx\|=\|Ax\|$ для всех $x \in H$, то R — компактный оператор, если таковым является A. В самом деле, если $\{A\varphi_i\}$ сходится, то

$$\|R\varphi_j - R\varphi_k\| = \|A\varphi_j - A\varphi_k\|,$$

и значит, $\{R\varphi_j\}$ также сходится.

Лемма. *Если A — компактный оператор, то R имеет чисто точечный спектр с неотрицательными собственными значениями, причем или их конечное число, или они накапливаются только вблизи $\lambda=0$. Положительные собственные значения имеют конечную кратность (и, конечно, индекс, равный единице, поскольку R самосопряжен).*

Доказательство. Если бы непрерывный спектр в смысле Гильберта не был бы пуст, он содержал бы число $\lambda_0 \neq 0$ (фактически положительное), так как этот спектр является совершенным множеством (см. упражнение 2 § 11.5). Тогда нашлась бы бесконечная ортонормированная последовательность $\{u_k\}$, такая, что $\|Ru_k-\lambda_0 u_k\| \to 0$ при $k \to \infty$, но это бы противоречило компактности R, ибо последовательность $\{u_k\}$ ограничена, и если она содержит подпоследовательность $\{v_k\}$, для которой $\{Rv_k\}$ сходится, скажем, к w, то $\lambda_0 v_k$, сходилась бы к w. Но $(\lambda_0 v_k, x) \to 0$ при любом x, поскольку $\{v_k\}$ ортонормирована, откуда следует, что $w=0$. С другой стороны, $\|\lambda_0 v_k\|=|\lambda_0|$ для всех k, откуда следует, что $w \neq 0$. Следовательно, R имеет чисто точечный спектр. Аналогичные рассуждения показывают, что собственные значения не могут накапливаться при $\lambda \neq 0$ и что не существует собственных значений с бесконечной кратностью.

Пусть теперь $\{\varphi_j\}$ — максимальная ортонормированная система собственных векторов R, соответствующих положительным собственным значениям $\{\alpha_j\}$, т. е. $\{\varphi_j\}$ — полная ортонормированная система в $N(R)^{\perp}$. Для каждого j определим $\psi_j = (1/\alpha_j) A\varphi_j$; тогда

$$(\psi_j, \psi_k) = \frac{1}{\alpha_j\alpha_k}(A\varphi_j, A\varphi_k) = \frac{1}{\alpha_j\alpha_k}(\varphi_j, R^2\varphi_k) = \\ = \frac{1}{\alpha_j\alpha_k}(\varphi_j, \alpha_k^2\varphi_k) = \delta_{jk}.$$

Следовательно, система $\{\psi_j\}$ также ортонормирована. Если x — линейная комбинация векторов φ_j, то

$$Ax = \sum(\varphi_j, x)\alpha_j\psi_j. \tag{12.2.1}$$

Это выражение справедливо также и для $x \in N(R) = N(A)$, ибо тогда все $(\varphi_j, x) = 0$. Таким образом, это справедливо для всех x.

Теорема. *Оператор A компактен тогда и только тогда, когда существуют ортонормированные последовательности $\{\varphi_j\}$ и $\{\psi_j\}$ одинаковой длины (конечной или бесконечной) и соответствующая последовательность $\{\alpha_j\}$ положительных чисел, которая сходится к нулю (если она не является конечной), такие, что A задается формулой* (12.2.1). *Оператор, сопряженный A, определяется так:*

$$A^*y = \sum(\psi_j, y)\alpha_j\varphi_j. \tag{12.2.2}$$

Доказательство. Если A компактен, то существование последовательностей $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_j\}$, $\{\alpha_j\}$ было установлено выше. Мы докажем обратное: если такие последовательности даны, то оператор A, определяемый из (12.2.1), компактен. С этой целью возьмем ограниченную последовательность $\{x_r\}_1^\infty$ в H. Нам нужно показать, что $\{Ax_r\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Так как $\{x_r\}$ ограничена, то, согласно упражнению 4 § 1.9, она содержит слабо сходящуюся подпоследовательность, которую мы снова обозначим через $\{x_r\}$. Мы покажем, что из слабой сходимости $\{x_r\}$ следует сильная сходимость последовательности $\{Ax_r\}$. В силу ограниченности x_r существует такая постоянная M, что

$$\sum_j |(\varphi_j, x_r)|^2 \leqslant M^2 \quad \text{для всех } r.$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем J так, что $\alpha_j < \varepsilon$ для всех $j > J$; тогда

$$\Big\| \sum_{j>J} (\varphi_j, x_r)\alpha_j\psi_j \Big\| \leqslant M\varepsilon \quad \text{для всех } r. \tag{12.2.3}$$

Последовательность $\{x_r\}$ слабо сходится. Поэтому для фиксированных ε и J найдется такое R, что

$$|(\varphi_j, x_r - x_s)| \leqslant \varepsilon/\sqrt{J} \quad (1 \leqslant j \leqslant J) \quad \text{для всех } r, s > R.$$

Отсюда следует, что

$$\Big\| \sum_{j=1}^{J} (\varphi_j, x_r - x_s)\alpha_j\psi_j \Big\| \leqslant \varepsilon \max(\alpha_j) \quad \text{для } r, s > R. \tag{12.2.4}$$

Из (12.2.3) и (12.2.4) мы заключаем, что $\{Ax_r\}$ — последовательность Коши, что и требовалось доказать. Наконец, для установления (12.2.2) нам нужно лишь заметить, что если взять так определенный оператор A^*, то $(y, Ax) = (A^*y, x)$ для всех x и y в H.

Замечание. Даже если $\{\varphi_j\}$, $\{\psi_j\}$ — бесконечные последовательности, они не обязательно образуют полные системы. Более того, одна из них может быть полной, а другая нет.

Если A — неособенная $(n\times n)$-матрица, то (12.2.1) эквивалентно (12.1.1), если φ_j взять в качестве строк матрицы U_2, а ψ_j — в качестве столбцов матрицы U_1. (Если A — особенная матрица, то некоторые из таких строк и столбцов нужно отбросить — они не вносят вклад в (12.1.1) из-за нулей в диагональной матрице D.)

Мы утверждаем (без доказательства), что спектр компактного оператора T является счетным множеством, которое имеет точку накопления (если она вообще существует) только в $\lambda=0$. Каждое $\lambda\neq 0$ в $\sigma(T)$ представляет собой собственное значение конечной кратности. Если λ — собственное значение T, то $\bar{\lambda}$ — собственное значение T^* (см. книгу Като [1966, § III. 6.7]).

Упражнение

1. Пусть $\{\varphi_j\}_{-\infty}^{\infty}$ — полная ортонормированная система, а $\{\alpha_j\}_{-\infty}^{\infty}$ — соответствующее множество положительных чисел, которые стремятся к нулю при $j\to\pm\infty$. Определите точечный и непрерывный спектры оператора A, заданного формулой

$$Ax=\sum_{-\infty}^{\infty}(\varphi_j,\ x)\ \alpha_j\varphi_{j+1}.$$

12.3. ОПЕРАТОРЫ ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА И ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Если A — любой ограниченный оператор и $\{\chi_k\}$ — любая полная ортонормированная последовательность в $\boldsymbol{H}$, естественно представить себе величины $(\chi_k,\ A\chi_l)$ $(k,\ l=1,\ 2,\ \ldots)$ в качестве матричных элементов оператора A. Отсюда хотелось бы определить норму $\|A\|_2$ по аналогии с (12.1.3) как

$$\Big[\sum_{k,\ l}|(\chi_k,\ A\chi_l)|^2\Big]^{1/2}, \tag{12.3.1}$$

а след — как

$$\sum_k(\chi_k,\ A\chi_k). \tag{12.3.2}$$

Поэтому мы хотим знать: для каких операторов A эти суммы сходятся и не зависят от выбора последовательности $\{\chi_k\}$?

Говорят, что оператор A является *оператором Гильберта — Шмидта*, если он компактен и положительные числа α_j, входящие в равенство (12.2.1), таковы, что

$$\|A\|_2\overset{\text{def}}{=}\Big(\sum\alpha_j^2\Big)^{1/2}<\infty. \tag{12.3.3}$$

Рассмотрим сумму в (12.3.1), когда A удовлетворяет этому условию. Пусть $\{\varphi_j\}$ расширена до полной ортонормированной системы путем включения собственных векторов из нуль-пространства $N(R)$, а $\{\alpha_j\}$ соответственно дополнена нулями; тогда

$$\sum_{k,l} |(\chi_k, A\chi_l)|^2 = \sum_l \|A\chi_l\|^2 = \sum_{k,l} |(\varphi_k, A\chi_l)|^2 =$$
$$= \sum_{k,l} |(A^*\varphi_k, \chi_l)|^2 = \sum_k \|A^*\varphi_k\|^2 =$$
$$= \sum_k \Big\| \sum_j (\psi_j, \varphi_k)\alpha_j\varphi_j \Big\|^2 = \sum_k \sum_j \alpha_j^2 |(\psi_j, \varphi_k)|^2 =$$
$$= \sum_j \alpha_j^2. \qquad (12.3.4)$$

(Отметим, что перестановка членов рядов возможна лишь тогда, когда ряды абсолютно сходятся.) Таким образом, если A — оператор Гильберта—Шмидта, то сумма в (12.3.1) сходится и не зависит от выбора последовательности. Кроме того,

$$\|A\|_2^2 = \sum_l \|A\chi_l\|^2. \qquad (12.3.5)$$

Обратное утверждение дано следующей леммой, доказательство которой оставляем в качестве упражнения 1 (см. ниже).

Лемма. *Если A — ограниченный оператор, такой, что $\sum \|A\chi_l\|^2$ сходится для некоторой полной ортонормированной последовательности $\{\chi_l\}$, то* (1) *эта сумма сходится к одному и тому же значению при замене $\{\chi_l\}$ любой другой полной ортонормированной последовательностью,* (2) *A^*A имеет такой вид спектра, который требуется, чтобы A был компактен (см. лемму в предыдущем параграфе), и $\sum \alpha_j^2 < \infty$, так что A является оператором Гильберта—Шмидта, и, следовательно,* (12.3.4) *и* (12.3.5) *выполняются.*

Если выполняется также более сильное условие

$$\sum \alpha_j < \infty, \qquad (12.3.6)$$

то A представляет собой *ядерный оператор*. Мы покажем, что если A удовлетворяет этому условию, то сумма (12.3.2) не зависит от выбора последовательности $\{\chi_k\}$, лишь бы эта последовательность была ортонормированной и полной. Прежде всего

$$\sum_k (\chi_k, A\chi_k) = \sum_k \Big[\sum_j (\varphi_j, \chi_k)\alpha_j(\chi_k, \psi_j)\Big]. \qquad (12.3.7)$$

Из условия (12.3.6) следует, что этот двойной ряд сходится абсолютно. Так как $\alpha_j \geqslant 0$ и

$$\sum_k |(\varphi_j, \chi_k)(\chi_k, \psi_j)| \leqslant$$
$$\leqslant \Big[\sum_l |(\varphi_j, \chi_k)|^2 \sum_k |(\chi_k, \psi_j)|^2\Big]^{1/2} = \|\varphi_j\|\|\psi_j\| = 1,$$

то сумма абсолютных значений членов в (12.3.7) не превышает $\sum \alpha_j < \infty$. Поэтому в (12.3.7) можно сначала провести суммирование по k и получить

$$\sum_k (\chi_k, A\chi_k) = \sum_j \alpha_j (\varphi_j, \psi_j) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{tr} A. \qquad (12.3.8)$$

Ядерные операторы играют известную роль в квантовой статистике (см. гл. 14).

Заметим, что вторая сумма в (12.3.8) может сходиться (и даже абсолютно) для компактного оператора A, который не относится к ядерным операторам.

Наконец, если сумма (12.2.1) включает лишь конечное число членов, скажем r, т. е. если A^*A имеет лишь конечное число ненулевых собственных значений, каждое из которых конечной кратности, то A является *вырожденным оператором ранга r;* тогда

$$r = \dim \boldsymbol{R}(A) = \dim \boldsymbol{R}(A^*).$$

Упражнения

1. Докажите сформулированную выше лемму. *Указание* для части (1): запишите сумму в виде

$$\sum_{k,\, l} |(\omega_k, A\chi_l)|^2,$$

где $\{\omega_k\}$ — любая другая полная ортонормированная последовательность. *Указание* для части (2): выберите подходящую последовательность $\{\omega_k\}$, используя собственные векторы и приближенные собственные векторы (если требуется) оператора A^*A.

2. Покажите, что из компактности A и ограниченности B следует компактность AB и BA.

3. Покажите, что если A — оператор Гильберта — Шмидта, а U — унитарный оператор, то A^*, $(A^*A)^{1/2}$ и U^*AU являются операторами Гильберта — Шмидта и что

$$\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \|(A^*A)^{1/2}\|_2 = \|U^*AU\|_2.$$

4. Покажите, что если A — оператор Гильберта — Шмидта, то $\|A\| \leqslant \|A\|_2$, а A^*A — ядерный оператор и $\|A\|_2 = \operatorname{tr} A^*A$.

5. Покажите, что если A — оператор Гильберта — Шмидта, а B — ограниченный оператор, то AB и BA — операторы Гильберта — Шмидта, причем

$$\|BA\|_2 \leqslant \|B\| \|A\|_2, \quad \|AB\|_2 \leqslant \|B\| \|A\|_2.$$

6. Покажите, что если A и B — операторы Гильберта — Шмидта, то $A+B$ — также оператор этого класса и что

$$\|A+B\|_2 \leqslant \|A\|_2 + \|B\|_2.$$

7. Пусть A и B — операторы Гильберта — Шмидта. Покажите, что AB и BA — ядерные операторы и что

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA, \quad |\operatorname{tr} AB| \leqslant \|A\|_2 \|B\|_2.$$

8. Покажите, что если A — ядерный оператор, то A^* тоже ядерный оператор, причем $\operatorname{tr} A^* = \overline{\operatorname{tr} A}$.

9. Пусть A — ядерный оператор, а B — ограниченный. Покажите, что AB и BA — ядерные операторы и $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$. *Указание.* При помощи полярного разложения запишите $A = UR$; тогда $C = UR^{1/2}$ и $D = R^{1/2}$ — операторы Гильберта — Шмидта, а $A = CD$.

10. Покажите, что из вырожденности A и ограниченности B следует вырожденность операторов A^*, AB, BA, причем

$$r(A^*) = r(A), \quad r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}.$$

Некоторые из приведенных выше результатов можно суммировать в виде следующих утверждений:

1. $\operatorname{tr}(A_1A_2 \cdots A_k) = \operatorname{tr}(A_2 \cdots A_kA_1)$ в том случае, когда $A_1, \ldots$ $\ldots, A_k$ ограничены и хотя бы один из них является ядерным или хотя бы два из них являются операторами Гильберта — Шмидта.

2. Норма Гильберта — Шмидта удовлетворяет всем требованиям нормы.

3. Операторы Гильберта — Шмидта образуют гильбертово пространство со скалярным произведением, определяемым следующим образом:

$$(A, B) = \operatorname{tr} A^*B = \sum (A\chi_l, B\chi_l).$$

В этом случае нужно доказать полноту пространства. Для этого либо воспользуйтесь книгой Като [1966, § V.2.4], либо рассматривайте это доказательство как несколько более трудное упражнение.

12.4. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ГИЛЬБЕРТА — ШМИДТА

Если $K(x, y)$ — непрерывная функция на единичном квадрате плоскости x, y, то оператор K, определенный в $L^2(0, 1)$ при помощи формулы

$$(Kf)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y)\, dy,$$

является прототипом оператора класса Гильберта — Шмидта. Операторы такого рода появляются в качестве резольвент регулярных операторов Штурма — Лиувилля, где $K(x, y)$ — функция Грина (см. § 10.6).

Существенное обобщение состоит в следующем. Обозначим через $\boldsymbol{H}$ гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}^n)$ и допустим, что $K = K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — некое распределение в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Для того чтобы определить аналог приведенного выше интеграла, возьмем $\varkappa_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ $(m = 1, 2, \ldots)$ — функции в $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, которые сходятся к $K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ в L^2 при $m \to \infty$. Тогда для любого g в $\boldsymbol{H}$ $\psi_l(\mathbf{y})$ $(l = 1, 2, \ldots)$ будут функциями в $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, которые сходятся к $g(\mathbf{y})$ в L^2 при $l \to \infty$.

Упражнения

1. Покажите, что функции

$$\int \varkappa_m(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, \psi_l(\mathbf{y})\, d^n\mathbf{y} \quad (m, l = 1, 2, \ldots) \tag{12.4.1}$$

образуют последовательность Коши в $L^2(\mathbb{R}^n)=H$. Обозначим через $f(\mathbf{x})$ предел этой последовательности и запишем

$$f(\mathbf{x})=(Kg)(\mathbf{x})=\int K(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\,g(\mathbf{y})\,d^n\mathbf{y}. \qquad (12.4.2)$$

2. Покажите, что

$$\|f\|=\lim_{\substack{m\to\infty \\ l\to\infty}}\left\|\int \varkappa_m(\mathbf{x},\ \mathbf{y})\,\psi_l(\mathbf{y})\,d^n\mathbf{y}\right\|\leqslant\|K\|_0\|g\|, \qquad (12.4.3)$$

где $\|K\|_0$ — норма $K(\mathbf{x},\ \mathbf{y})$ в $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. Это неравенство показывает, что K, определяемый формулой (12.4.2), является ограниченным оператором и что его норма $\|K\|$ не превышает $\|K\|_0$.

Пусть теперь $\{\chi_k\}_1^\infty$ — полная ортонормированная последовательность в $L^2(\mathbb{R}^n)=H$. Для простоты мы допустим, что $\chi_k(\mathbf{x})$ — гладкие вещественные функции. Тогда функции

$$\chi_k(\mathbf{x})\,\chi_l(\mathbf{y}) \quad k,\ l=1,\ 2,\ \ldots$$

образуют ортонормированную последовательность в $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. Эта последовательность является полной, но мы используем лишь неравенство Бесселя

$$\sum_{k,\ l}|(\chi_k,\ K\chi_l)|^2\leqslant\|K\|_0^2, \qquad (12.4.4)$$

из которого в силу леммы предыдущего параграфа последует, что K — оператор Гильберта — Шмидта.

12.5. ОПЕРАТОРЫ С КОМПАКТНОЙ РЕЗОЛЬВЕНТОЙ

Пусть T — замкнутый оператор, резольвента которого $R_\lambda=(T-\lambda)^{-1}$ компактна для некоторого λ_0 в резольвентном множестве $\rho(T)$. Тогда резольвентное уравнение, записанное в виде

$$R_\lambda=R_{\lambda_0}(I+(\lambda-\lambda_0)R_\lambda), \qquad (12.5.1)$$

показывает, что R_λ — компактный оператор для любого другого λ из $\rho(T)$, поскольку второй множитель в правой части уравнения ограничен. Такой оператор T называется *оператором с компактной резольвентой.*

Мы знаем, что спектр $\sigma(R_{\lambda_0})$ состоит из ограниченного счетного множества без каких-либо точек накопления, кроме нуля, и что любое $\mu\neq0$ в $\sigma(R_{\lambda_0})$ есть собственное значение конечной кратности. Это сразу позволяет нам узнать спектр T. Прежде всего допустим, что $\mu\neq0$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(R_{\lambda_0})$. Тогда для любого $y\in H$ уравнение

$$R_{\lambda_0}x-\mu x=y$$

имеет решение x. В частности, если z — произвольный элемент H и мы положим $y=-\mu R_{\lambda_0}z$, то уравнение

$$R_{\lambda_0}x-\mu x=-\mu R_{\lambda_0}z$$

имеет решение x. Отсюда следует, что x находится в области определения оператора $T-\lambda_0$ (которая является областью значений оператора R_{λ_0}). Следовательно, уравнение

$$x-\mu(T-\lambda_0)x=-\mu z,$$

т. е.

$$Tx-(\lambda_0+1/\mu)x=z,$$

имеет решение x для любого z. Иначе говоря, λ_0+1/μ принадлежит резольвентному множеству $\rho(T)$.

С другой стороны, если $\mu\neq 0$ — собственное значение R_{λ_0}, а x — соответствующий собственный вектор, т. е. если

$$R_{\lambda_0}x-\mu x=0,$$

то $x-\mu(T-\lambda_0)x=0$, или

$$Tx-(\lambda_0+1/\mu)x=0,$$

откуда следует, что этот же самый x является собственным вектором оператора T, соответствующим собственному значению λ_0+ $+1/\mu$. Итак, любое $\lambda\neq\lambda_0$ принадлежит либо $P\sigma(T)$, либо $\rho(T)$, и нам уже известно, что $\lambda_0\in\rho(T)$. Таким образом, T имеет чисто точечный спектр.

Пусть μ_k — одно из ненулевых собственных значений R_{λ_0}, так что $\lambda_k=\lambda_0+1/\mu_k$ есть собственное значение T. Соответствующий спектральный проектор для R_{λ_0} имеет вид

$$P_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits^{(\mu_k-)}(R_{\lambda_0}-\mu)^{-1}\,d\mu. \tag{12.5.2}$$

Его область значений конечномерна, поскольку μ_k — собственное значение конечной кратности. Путь интегрирования представляет собой достаточно малый контур около μ_k, такой, что он не окружает никакое другое собственное значение и не окружает нуль. Непосредственные вычисления показывают, что при преобразовании $\lambda=\lambda_0+1/\mu$ формула (12.5.2) переходит в

$$P_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits^{(\lambda_k-)}(T-\lambda)^{-1}\,d\lambda, \tag{12.5.3}$$

т. е. P_k является также проектором для T, соответствующим собственному значению λ. Мы видим, что λ_k имеет ту же кратность, что и μ_k. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если T — оператор с компактной резольвентой, то спектр $\sigma(T)$ состоит из собственных значений λ_k конечной кратности с единственной точкой накопления $\lambda=\infty$.*

Как уже отмечалось, резольвента регулярного оператора Штурма—Лиувилля T является интегральным оператором типа Гильберта—Шмидта. Следовательно, теорема 1 применима и T имеет чисто точечный спектр, как было уже установлено в § 10.6. Другим примером дифференциального оператора с компактной резольвентой является лапласиан в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, рассмотренный в § 11.7. Существенно самосопряженный вариант лапласиана в Ω есть оператор A_0, определенный уравнением (11.7.1). Обратный ему оператор A_0^{-1}, представляющий собой резольвенту оператора A_0 при $\lambda=0$, является интегральным оператором в (11.7.3), ядро которого есть функция Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ для области Ω. Особенность при $\mathbf{x}=\mathbf{x}'$ интегрируема, в силу чего (см. (11.7.4)) интеграл

$$\iint |G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|^2 d^3\mathbf{x}\, d^3\mathbf{x}'$$

конечен. Поэтому A_0^{-1}—оператор Гильберта—Шмидта, следовательно, компактен, и мы заключаем из теоремы 1, что A_0 имеет чисто точечный спектр, состоящий лишь из собственных значений конечной кратности, которые накапливаются только на бесконечности. Это совпадает с утверждением, сделанным в § 11.7 на основе теории Фредгольма.

Если оператор T с компактной резольвентой еще и самосопряжен, то его собственные векторы образуют полную ортонормированную систему. Если T не является самосопряженным оператором, полная система векторов получается, если (1) включаются обобщенные собственные векторы и (2) удовлетворяются некоторые дополнительные условия. Ниже мы сформулируем две теоремы о полноте, которые использовались в теории гидродинамической устойчивости для установления полноты собственных колебаний малого возмущения стационарного течения; основные операторы этой теории не являются самосопряженными.

Пусть λ_k $(k=1, 2, \ldots)$—собственные значения оператора T. Для каждого k область значений E_k проектора P_k, заданного в (12.5.3), представляет собой конечномерное пространство, инвариантное относительно T: $x \in E_k$ тогда и только тогда, когда $Tx \in E_k$. Поэтому T, ограниченный областью E_k, может быть представлен $(n_k \times n_k)$-матрицей T_k, где $n_k = \dim E_k$. Собственные и обобщенные собственные векторы T_k (см. § 12.1) соответствуют системе векторов x_{ks} $(s=1, \ldots, n_k)$ в H, которые порождают пространство E_k. При дополнительных условиях, сформулированных ниже в теоремах, линейная оболочка собственных подпространств E_k $(k=1, 2, \ldots)$ совпадает с пространством H. Тогда для любого вектора $v \in H$ составляющая v в E_k имеет вид

$$\sum_{s=1}^{n_k} c_{ks} x_{ks}, \tag{12.5.4}$$

откуда

$$v=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{n_k} c_{ks}x_{ks}\right). \qquad (12.5.5)$$

Хотя, вообще говоря, в этой сумме нельзя произвольно переставлять члены, как это разрешено в случае самосопряженности T, мы можем сказать, что векторы $\{x_{ks}\}$ образуют полную систему в том смысле, что их конечные линейные комбинации плотны в $\boldsymbol{H}$.

Обычно полагают, что в задаче гидродинамической устойчивости могут появляться лишь собственные векторы порядка 1 (т. е. обычные собственные векторы), но это не доказано. Как и в конечномерном случае, собственный вектор порядка m, соответствующий собственному значению λ_k, является вектором $x\in\boldsymbol{H}$, таким, что

$$(T-\lambda_k)^m x=0, \quad (T-\lambda_k)^{m-1} x\neq 0.$$

При $m>1$ этот вектор можно характеризовать как решение уравнения

$$(T-\lambda_k)\,x=y,$$

где y — некоторый собственный вектор порядка $m-1$. Поскольку T — дифференциальный оператор в гидродинамической задаче, отыскание x влечет за собой решение неоднородного дифференциального уравнения, как только y известен. Для этой цели составлены вычислительные программы, но до сих пор не обнаружено никаких обобщенных собственных функций.

Ди Прима и Хабетлер [1969] использовали теорему Наймарка (см. ниже) для доказательства полноты решений задачи Орра — Зоммерфельда, которая является несамосопряженной задачей на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающего двумерные собственные колебания возмущений плоского ламинарного течения.

Теорема 2 (Наймарк). *Пусть T — оператор с компактной резольвентой, и пусть имеется последовательность концентрических окружностей $|\lambda|=r_l$ $(l=1,\ 2,\ \ldots)$ в его резольвентном множестве (т. е. не проходящих через какое-либо собственное значение), такая, что*

$$\sup\{\|R_\lambda\|\colon\ |\lambda|=r_l\}\to 0 \text{ при } l\to\infty; \qquad (12.5.6)$$

тогда собственные векторы и обобщенные собственные векторы $\{x_{ks}\}$ оператора T образуют полную систему в $\boldsymbol{H}$.

Замечание. Так как $\|R_\lambda\|\geqslant[\operatorname{dist}(\lambda,\ \sigma(T))]^{-1}$, ясно, что условие (12.5.6) может удовлетворяться лишь в том случае, когда при $k\to\infty$ собственные значения λ_k станут все более и более разделяться.

Идея доказательства состоит в следующем. Оператор

$$P^{(l)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda| = r_l} (-R_\lambda)\, d\lambda$$

представляет собой сумму проекторов P_k для всех собственных значений λ_k, которые лежат внутри окружности $|\lambda| = r_l$. Следовательно, $P^{(l)}v$ является частичной суммой ряда (12.5.5) и становится полной суммой в пределе при $l \to \infty$. Из определения резольвенты мы имеем $(T - \lambda) R_\lambda = I$, откуда

$$-R_\lambda = (1/\lambda)\, I - (1/\lambda)\, T R_\lambda.$$

Если v принадлежит области определения $\boldsymbol{D}(T)$, то

$$T R_\lambda v = R_\lambda T v,$$

откуда

$$P^{(l)} v = v - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda| = r_l} \frac{1}{\lambda} R_\lambda\, d\lambda\, T v.$$

Вследствие условия (12.5.6) теоремы второй член в последнем выражении стремится к нулю при $l \to \infty$. Следовательно, любое $v \in \boldsymbol{D}(T)$ можно представить в виде разложения (12.5.5), но $\boldsymbol{D}(T)$ плотна в $\boldsymbol{H}$ и полнота системы собственных и обобщенных собственных векторов доказана.

Более сильным средством исследования иногда оказывается аналогичная теорема Карлемана, поскольку в ней не требуется, чтобы собственные значения λ_k все более и более разделялись при $k \to \infty$. В этой теореме требуется только, чтобы при $k \to \infty$ собственные значения концентрировались на комплексной плоскости в некоторых направлениях, проведенных из начала координат, и чтобы резольвента оператора T была оператором Гильберта—Шмидта. Эту теорему использовал Сэттинджер [1970] для доказательства полноты собственных колебаний возмущений общего трехмерного стационарного течения. Общая форма этой теоремы дана в книге Данфорда и Шварца [1963]; мы приведем упрощенную форму, в которой требуется, чтобы собственные значения находились вблизи вещественной оси; в этом отношении T похож на самосопряженный оператор, у которого собственные значения вещественны.

Теорема 3 (Карлеман). *Если T — оператор с резольвентой Гильберта — Шмидта и если вдоль каждого луча $\lambda = re^{i\theta}$ (θ фиксировано), исключая вещественную ось ($\theta = 0$ или $\theta = \pi$), $\|R_\lambda\| = O(|\lambda|^{-1})$ для больших λ, то собственные векторы и обобщенные собственные векторы оператора T образуют полную систему в $\boldsymbol{H}$.*

В гидродинамических задачах собственные значения λ_k лежат в параболической области

$$\operatorname{Re}\lambda \geqslant \mathrm{const} + \mathrm{const}\cdot(\operatorname{Im}\lambda)^2.$$

Условие теоремы сильнее необходимого; необходимо только, чтобы норма $\|R_\lambda\|$ вела себя указанным выше образом на каждом из пяти лучей, выходящих из начала координат и таких, что угол между смежными лучами меньше $\pi/2$ (см. книгу Данфорда и Шварца).