Глава 15

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Задача с начальными данными; начальные данные; граничные и другие вспомогательные условия; эволюция; динамика частицы; поток тепла; волновой процесс; пространство состояний; норма; банахово пространство; корректно и некорректно поставленные задачи; обобщенные решения; инвариантность корректности относительно преобразований Лоренца.

Предварительные сведения: уравнения с частными производными, встречающиеся в физике; гл. 1—8.

Законы классической физики носят причинный или детерминированный характер, и это приводит к понятию корректно поставленной задачи с начальными данными. Грубо говоря, если состояние системы при $t=t_0$ известно точно, то это позволяет предсказать последующие состояния при $t>t_0$. В настоящей главе, а также в двух следующих главах изучаются именно такие задачи. Эти задачи обычно связаны с решением дифференциальных уравнений, и необходимо выяснить, какие их решения физически приемлемы и какие начальные и вспомогательные условия при этом нужно ставить. Правильная постановка задач основана на следующем физическом принципе: необходимо, чтобы для любого начального состояния имелось только одно решение и чтобы это решение непрерывно зависело от начального состояния (характер непрерывности нужно оговаривать). Мы увидим, что естественную среду для таких задач образуют банаховы пространства. В основном рассматриваются линейные задачи; краткое изложение теории нелинейных задач, пока еще весьма фрагментарной, приводится в гл. 17.

15.1. ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ В МЕХАНИКЕ

Во многих задачах теоретической физики переменная времени t играет особую роль. Математическая постановка таких задач включает *начальные данные*, которые описывают состояние системы в начальный момент $t=0$; задача же состоит в нахождении состояния в более поздний момент $t>0$, т. е. в нахождении *эволюции* системы из ее начального состояния.

В качестве конечномерного примера из небесной механики укажем задачу N тел, которые рассматриваются как материальные точки, свободно движущиеся в пространстве под действием только сил взаимного притяжения. Мгновенное состояние системы задается значениями трех декартовых координат и трех соответствующих компонент импульса каждого тела. Если эти $6N$ величин известны для $t=0$, то ньютоновы законы движения и закон всемирного тяготения однозначно определяют (без учета столкновений) их значения для последующих моментов времени $t>0$.

Эта задача нелинейна, однако в элементарной механике есть много задач (где речь идет о твердых телах, стенках, пружинах, грузах и т. д.), для которых система имеет одно или несколько состояний равновесия, а если состояние системы близко к равновесному, то уравнения ее движения можно линеаризовать. Пусть система имеет n степеней свободы; обозначим через $\mathbf{y}$ n-мерный вектор, компонентами которого являются отклонения от равновесия. В этом случае получается уравнение вида

$$\ddot{\mathbf{y}}=A\mathbf{y}, \tag{15.1.1}$$

где A — вещественная $(n\times n)$-матрица. Мгновенная конфигурация системы соответствует точке n-мерного пространства, и если при $t=0$ заданы $\mathbf{y}$ и $\dot{\mathbf{y}}$, то последующее движение точки $\mathbf{y}$ n-мерного пространства в линейном приближении полностью определяется уравнением (15.1.1).

Для консервативных систем (без трения) матрица A симметрична и, следовательно, имеет вещественные собственные значения; если все собственные значения матрицы A отрицательны, то движение системы представляет собой гармонические колебания около положения равновесия; если есть какие-либо положительные собственные значения, то в общем решении имеются экспоненциально расходящиеся члены и состояние равновесия неустойчиво. Конечно, при специально выбранных начальных данных $\mathbf{y}$ и $\dot{\mathbf{y}}$ при $t=0$ эти члены могут отсутствовать, но тогда при малейшем изменении начальных данных они снова могут появиться, так что в конечном счете обязательно возникают большие отклонения от положения равновесия, т. е. равновесие оказывается неустойчивым. Ниже (в § 15.3) мы убедимся в том, что подобная, только более сильная, неустойчивость может иметь место и в бесконечномерном случае.

15.2. ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Конечность числа степеней свободы в предыдущих примерах получается в результате идеализации тел как точечных масс и твердых тел. Физики больше имеют дело со сплошной средой. В этом случае задачи с начальными данными формулируются на основе дифференциальных уравнений с частными производными или интегродифференциальных уравнений, дополненных начальными условиями и граничными или другими вспомогательными условиями. Дифференциальные уравнения могут быть записаны так, что в левой части в качестве оператора появляется $\partial/\partial t$, а операторы в правой части зависят от t только параметрически (или вообще не зависят от t). Иногда дифференциальное уравнение, вообще не содержащее t, появляется в качестве вспомогательного условия; в качестве примера можно указать дивергентные условия $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ и $\nabla\cdot\mathbf{H}=0$ для уравнений Максвелла в вакууме. Если в постановке задачи содержатся только дифференциальные уравнения с частными производными и начальные данные (в этом случае для исключения граничных условий обычно необходимо начальные данные задавать на всем пространстве), то такую задачу часто называют *задачей Коши*.

Одномерная задача теплопроводности представляет собой простейшую задачу с начальными данными. Если $u=u(x, t)$ — температура в точке x теплоизолированного стержня в момент времени t, то поток тепла в точке x пропорционален $-\partial u/\partial x$, дивергенция этого потока дает соответствующую скорость убывания температуры (или ее роста, если дивергенция отрицательна); следовательно, u удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a\leqslant x\leqslant b, \quad 0\leqslant t, \tag{15.2.1}$$

где σ — положительная постоянная (предполагается, что коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость постоянны), а a и b суть x-координаты концов стержня. Начальное условие задается в следующем виде:

$$u(x, 0)=f(x) \quad \text{(известная функция)}, \quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{15.2.2}$$

Такая задача имеет бесконечное множество решений, и поэтому необходимы еще граничные условия. Их надлежащий выбор зависит от физической постановки, и одним из возможных является случай, когда

$$u(a, t)=u(b, t)=0, \quad 0\leqslant t, \tag{15.2.3}$$

что соответствует сохранению определенной температуры на концах стержня; здесь эта температура принята равной нулю.

Решение этих уравнений в классическом смысле называется *строгим решением* задачи с начальными данными. Необходимое условие существования строгого решения состоит в том, чтобы начальные данные были согласованы с дифференциальным уравнением и граничными условиями, т. е. чтобы $f(x)$ была дважды дифференцируемой и обращалась в нуль при $x=a$ и $x=b$. Часто желательно иметь решения в более общем смысле.

В стандартном методе рядов Фурье получаются более общие решения. Они имеют вид

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\sigma t}\sin nx; \tag{15.2.4}$$

здесь ради простоты интервал (a, b) взят равным $(0, \pi)$, а b_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ в разложении по синусам:

$$b_n = (2/\pi) \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx. \tag{15.2.5}$$

Этот метод допускает, например, определенные разрывы в начальном распределении температуры, представляющие интерес с физической точки зрения. Возникает вопрос, следует ли считать (15.2.4) решением в любом случае, когда интегралы (15.2.5) существуют, скажем, в смысле Лебега, даже когда, например, $f(x)$ может иметь плотное в $(0, \pi)$ множество разрывов или даже когда ряд (15.2.4) при $t = 0$ расходится.

Имеются решения, соответствующие таким начальным данным $f(x)$, которые следует рассматривать скорее как распределение, а не как функцию. Чтобы показать это, мы рассмотрим сначала задачу на всей вещественной оси $\mathbb{R}$, т. е. заменим интервал $[a, b]$ на $\mathbb{R}$ и отбросим граничные условия. Для любого фиксированного вещественного y функция

$$\psi(x, t; y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma t}} e^{-(x-y)^2/4\sigma t} \tag{15.2.6}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (15.2.1) при всех x и всех $t > 0$. Согласно (2.6.3),

$$\lim_{t \downarrow 0} \psi(x, t; y) = \delta(x - y) \tag{15.2.7}$$

в смысле сходимости распределений; поэтому функция $\psi(x, t; y)$, которая называется *фундаментальным решением*, соответствует начальным данным $f(x) = \delta(x - y)$. Можно представить себе, что в точке $x = y$ стержня при $t = 0$ внезапно появляется единичное количество тепла. Предположим теперь, что $f = f(y)$ — произвольное вещественное распределение медленного роста на $\mathbb{R}$. Для любого $t > 0$ функция $\psi(x, t; y)$, рассматриваемая как функция от y, принадлежит классу Шварца $\mathcal{S}$ пробных функций. Читатель легко может убедиться в том, что функция

$$u(x, t) = \langle f, \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \psi(x, t; y) \, dy \tag{15.2.8}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (15.2.1) при всех x и всех $t > 0$. Кроме того,

$$\lim_{t \downarrow 0} u(x, t) = f(x)$$

в смысле сходимости распределений. Следовательно, мы имеем решение задачи с начальными данными в очень общем смысле.

Теперь можно получить соответствующее решение на конечном интервале $[a, b]$ при наличии граничных условий (15.2.3), воспользовавшись известным приемом отражения решения от прямых $x=a$ и $x=b$ в плоскости x, t. Если $f(x)$ задана на $[a, b]$, то мы распространим начальные данные на всю прямую $\mathbb{R}$, потребовав, чтобы $f(x)$ была нечетной (обобщенной) функцией от $x-a$ и $x-b$ (и, следовательно, периодической с периодом $2(b-a)$), т. е. чтобы $f(x)$, $-f(2a-x)$ и $-f(2b-x)$ были одним и тем же распределением. Тогда тем же свойством обладает и решение, задаваемое формулой (15.2.8). Кроме того, легко убедиться в том, что в силу особых свойств фундаментального решения (15.2.6) $u(x, t)$ является обычной функцией при $t>0$ даже в том случае, когда $u(x, 0)$ является распределением. (Это особое свойство задачи теплопроводности, а не задач с начальными данными вообще.) Поэтому из равенств

$$u(x, t) = -u(2a-x, t) = -u(2b-x, t)$$

следует, что $u=0$ при $x=a$ и $x=b$.

15.3. КОРРЕКТНО И НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ

При любом разумном выборе класса допустимых начальных функций $f(x)$ задача теплопроводности *поставлена корректно* (*по Адамару*), а это означает, что (а) для любой $f(x)$ из этого класса решение существует, (б) для любой заданной $f(x)$ решение единственно и (в) решение непрерывно зависит от $f(x)$. Последнее означает, что если возмущение δu решения мало при $t=0$, то оно мало также в при любом $t>0$. Например, если предположить, что $f(x)$ кусочно непрерывна и имеет на $[a, b]$ ограниченную вариацию, то можно воспользоваться методом Фурье, и тогда из (15.2.4) следует, что все коэффициенты Фурье в разложении u, а значит, и δu убывают при увеличении t. В следующей главе корректность будет определена на фоне банаховых пространств.

Предположим, однако, что в правой части дифференциального уравнения (15.2.1) изменен знак:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant t \quad (\sigma > 0), \tag{15.3.1}$$

а начальные и граничные условия остались прежними. Тогда вместо (15.2.4) получим решение вида

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{+n^2\sigma t} \sin nx,$$

члены которого растут экспоненциально по времени. Если коэффициенты Фурье b_n исходной функции f не убывают чрезвычайно быстро при $n \to \infty$ (т. е. если $f(x)$ не является очень гладкой функцией), то при любом положительном t ряд Фурье расходится из-за наличия множителя n^2 в экспоненте, поэтому у такой задачи решения нет; но даже если решение существует, оно не зависит непрерывно от начальных данных. Возьмем произвольное положительное число M (сколь угодно большое) и любые ε и δ (сколь угодно малые); тогда возмущение

$$u_1(x,\ t) = \varepsilon e^{m^2\sigma t} \sin mx$$

будет не больше ε при $t=0$, но будет больше M при $t=\delta$, если m достаточно велико. Поэтому эта задача с начальными данными поставлена некорректно.

Некорректность хуже, чем просто неустойчивость. Если исходное уравнение теплопроводности (15.2.1) изменяется добавлением в правой части члена ku, где k — постоянная, то имеется такое возмущение, именно

$$u_1(x,\ t) = \text{const}\cdot\exp\left[\left(k - \frac{\sigma\pi^2}{(b-a)^2}\right)t\right]\sin\frac{\pi(x-a)}{b-a},$$

которое неограниченно возрастает при $t \to \infty$, если $k > \sigma\pi^2/(b-a)^2$; следовательно, физическая система неустойчива в обычном смысле. Однако за конечное время, скажем $t \leqslant t_1$, никакое возмущение не может возрасти более чем в

$$\exp\left[(k - \sigma\pi^2/(b-a)^2)\, t_1\right]$$

раз, следовательно, решение непрерывно зависит от начальных данных. Иначе говоря, принимая в расчет указанный выше сомножитель, мы можем выяснить, с какой точностью нужно знать $f(x)$, чтобы гарантировать, что ошибка будет меньше ε при $0 \leqslant t \leqslant t_1$, в то время как в некорректно поставленной задаче ошибка на любом заданном интервале времени может увеличиваться во сколь угодно большое число раз.

Некорректно поставленные задачи могут представлять физический интерес. Задача теплопроводности с измененным так, как указано выше, знаком эквивалентна задаче, в которой нужно найти распределение температуры при $t < 0$, если оно известно при $t=0$. У такой задачи нет решения, представляющего практический интерес, если отсутствует дополнительная информация относительно тепловой истории системы, задаваемая обычно в виде неравенств.

Упражнение

1. Найдите решение задачи (15.2.1), (15.2.2) в виде ряда Фурье, заменив (15.2.3) условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a,\ t) = \frac{\partial u}{\partial x}(b,\ t) = 0, \quad 0 \leqslant t, \tag{15.3.2}$$

и дайте физическую интерпретацию этим новым граничным условиям. Покажите, что если задать одновременно все четыре граничные условия (15.2.3) и (15.3.2), то у такой задачи совсем нет решения, если $f(x) \not\equiv 0$.

15.4. ЗАДАЧА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Напомним, что одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (15.4.1)$$

имеет решение вида

$$u(x, t) = f(x+ct) + g(x-ct). \qquad (15.4.2)$$

Заметим попутно, что эта задача может быть представлена в каноническом виде, упомянутом в начале § 15.2, введением другой функции $v(x, t)$, такой, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (15.4.3)$$

Тогда мгновенное состояние системы описывается заданием значений $u(x, 0)$ и $v(x, 0)$ как функций от x. (Если в наличии имеется только u, то необходимо задавать также и $\partial u/\partial t$.)

Если f и g дважды дифференцируемы, то (15.4.2) дает строгое решение уравнения (15.4.1). Из физических соображений часто желательно допускать более общие «решения» такого вида, например решения пилообразной формы. Тогда производные от f и g могут иметь разрывы; в точках разрыва f' или g' вторые производные, которые входят в уравнение (15.4.1), не существуют. Кроме того, знаменитый пример Вейерштрасса показывает, что можно выбрать такие f и g, для которых f'' и g'' нигде не существуют, даже если f' и g' непрерывны; следовательно, уравнение (15.4.1) никогда ни при каких x и t не может удовлетворяться, хотя подобные «решения» можно интерпретировать как такой волновой процесс, который физики называют «белым шумом». Хуже то, что f и g сами могут быть недифференцируемыми или даже всюду разрывными. Ясно, что как только начинают рассматриваться обобщенные решения, становится необходимым уточнить класс физически допустимых функций или распределений. Обобщенное решение (15.4.2) в смысле теории распределений всегда удовлетворяет дифференциальному уравнению (15.4.1).

Из (15.4.2) очевидно, что если при $t=0$ значения u и $\partial u/\partial t$ известны для всех x, функции f и g полностью определяются этими начальными данными, и значит, решение (15.4.2) единственно. В гл. 17 мы увидим, что в некоторых нелинейных задачах, близко связанных с данной, обобщенные решения (называемые там «слабыми») не являются единственными, если не заданы определенные вспомогательные условия; для данного дифференциального уравнения и данных начальных значений получаются различные обобщенные решения, зависящие от вида этих вспомогательных условий.

15.5. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО (ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ) ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

В задачах описанного выше типа мгновенное состояние физической системы при любом фиксированном значении переменной t характеризуется заданными функциями других переменных (называемых *пространственными переменными*). Эти функции будут обозначаться одним символом u и рассматриваться как точка бесконечномерного пространства $\boldsymbol{B}$. Движение точки $u=u(t)$ в пространстве $\boldsymbol{B}$ при изменении t соответствует эволюции системы.

С этого момента и до гл. 17 рассматриваются только линейные задачи. Сумма u_1+u_2 или разность u_1-u_2 двух элементов $\boldsymbol{B}$ определяется как такая точка пространства $\boldsymbol{B}$, которая получается сложением или вычитанием соответствующих функций. Для любого числа α αu определяется как точка, полученная умножением всех функций, представляющих u, на α. Таким образом, $\boldsymbol{B}$ становится линейным пространством. Эти операции могут привести к функциям, не представляющим непосредственно состояния физической системы (например, могут получиться отрицательные плотности), однако удобно рассматривать такие функции как представления обобщенных состояний системы. Тогда если функция разложена в $\boldsymbol{B}$ в какой-либо ряд, то отдельные члены и частные суммы этого ряда также представляются точками пространства $\boldsymbol{B}$. По той же причине удобно использовать комплекснозначные функции.

Понятие расстояния в пространстве $\boldsymbol{B}$ вводится таким образом, что две точки u_1 и u_2 близки тогда и только тогда, когда они представляют почти тождественные состояния физической системы. Для линейных задач это расстояние берется как функция разности u_1-u_2 (равной, скажем, w), называется *нормой* элемента u_1-u_2 (или w) и обозначается через $\|u_1-u_2\|=\|w\|$; это число положительно, если u_1 и u_2 представляют разные состояния, и равно нулю, если $u_1=u_2$. В качестве известных примеров можно указать максимум-норму и L^2-норму—см. § 15.7. Расстояние $\|\alpha w\|$ между состояниями αu_1 и αu_2 рассматривается как умноженное на $|\alpha|$ расстояние между u_1 и u_2, т. е. $\|\alpha w\|=|\alpha|\|w\|$. Поскольку определяемая величина интерпретируется как расстояние, необходимо дополнительно потребовать, чтобы выполнялось неравенство треугольника $\|u_1-u_3\|\leqslant\|u_1-u_2\|+\|u_2-u_3\|$ или, несколько проще, $\|w_1+w_2\|\leqslant\|w_1\|+\|w_2\|$. Может быть, не очевидно, предписывается ли это требование физическими соображениями (напоминаем: в релятивистской геометрии неравенство треугольника не выполняется), однако фактически оно удовлетворяется при любом выборе нормы, которую, вероятно, следовало бы использовать на практике, и, кроме того, это требование существенно для некоторых важных результатов теории операторов.

15.6. ПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ. БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО

Если осуществляется бесконечная последовательность изменений состояния системы и величина изменений убывает достаточно быстро вдоль последовательности, то кажется очевидным, что должно существовать возможное состояние системы, являющееся пределом этой последовательности состояний. Выражаясь математическим языком, если $\|u_l - u_n\| \to 0$ при l, $n \to \infty$ независимо друг от друга, то последовательность $\{u_n\}$ точек $\boldsymbol{B}$ должна иметь предел в $\boldsymbol{B}$. В этом смысле $\boldsymbol{B}$ имеет такую же непрерывную структуру, как и множество вещественных чисел (у каждой последовательности Коши есть предел) в отличие от той недостаточности, которая присуща множеству одних рациональных чисел.

На основании этих соображений в качестве $\boldsymbol{B}$ берется *банахово пространство*, которое было определено в гл. 1 (в § 1.2 и 1.3) как *полное нормированное линейное пространство*. Банахово пространство обладает всеми свойствами гильбертова пространства, за исключением тех, которые связаны со скалярным произведением, и как было указано в гл. 1, может оказаться невозможным определить скалярное произведение так, чтобы выполнялось соотношение $(u, u)^{1/2} = \|u\|$ для нормы u в $\boldsymbol{B}$.

Для данной задачи часто возможен выбор среди различных банаховых пространств. Является ли данное «решение» приемлемым представлением возможной эволюции физической системы, должны решать физики, однако в следующей главе мы увидим, что как только банахово пространство $\boldsymbol{B}$ выбрано, соответствующие обобщения строгих решений будут обобщенными решениями, которые определяются некоторым семейством операторов $E(t)$ в $\boldsymbol{B}$.

15.7. ПРИМЕРЫ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пространства непрерывных функций с так называемой максимум-нормой используются в задачах теплопроводности, диффузии и переноса. Приведем несколько примеров.

1. $C(a, b) = \{f\colon f(x)$ непрерывна, $a \leqslant x \leqslant b\}$,

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| \colon a \leqslant x \leqslant b\},$$

т. е. $C(a,\ b)$ — пространство всех функций, определенных и непрерывных на интервале $a \leqslant x \leqslant b$; для любой такой функции f норма является супремумом или наименьшей верхней гранью значений $|f(x)|$. (В данном случае вместо sup можно было бы написать max.)

2. $C(\mathbb{R}^n) = \{f\colon f(\mathbf{x})$ непрерывна на всем $\mathbb{R}^n\}$,

$$\|f\| = \sup\{|f(\mathbf{x})|\colon \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\},$$

где вектор $\mathbf{x}$ обозначает точку n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$.

3. $CP(\mathbb{R},\ p) = \{f\colon f(x)$ непрерывна для всех x и периодична с периодом p $[f(x+p) \equiv f(x)]\}$,

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\colon x \in \mathbb{R} \text{ (или } x \in [a,\ a+p],\ a \text{ любое)}\}.$$

В каждом из этих примеров возможны два случая: случаи вещественнозначных и комплекснозначных функций и скаляров. Если необходимо различать эти случаи, то пишут ${}^{\text{real}}C(a,\ b)$ или ${}^{\text{cpx}}C(a,\ b)$ и т. п.

Для этих пространств, очевидно, выполняются все аксиомы банаховых пространств (возможно, за исключением полноты).

Утверждение. Приведенные выше пространства являются полными и тем самым банаховыми пространствами.

Доказательство (для $C(\mathbb{R}^n)$). Пусть $\{f_k\}$ — любая последовательность Коши в $C(\mathbb{R}^n)$. Для любого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших l и k $\|f_k - f_l\| \leqslant \varepsilon$; иначе говоря,

$$|f_k(\mathbf{x}) - f_l(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon \quad \forall \mathbf{x} \tag{15.7.1}$$

при всех достаточно больших l и k. Поэтому (1) $\{f_k(\mathbf{x})\}$ для любого $\mathbf{x}$ является числовой последовательностью Коши и, следовательно, сходится к пределу $f(\mathbf{x})$; (2) поскольку сходимость равномерна, $f(\mathbf{x})$ непрерывна; (3) положив в (15.7.1) $k \to \infty$, получим

$$|f(\mathbf{x}) - f_l(\mathbf{x})| \leqslant \varepsilon \quad \forall \mathbf{x}$$

при всех достаточно больших l — это показывает, что $f(\mathbf{x})$ ограничена и что $\|f - f_l\| \to 0$ при $l \to \infty$. Поэтому последовательность $\{f_k\}$ имеет предел $f = f(x)$ в пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ и это пространство полно.

Типичным примером пространств с дискретными координатами служит гильбертово пространство l^2, описанное в § 1.3, каждая точка ξ которого является бесконечной последовательностью $\{x_k\}$ комплексных чисел, таких, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ сходится, а именно

$$l^2 = \{\xi = \{x_k\}\colon \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty\}, \quad \|\xi\| = \|\{x_k\}\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Аналогичными пространствами являются

$$l^1 = \{\xi = \{x_k\}: \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}, \quad \|\xi\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|,$$

и в общем случае (для любого $p \geqslant 1$)

$$l^p = \{\xi = \{x_k\}: \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}, \quad \|\xi\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Для l^2 доказательства неравенства треугольника и полноты были даны в гл. 1 о гильбертовых пространствах; для l^p-пространств эти доказательства аналогичны, но здесь опускаются, поскольку эти пространства не будут нами использоваться.

Пространства с дискретными координатами можно обобщить следующим образом. Пусть $\{\boldsymbol{B}_k\}$ — последовательность банаховых пространств ($k = 1, 2, \ldots$); определим пространство $l^2\{\boldsymbol{B}_k\}$, каждый элемент ξ которого является последовательностью $\{u_k\}$, где $u_k \in \boldsymbol{B}_k$, такой, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2$ сходится (в k-м члене сумма $\|\cdot\|$ означает норму в пространстве $\boldsymbol{B}_k$), т. е.

$$l^2\{\boldsymbol{B}_k\} = \left\{\xi = \{u_k\}: \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 < \infty\right\}, \quad \|\xi\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2\right)^{1/2}.$$

Пространства Фока, появляющиеся в теории вторичного квантования, являются именно такими пространствами: для них в качестве каждого пространства $\boldsymbol{B}_k$ берется гильбертово пространство; см. гл. 1.

Все пространства распределений $L^p(\mathbb{R}^n)$, $L^p(\Omega)$, $L^p_\sigma(\mathbb{R})$ ($1 \leqslant p < \infty$), введенные в гл. 5, являются банаховыми пространствами со следующей нормой:

$$\|f\| = \left[\int_{\mathbb{R}^n \text{ или } \Omega} |f|^p \, d\mathrm{x} \text{ или } \int |f|^p \, d\sigma(x)\right]^{1/p}.$$

Для любого банахова пространства $\boldsymbol{B}$ множество $B(\boldsymbol{B})$ ограниченных линейных операторов, определенных на всем $\boldsymbol{B}$, является другим банаховым пространством (фактически банаховой алгеброй, потому что в нем определено умножение); нормой элемента $A \in B(\boldsymbol{B})$ служит его операторная норма $\|A\|$.

В каждом из описанных выше пространств точка представляет одну функцию. Во многих задачах для описания состояния физической системы требуется несколько функций (например, в гидродинамике нужно знать давление $p(\mathrm{x})$, плотность $\rho(\mathrm{x})$ и три компоненты скорости $\mathbf{v}(\mathrm{x})$. Эти функции можно записать как компоненты $f_j(\mathrm{x})$ векторнозначной функции $\mathbf{f}(\mathrm{x})$ (которая не обязательно имеет столько же компонент, что и x). Тогда все приведенные выше пространства можно обобщить, например:

$$C(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m) = \{f\colon \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{— ограниченное непрерывное отображение } \mathbb{R}^n \text{ в } \mathbb{R}^m\},$$

$$\|\mathbf{f}\| = \sup\{|f_j(\mathbf{x})| : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ j = 1, 2, \ldots, m\};$$

если функции комплекснозначны, пространство обозначается как $C(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m)$. Аналогично в пространствах $L^p(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$ и $L^p(\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m)$ каждая компонента $f_j(\mathbf{x})$ является вещественным или комплексным распределением из вещественного или комплексного пространства $L^p(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|\mathbf{f}\| = \left[\sum_{j=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x}\right]^{1/p}.$$

Для любого банахова пространства $\boldsymbol{B}$ можно построить другое банахово пространство следующим образом. Однопараметрическое семейство $u(t)$ элементов $\boldsymbol{B}$ (*кривая* в $\boldsymbol{B}$) называется *непрерывной*, если $\|u(t+\delta) - u(t)\| \to 0$ при $\delta \to 0$ для всех t. Тогда банахово пространство $\boldsymbol{B}_1(a, b)$ определяется так:

$$\boldsymbol{B}_1(a, b) = \{u(t) \text{ — непрерывная кривая в } \boldsymbol{B}\colon \ a \leqslant t \leqslant b\};$$

$$\text{для } u \in \boldsymbol{B}_1(a, b) \quad \|u\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \|u(t)\|.$$

Пространства такого рода используются в § 16.6 о неоднородных задачах с начальными данными.

15.8. НЕЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Напоминаем, что все бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства изометрически изоморфны, т. е. эквивалентны как абстрактные гильбертовы пространства. Для банаховых пространств это неверно. Например, легко убедиться в том, что пространства L^1 и L^2 (скажем, на $\mathbb{R}$) неэквивалентны. Так как L^2 — гильбертово пространство, для него справедливо правило параллелограмма (1.3.5), тогда как для L^1 оно не выполняется, согласно § 1.3. Поскольку правило параллелограмма касается только внутренних свойств (т. е. свойств абстрактных банаховых пространств), то L^1 и L^2 не могут быть изоморфными. Кроме того, неэквивалентны и L^1 и L^p для любого $p > 1$, потому что пространство L^p рефлексивно, а L^1 нет (см. § 5.7), а рефлексивность также относится к внутренним свойствам. Можно доказать, что вообще при $p \neq r$ пространства L^p и L^r неэквивалентны.

Выбор нормы в функциональном пространстве является делом главным образом физиков, поскольку этот выбор накладывает ограничения на класс допустимых функций. Если функция $w(x)$ должна иметь конечное значение максимум-нормы, то она должна быть ограниченной; если она должна иметь конечную L^2-норму, то она должна быть квадратично интегрируемой и т. д. Неэквивалентность различных норм важна также и для сходимости, чего нет в случае конечномерных пространств, в которых все обычные нормы топологически эквивалентны. Например, если $\mathbf{v}$ — вектор с компонентами $v_1, \ldots, v_n$, то обе нормы

$$\|\mathbf{v}\|_{\max} = \max\{|v_1|, \ldots, |v_n|\}$$

и

$$\|\mathbf{v}\|_2 = (|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2)^{1/2}$$

определяют один и тот же тип сходимости, а именно $\mathbf{v}_k \to \mathbf{w}$ тогда и только тогда, когда каждая компонента вектора $\mathbf{v}_k$ сходится к соответствующей компоненте $\mathbf{w}$. Однако в функциональных пространствах разные нормы в общем случае неэквивалентны и задача может оказаться корректно поставленной относительно одной нормы и некорректно поставленной относительно другой. В задачах о волновом процессе и подобных ему процессах часто удобны нормы типа L^2-норм, потому что в этих задачах энергия выражается через интеграл от квадрата некоторой полевой величины (или суммы таких квадратов); следовательно, для физически допустимых функций такие нормы конечны и остаются ограниченными в течение эволюции системы.

15.9. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Многие понятия, связанные с линейными операторами, для банаховых пространств оказываются теми же самыми, что и для гильбертова пространства. Следующие понятия определяются так же, как и в гл. 7: линейный оператор A; область определения $\boldsymbol{D}(A)$; область значений $\boldsymbol{R}(A)$; расширение; норма $\|A\|$; произведение операторов; обратный оператор; собственное значение; собственный вектор; точечный, непрерывный и остаточный спектры; резольвентное множество; резольвента; график $\Gamma(A)$; замкнутый оператор; компактный оператор (но не оператор Гильберта — Шмидта или ядерный оператор).

Понятий «симметрический», «самосопряженный», «унитарный», «нормальный» в банаховых пространствах нет. Нет и общей теории спектрального разложения, подобной той, что изложена в гл. 9.

Выполняется теорема о расширении (ограниченный оператор имеет единственное расширение на все замыкание своей области определения без увеличения нормы); ее доказательство в § 7.1 справедливо для любого банахова пространства.

Пример 1

Пусть B — пространство $CP(\mathbb{R}, 2\pi)$ непрерывных периодических функций на $\mathbb{R}$ с периодом 2π, в котором в качестве нормы $\|\cdot\|$ взята максимум-норма. Пусть T — оператор, областью определения которого $D(T)$ является множество таких функций из B, которые имеют абсолютно сходящийся ряд Фурье. Если

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx},$$

то по определению

$$(Tf)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{C_n}{1+n^2} e^{inx}.$$

Здесь T — ограниченный оператор с плотной в B областью определения; следовательно, имеется единственное его расширение T' с $D(T') = B$. В действительности T' можно представить как интегральный оператор вида

$$(T'f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y) f(y)\, dy.$$

Упражнение

1. Найдите выражение для ядра $K(x-y)$ в приведенном выше примере (оно не единственно).

Порождает ли данная операция, скажем дифференцирование, ограниченный или неограниченный оператор, зависит от выбора банахова пространства. Пусть B — пространство бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, таких, что величина

$$\|f\| \overset{\text{def}}{=} \sup_x \sup_q \left\{ \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^q f(x) \right| :\ x \in \mathbb{R},\ q = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

конечна. Несколько измененное доказательство полноты $C(\mathbb{R}^n)$, приведенное в § 15.7, показывает, что B является банаховым пространством. В этом пространстве оператор дифференцирования T, заданный равенствами

$$D(T) = B, \quad (Tf)(x) = (d/dx) f(x),$$

является ограниченным линейным оператором. Заметим, кстати, что это банахово пространство, вероятно, не очень полезно, так как, например, оно содержит функцию $\sin x$, но не содержит функцию $\sin(1+\varepsilon)x$ при любом $\varepsilon > 0$.

15.10. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ. СОПРЯЖЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Как и в гильбертовом пространстве, линейный функционал $l(u)$ на B *ограничен*, если конечна величина

$$\|l\| \overset{\text{def}}{=} \sup_{u \neq 0} (|l(u)| / \|u\|).$$

Множество всех ограниченных линейных функционалов на $\boldsymbol{B}$ с указанной нормой является другим банаховым пространством; оно называется *сопряженным* (к $\boldsymbol{B}$) пространством и обозначается через $\boldsymbol{B}'$. Согласно § 5.7, сопряженным к пространству типа L^p является соответствующее пространство L^q, где $(1/p)+(1/q)=1$, а в соответствии с теоремой Рисса—Фреше о представлении из § 1.8 гильбертово пространство можно рассматривать как сопряженное самому себе.

Упражнение

1. Пусть $\boldsymbol{B}$—пространство $C(\mathbb{R})$ ограниченных непрерывных вещественных функций на $\mathbb{R}$ с максимум-нормой. Доказать изометричность сопряженного пространства $\boldsymbol{B}'$ пространству всех вещественных функций $\sigma(x)$ с ограниченной вариацией, определенных на $\mathbb{R}$ и таких, что $\sigma(0)=0$, а $\sigma(x+0)=\sigma(x)$; в качестве нормы функции $\sigma(x)$ из $\boldsymbol{B}'$ берется ее полная вариация на $\mathbb{R}$. (*Указание*. Воспользуйтесь теоремой Рисса о представлении из § 13.9.)

15.11. СХОДИМОСТЬ ВЕКТОРОВ И ОПЕРАТОРОВ

Типы сходимости, определенные для гильбертовых пространств в § 1.9 и 9.9, все еще можно использовать, за исключением того, что для слабой сходимости выражения $(v, \cdot)$, являющиеся линейными функционалами в случае гильбертовых пространств, нужно заменить линейными функционалами $l(\cdot)$ из $\boldsymbol{B}'$. Последовательность $\{u_n\}$ сходится к w *сильно*, если $\|u_n-w\|\to 0$, и *слабо*, если $l(u_n)\to l(w)$ для каждого l из $\boldsymbol{B}'$. Последовательность $\{A_n\}$ ограниченных операторов сходится к A *равномерно*, если $\|A_n-A\|\to 0$, *сильно*, если $\|A_nv-Av\|\to 0$ для любого $v\in\boldsymbol{B}$, и *слабо*, если $l(A_n)\to l(Av)$ для любого $v\in\boldsymbol{B}$ и любого $l\in\boldsymbol{B}'$. Слабая сходимость нам почти не потребуется.

15.12. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Напоминаем, что матрица A в задаче § 15.1 симметрична для консервативных систем (т. е. $A_{jk}=A_{kj}$ для всех j, k). Эта симметрия лучше всего описывается при помощи скалярного произведения $\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}$ векторов, а именно матрица A симметрична тогда и только тогда, когда $(A\mathrm{x})\cdot\mathrm{y}=\mathrm{x}\cdot(A\mathrm{y})$ для всех векторов x, y, потому что если это равенство расписать покоординатно, то оно примет вид

$$\sum_{j,\ k} A_{jk}x_ky_j=\sum_{j,\ k} A_{kj}x_ky_j.$$

Иногда (но не для всех банаховых пространств) можно ввести аналогичные обозначения для $\boldsymbol{B}$ через скалярное произведение двух элементов из $\boldsymbol{B}$, записываемое как (u, v), аналогичное скалярному произведению векторов и обладающее теми же свойствами. Если скалярное произведение определяется в $\boldsymbol{B}$ так, что $\|u\|=(u, u)^{1/2}$ (как и для векторов), то $\boldsymbol{B}$ является гильбертовым пространством (см. гл. 1). Среди симметрических операторов в гильбертовом пространстве важнее всего самосопряженные операторы, которые рассматривались в гл. 7—9.

15.13. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В специальной теории относительности Эйнштейна нет однозначно определенной переменной времени t. Однако теории относительности по форме инвариантны относительно преобразований Лоренца; следовательно, если задача корректно поставлена в одной системе координат Лоренца, то она оказывается корректно поставленной и во всех системах координат Лоренца. В качестве примеров можно указать уравнение Дирака и уравнения Максвелла (о них пойдет речь в следующей главе).

Иногда нелегко выяснить, какое решение задачи с начальными данными в некоторой системе координат описывает ту же самую эволюцию физической системы, что и данное решение в другой системе координат.

15.14. ПОЛУНОРМЫ

Как было указано в § 5.9, *полунорма*—это такая функция $\|\cdot\|$, которая удовлетворяет всем требованиям нормы, за исключением того, что требуется только ее полуопределенность ($\|u\|\geqslant 0$ для всех u), а не определенность ($\|u\|>0$, кроме $u=0$). Пространство V, полное относительно полунормы, можно превратить в банахово пространство следующим образом: назовем u и u' из V *эквивалентными* (и будем писать $u\sim u'$), если $\|u-u'\|=0$. Отношение $\sim$ рефлексивно ($u\sim u$), симметрично (если $u\sim u'$, то $u'\sim u$) и транзитивно (если $u\sim u'$ и $u'\sim u''$, то $u\sim u''$ вследствие неравенства треугольника); поэтому это отношение разбивает V на непересекающиеся классы эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий u, обозначается через $[u]$ и определяется следующим образом:

$$[u]=\{v\colon \ \|u-v\|=0\}.$$

Кроме того, если $u\sim u'$, то $\|u\|=\|u'\|$ (тоже в силу неравенства треугольника), так что $\|[u]\|$ может быть определена однозначно как $\|u\|$. Легко показать, что с такой нормой множество всех классов эквивалентности оказывается банаховым пространством $\boldsymbol{B}$. В алгебраических терминах это формулируется так: если V_0—

подпространство пространства V, состоящее из элементов с нулевой полунормой, то $\boldsymbol{B}$ является факторпространством V/V_0.

Эта процедура используется в классическом определении L^p-пространств, согласно которому функция $f(x)$ принадлежит L^p, если она измерима и $|f(x)|^p$ интегрируема. Однако при этом необходимо считать, что две функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают как элементы L^p, если они отличаются друг от друга только на множестве меры нуль, поскольку в таком случае

$$\|f-g\|=\left[\int |f(x)-g(x)|^p\,dx\right]^{1/p}=0.$$