Глава 16

КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ. ПОЛУГРУППЫ

Постановка задач в банаховых пространствах; строгое решение; понятие корректно поставленной задачи в смысле Адамара; существование и единственность решения; непрерывная зависимость решения от начального состояния; обобщенное решение; полугруппа; сильно непрерывная полугруппа; инфинитезимальный генератор; теорема Хилле—Иосиды; неоднородные задачи; неоднородные граничные условия; задачи с явной зависимостью от времени; приложения к задачам теплопроводности, волновых процессов, квантовой механики, теории электромагнитного поля и переноса нейтронов.

Предварительные сведения: гл. 15.

В данной главе представлена общая теория линейных задач с начальными данными или эволюционных физических задач.

16.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Линейную задачу с начальными данными рассмотренного в гл. 15 типа можно сформулировать абстрактно как задачу нахождения такой функции $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве $\boldsymbol{B}$, что

$$du(t)/dt = Au(t) \tag{16.1.1}$$

и

$$u(0)=u_0, \quad u_0 \text{ задано}, \tag{16.1.2}$$

где A—оператор, включающий пространственные переменные, а производной функции $u(t)$ является предел (при $\Delta t \to 0$) выражения $[u(t+\Delta t)-u(t)]/\Delta t$ в смысле сходимости в $\boldsymbol{B}$. *Строгое решение* уравнения (16.1.1) определяется как такая функция $u(t)$ ($u(t) \in \boldsymbol{B}$ для всех $t \geqslant 0$), что

$$u(t) \in \boldsymbol{D}(A) \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0, \tag{16.1.3}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t} - Au(t) \right\| = 0 \quad \forall t \geqslant 0. \tag{16.1.4}$$

Граничные или другие вспомогательные условия учитываются тем, что область определения $\boldsymbol{D}(A)$ оператора A ограничивается только теми элементами пространства $\boldsymbol{B}$, которые удовлетворяют этим условиям; предполагается, что эти условия линейны и однородны, так что множество $\boldsymbol{S}$ всех тех u, которые удовлетворяют этим условиям, образует линейное многообразие; предполагается, что $\boldsymbol{D}(A)$ содержится в $\boldsymbol{S}$. Таким образом, условие

(16.1.3), помимо всего прочего, требует, чтобы $u(t)$ удовлетворяла всем вспомогательным условиям для всех $t \geqslant 0$. Уравнение (16.1.1) — это линейное эволюционное уравнение, оно описывает изменение физической системы из заданного начального состояния.

Описанная постановка задачи применима не только к уравнениям первого порядка по t, поскольку уравнения более высокого порядка можно свести к системам первого порядка путем введения дополнительных зависимых переменных.

Значительная часть теории, излагаемой в этой главе, может быть обобщена на задачи, в которых оператор A зависит (достаточно гладко) от t; например, A может быть дифференциальным оператором, коэффициенты которого зависят от t. Такие задачи рассматриваются кратко в § 16.7, а пока предполагается, что A не зависит от t.

Выбор банахова пространства $\boldsymbol{B}$, а также области определения оператора A является существенной частью постановки задачи. Мы увидим, что данная задача может оказаться корректно поставленной (в смысле следующего параграфа) при одном выборе $\boldsymbol{B}$ и некорректно поставленной при другом выборе $\boldsymbol{B}$[1]. Этот выбор, по крайней мере частично, почти всегда определяется физическими соображениями.

16.2. КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Задача с начальными данными называется *корректно поставленной (в смысле Адамара)*, если она обладает следующими свойствами:

1) строгие решения однозначно определяются своими начальными элементами;

2) множество U всех начальных элементов строгих решений плотно в банаховом пространстве $\boldsymbol{B}$;

3) для любого конечного интервала $[0, t_0]$ найдется такая постоянная $K = K(t_0)$, что каждое строгое решение удовлетворяет неравенству

$$\|u(t)\| \leqslant K \|u(0)\| \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{16.2.1}$$

В связи с первым условием заметим, что если *какое-либо* строгое решение однозначно определяется его начальным элементом, то в силу линейности задачи этим свойством обладают и все другие

---

[1] Любая однозначно разрешимая линейная задача может быть сделана корректно поставленной при должном выборе норм в области определения оператора или его области значений, но не каждая норма удобна или естественна в данной задаче. — *Прим. перев.*

Глава 16

КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ. ПОЛУГРУППЫ

Постановка задач в банаховых пространствах; строгое решение; понятие корректно поставленной задачи в смысле Адамара; существование и единственность решения; непрерывная зависимость решения от начального состояния; обобщенное решение; полугруппа; сильно непрерывная полугруппа; инфинитезимальный генератор; теорема Хилле—Иосиды; неоднородные задачи; неоднородные граничные условия; задачи с явной зависимостью от времени; приложения к задачам теплопроводности, волновых процессов, квантовой механики, теории электромагнитного поля и переноса нейтронов.

Предварительные сведения: гл. 15.

В данной главе представлена общая теория линейных задач с начальными данными или эволюционных физических задач.

16.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Линейную задачу с начальными данными рассмотренного в гл. 15 типа можно сформулировать абстрактно как задачу нахождения такой функции $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве $\boldsymbol{B}$, что

$$du(t)/dt = Au(t) \tag{16.1.1}$$

и

$$u(0) = u_0, \quad u_0 \text{ задано,} \tag{16.1.2}$$

где A—оператор, включающий пространственные переменные, а производной функции $u(t)$ является предел (при $\Delta t \to 0$) выражения $[u(t+\Delta t) - u(t)]/\Delta t$ в смысле сходимости в $\boldsymbol{B}$. *Строгое решение* уравнения (16.1.1) определяется как такая функция $u(t)$ ($u(t) \in \boldsymbol{B}$ для всех $t \geqslant 0$), что

$$u(t) \in \boldsymbol{D}(A) \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0, \tag{16.1.3}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - Au(t) \right\| = 0 \quad \forall t \geqslant 0. \tag{16.1.4}$$

Граничные или другие вспомогательные условия учитываются тем, что область определения $\boldsymbol{D}(A)$ оператора A ограничивается только теми элементами пространства $\boldsymbol{B}$, которые удовлетворяют этим условиям; предполагается, что эти условия линейны и однородны, так что множество S всех тех u, которые удовлетворяют этим условиям, образует линейное многообразие; предполагается, что $\boldsymbol{D}(A)$ содержится в S. Таким образом, условие

(16.1.3), помимо всего прочего, требует, чтобы $u(t)$ удовлетворяла всем вспомогательным условиям для всех $t \geqslant 0$. Уравнение (16.1.1) — это линейное эволюционное уравнение, оно описывает изменение физической системы из заданного начального состояния.

Описанная постановка задачи применима не только к уравнениям первого порядка по t, поскольку уравнения более высокого порядка можно свести к системам первого порядка путем введения дополнительных зависимых переменных.

Значительная часть теории, излагаемой в этой главе, может быть обобщена на задачи, в которых оператор A зависит (достаточно гладко) от t; например, A может быть дифференциальным оператором, коэффициенты которого зависят от t. Такие задачи рассматриваются кратко в § 16.7, а пока предполагается, что A не зависит от t.

Выбор банахова пространства $\boldsymbol{B}$, а также области определения оператора A является существенной частью постановки задачи. Мы увидим, что данная задача может оказаться корректно поставленной (в смысле следующего параграфа) при одном выборе $\boldsymbol{B}$ и некорректно поставленной при другом выборе $\boldsymbol{B}$[1]. Этот выбор, по крайней мере частично, почти всегда определяется физическими соображениями.

16.2. КОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫЕ ЗАДАЧИ. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Задача с начальными данными называется *корректно поставленной (в смысле Адамара)*, если она обладает следующими свойствами:

1) строгие решения однозначно определяются своими начальными элементами;

2) множество U всех начальных элементов строгих решений плотно в банаховом пространстве $\boldsymbol{B}$;

3) для любого конечного интервала $[0, t_0]$ найдется такая постоянная $K = K(t_0)$, что каждое строгое решение удовлетворяет неравенству

$$\|u(t)\| \leqslant K \|u(0)\| \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{16.2.1}$$

В связи с первым условием заметим, что если *какое-либо* строгое решение однозначно определяется его начальным элементом, то в силу линейности задачи этим свойством обладают и все другие

[1]) Любая однозначно разрешимая линейная задача может быть сделана корректно поставленной при должном выборе норм в области определения оператора или его области значений, но не каждая норма удобна или естественна в данной задаче. — *Прим. перев.*

откуда видно, что (1) решение единственно, потому что если $u(t)=u_1(t)-u_2(t)$, где u_1 и u_2 — произвольные решения, то $u_1(0)=u_2(0)$ только тогда, когда $u_1(t)=u_2(t)$ для всех t, и (2) решение непрерывно зависит от $u(0)$, т. е. задача корректно поставлена. Разрешающим оператором $E_0(t)$ является интегральный оператор в формуле (16.2.7), а обобщенное решение задается этой же формулой в предположении, что $f(y)$ представляет собой произвольный элемент банахова пространства $\boldsymbol{B}_0$.

Данная задача корректно поставлена также и в гильбертовом пространстве $L^2(a, b)$, если оператор A определен следующим образом:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{D}(A)=\{u\in L^2\colon\ u''\in L^2,\ u(a)=u(b)=0\}, \\ Au=\sigma u'', \end{gathered} \tag{16.2.8}$$

так как, скалярно умножив уравнение с частными производными (15.2.1) на $\overline{u(x, t)}$ и проинтегрировав по частям с учетом граничных условий, мы получим, что

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \frac{1}{2}|u|^2\,dx=-\int_a^b\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\leqslant 0,$$

следовательно,

$$\|u(t)\|\leqslant\|u(0)\|.$$

(Заметим, что в этом случае нет необходимости вводить меньшее пространство $\boldsymbol{B}_0$, поскольку $\boldsymbol{D}(A)$ плотно в L^2.)

Эта задача корректно поставлена и относительно любой из общих норм, таких, как L^p-нормы, или нормы, включающие кроме $u(x)$ еще и одну или несколько (или бесконечное число) производных от $u(x)$ и т. д.; при этом решение задается формулой (16.2.7). Данная задача корректно поставлена относительно всех этих норм потому, что уравнение теплопроводности чрезвычайно «устойчиво» в прямом направлении (при возрастании t от 0): решение с ростом t уменьшается и постоянно заглаживается. Напротив, это уравнение столь же «неустойчиво» в обратном направлении (при убывании t от 0), что делает обратную задачу теплопроводности некорректно поставленной при любом выборе нормы[1]).

Соответствующая многомерная задача также корректно поставлена, например, в банаховом пространстве $C(\mathbb{R}^n)$ с максимум-нормой или в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Фундаментальным решением является

$$\psi(\mathbf{x}, t; \mathbf{y})=(2\pi\sigma t)^{-n/2}e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2/(4\sigma t)}. \tag{16.2.9}$$

[1]) См. примечание в конце § 16.1. — *Прим. перев.*

16.3. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ

Как было указано в § 15.4, задача Коши для одномерного волнового уравнения всегда имеет решение, по крайней мере в смысле теории распределений (граничные условия будут рассмотрены позже). Действительно, если φ и ψ — произвольные распределения на $\mathbb{R}$, а $f = {}^1/_2\varphi + {}^1/_2\psi$ и $g = {}^1/_2\varphi - {}^1/_2\psi$, то распределения на $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x+ct) + g(x-ct), \\ v(x, t) &= f(x+ct) - g(x-ct) \end{aligned} \tag{16.3.1}$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x} \tag{16.3.2}$$

в смысле теории распределений, а также начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x). \tag{16.3.3}$$

Замечание. Для произвольного распределения $h(x, y)$ на $\mathbb{R}^2$ выражение $h(x, 0)$ было бы бессмысленным. Однако в теории задач с начальными данными t рассматривается как параметр, и из (16.3.1) видно, что для любого фиксированного значения t_0 этого параметра $u(x, t_0)$ и $v(x, t_0)$ являются вполне определенными распределениями на $\mathbb{R}$, и поэтому начальные условия (16.3.3) имеют смысл. В данной задаче и x можно рассматривать как параметр, и при фиксированном x_0 $u(x_0, t)$ и $v(x_0, t)$ будут вполне определенными распределениями. Вообще параметром может быть любая линейная комбинация $t' = \alpha x + \beta t$, лишь бы прямые $\alpha x + \beta t = \mathrm{const}$ не были характеристическими линиями (см. следующую главу), т. е. лишь бы $\beta \neq \pm c\alpha$. В релятивистских задачах разные временные переменные t, t' связываются с различными системами отсчета.

Чтобы доказать единственность решения, нужно показать, что если $\varphi = \psi = 0$ для всех x, то $u = v = 0$ для всех x и всех t. Пусть ξ и η — новые переменные в плоскости x, t, такие, что $\xi = x + ct$ и $\eta = x - ct$. Тогда уравнения (16.3.2) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(u+v) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi}(u-v) = 0. \tag{16.3.4}$$

Поэтому $u+v$ — распределение, зависящее только от ξ, а $u-v$ — распределение, зависящее только от η (см. § 2.7); если эти распределения обозначить через $2f$ и $2g$, то получаются формулы (16.3.1), а это говорит о том, что каждое решение уравнений (16.3.2) имеет вид (16.3.1). В частности, если $\varphi = \psi = 0$, то $u = v = 0$. Это рассуждение является просто весьма частным случаем метода характеристик, при помощи которого доказывается единственность решения общей (нелинейной) гиперболической системы уравнений (см. следующую главу); значения $u+v$ и $u-v$ распространяются в плоскости x, t вдоль характеристических линий $\xi = \mathrm{const}$ и $\eta = \mathrm{const}$.

Чтобы рассмотреть вопрос о непрерывной зависимости решения от начальных данных, нужно подобрать какую-либо норму $\|\cdot\|$ для состояний, представляемых для заданного t распределениями $u(x, t)$, $v(x, t)$, — отсюда следует также выбор класса распределений, которыми можно представить состояния системы. Иначе говоря, необходимо подобрать банахово пространство; ниже описаны разные варианты этого выбора. В любом случае удобно ввести двумерные векторы

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\varphi}=\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}\quad \text{и т. д.;}$$

тогда дифференциальные уравнения (16.3.2) и решение (16.3.1) можно сокращенно записать так:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u}(t)=\tilde{A}\mathbf{u}(t)\quad \text{и}\quad \mathbf{u}(t)=\tilde{E}(t)\,\mathbf{u}(0),$$

где

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}0&1\\ 1&0\end{pmatrix}c\frac{\partial}{\partial x},\tag{16.3.5}$$

$$\tilde{E}(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\ 1&1\end{pmatrix}T_{-ct}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\ -1&1\end{pmatrix}T_{ct},\tag{16.3.6}$$

где для любого вещественного a T_a — оператор сдвига, определяемый равенством $(T_af)(x)=f(x-a)$. Для конкретного банахова пространства операторы A и $E(t)$ общей теории получаются из $\tilde{A}$ и $\tilde{E}(t)$ путем надлежащего выбора их областей определения.

Рассмотрим сначала пространство

$$B=\left\{\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}:\ u(x)\ \text{и}\ v(x)\text{ — ограниченные непрерывные функции}\right\},\tag{16.3.7}$$
$$\|\mathbf{u}\|=\sup_x(\max\{|u(x)|,\ |v(x)|\}).$$

В данном случае из (16.3.1) сразу следует, что $\|\mathbf{u}(t)\|\leqslant\|\mathbf{u}(0)\|$, следовательно, задача с начальными данными корректно поставлена в этом банаховом пространстве. Однако ниже мы увидим, что это неверно в многомерном случае (имеется в виду — для максимум-нормы), поэтому банаховы пространства этого типа физически неуместны в рассматриваемой задаче.

Нетрудно убедиться в том, что рассматриваемая задача корректно поставлена и в банаховом пространстве

$$B=\left\{\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}:\ u,\ v\in L^2(\mathbb{R})\right\},\tag{16.3.8}$$
$$\|\mathbf{u}\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}(|u(x)|^2+|v(x)|^2)\,dx,$$

потому что непосредственные вычисления, начиная с (16.3.1), показывают, что

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} (|\varphi|^2 + |\psi|^2)\, dx = \|u(0)\|^2,$$

т. е. задача корректно поставлена. В качестве области определения оператора A, который действует по формуле (16.3.5), можно взять множество всех таких $\mathbf{u}$, у которых $u, v \in C_0^\infty$, или множество

$$\boldsymbol{D}(A) = \{\mathbf{u} \in \boldsymbol{B}\colon \ \tilde{A}\mathbf{u} \in \boldsymbol{B}\},$$

или любое другое множество, находящееся между этими крайними случаями. В первом случае строгие решения являются функциями класса C_0^∞ для каждого t и удовлетворяют системе дифференциальных уравнений всюду на плоскости x, t. Во втором случае строгие решения являются непрерывными функциями, дифференцируемыми в классическом смысле почти всюду, и в том же смысле почти всюду удовлетворяют дифференциальным уравнениям. Обобщенные решения не обязательно дифференцируемы в классическом смысле для любых x и t; для каждого t они являются распределениями из L^2. Таким образом, благодаря концепции Адамара корректно поставленной задачи мы приходим к удивительному понятию нигде недифференцируемого решения дифференциального уравнения. Это же справедливо и для ранее рассмотренного банахова пространства (16.3.7). Поскольку такие обобщенные решения часто имеют физический смысл, как, например, белый шум, иногда предпочтительнее интегральная формулировка физических законов, не зависящая от дифференцируемости, такая, как в приведенном ниже упражнении и в более общем случае в гидродинамике (см. следующую главу).

Упражнение

1. Пусть $\mathbf{x}$ — вектор с компонентами x и y, где $y = ct$, и пусть $\mathscr{C}$ — периметр прямоугольника, рассматриваемый как замкнутая кривая. Покажите, что если $\mathbf{u}$ — строгое решение рассмотренной выше задачи, то

$$\oint\limits_{\mathscr{C}} \mathbf{u}\cdot d\mathbf{x} = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathscr{C}} \mathbf{w}\cdot d\mathbf{x} = 0, \tag{16.3.9}$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.$$

Покажите, что для строгого решения требование, чтобы выполнялись условия (16.3.9) для периметров $\mathscr{C}$ всех прямоугольников, эквивалентно требованию, чтобы удовлетворялись дифференциальные уравнения. Используя неравенство Шварца для распределений из L^2, покажите, что уравнения (16.3.9) справедливы и для обобщенных решений.

Если уравнения (16.3.9) интерпретируются как описание колебаний воздуха в трубе, то величина $\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{2}\int(|u|^2+|v|^2)\,dx$ выражает полную энергию колебательного движения при соответствующем выборе единиц. Для строгого решения u и $\partial u/\partial x$ при данном t принадлежат L^2, поэтому $u(x, t)\to 0$ при $x\to\pm\infty$, согласно § 5.6. Поэтому, используя дифференциальные уравнения и интегрирование по частям по x, получаем, что

$$d\|\mathbf{u}\|^2/dt = 0,$$

откуда следует, что $\|\mathbf{u}(t)\|^2 = \|\mathbf{u}(0)\|^2$, а не просто $\leqslant\|\mathbf{u}(0)\|^2$; следовательно, энергия сохраняется для строгих решений, а тем самым и для обобщенных решений.

Покажем теперь, что корректность постановки задачи может зависеть от выбора нормы. Имеется много способов сведения уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка. Вместо (16.3.2) можно написать

$$\frac{\partial u}{\partial t} = w, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{16.3.10}$$

В банаховом пространстве с нормой

$$\|\mathbf{u}\| = \sup_x \max\{|u(x)|,\ |w(x)|\} \tag{16.3.11}$$

задача поставлена *некорректно*, в чем можно убедиться при рассмотрении строгого решения

$$u = \cos Kx \cos cKt, \quad w = -cK\cos Kx \sin cKt,$$

для которого

$$\|\mathbf{u}(t)\|/\|\mathbf{u}(0)\| = \max\{|\cos cKt|,\ cK|\sin cKt|\}.$$

Но это отношение при любом $t>0$ можно сделать сколь угодно большим при подходящем выборе K. Это означает, что $E_0(t)$ не является ограниченным оператором. Знание физики помогает исключить формулировки подобного рода, потому что u и w имеют разные размерности, поэтому норма (16.3.11) оказывается несостоятельной при проверке размерности.

Во всех случаях, когда прямая задача корректно поставлена, таковой же оказывается обратная задача, поскольку система (16.3.2) инвариантна по отношению к подстановкам $-t\to t$, $u\to u$, $-v\to v$.

Упражнение

2. Выясните, является ли рассматриваемая задача с начальными данными корректно поставленной относительно следующих норм (u, v, w — это величины, входящие в уравнения (16.3.2) и (16.3.10)). В каждом случае в качестве области

определения $D(A)$ можно взять либо C_0^∞, либо множество всех $\mathbf{u}\in \boldsymbol{B}$, для которых $\tilde{A}\mathbf{u}\in \boldsymbol{B}$.

1) $\|\mathbf{u}\|=\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(|u(x)|^2+|w(x)|^2)\,dx\right)^{1/2}$;

2) $\|\mathbf{u}\|=\sup\limits_x(|u(x)|+|v(x)|)$;

3) $\|\mathbf{u}\|=\sup\limits_x(|u(x)|+|w(x)|)$.

Предположим теперь, что при $x=a$ и $x=b$ выполнено граничное условие $u=0$:

$$u(a, t)=u(b, t)=0 \quad (t\geqslant 0) \tag{16.3.12}$$

и что начальные данные (16.3.2) заданы только на интервале (a, b). Если колебания интерпретируются как звуковые волны в трубе, а u и v — величины, пропорциональные скорости и давлению соответственно, то условия (16.3.12) означают, что концы трубы при $x=a$ и $x=b$ закрыты. Для строгого решения смысл этих условий очевиден, поскольку $u(x, t)$ — функция, фактически функция класса C^1.

Для обобщенного решения условия (16.3.12) не имеют непосредственного смысла, потому что u — всего лишь распределение; однако они могут быть проинтерпретированы как механизм отражения решения $u(x, t)$, определенного как распределение на $\mathbb{R}$ для каждого t с помощью условий

$$u(2a-x, t)=-u(x, t) \quad (\forall x, \forall t),$$
$$u(2b-x, t)=-u(x, t) \quad (\forall x, \forall t);$$

для v предполагаются аналогичные условия. Рассмотрение деталей этой интерпретации предоставляется читателю.

В многомерном случае волновая задача поставлена некорректно относительно максимум-нормы вследствие роста амплитуды при схождении сферической волны в точке, что и показывает следующее упражнение.

Упражнение

3. Пусть r — радиальная координата в трехмерном пространстве V^3, и пусть $\psi(r)$ — гладкая (класса C^2) функция с носителем в $[r_0, \infty)$, где $r_0>0$. Покажите, что для $t<r_0/c$ функция

$$u(r, t)=[(r+ct)/r]\,\psi(r+ct) \tag{16.3.13}$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{c^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{16.3.14}$$

и, следовательно, представляет приходящую волну. Предполагая, что $\psi(r)$ аппроксимирует функцию с разрывом в r_0 (см. рис. 16.1), покажите, что

$\sup_r |u(r, t)|$ может превосходить $\sup_r |\psi(r)|$ в любое число раз, следовательно, задача некорректно поставлена относительно максимум-нормы. [Можно было бы переопределить норму как $\|f\| = \sup_r |f(r)|$ и тогда было бы $\|u\| = \|\psi\|$ для

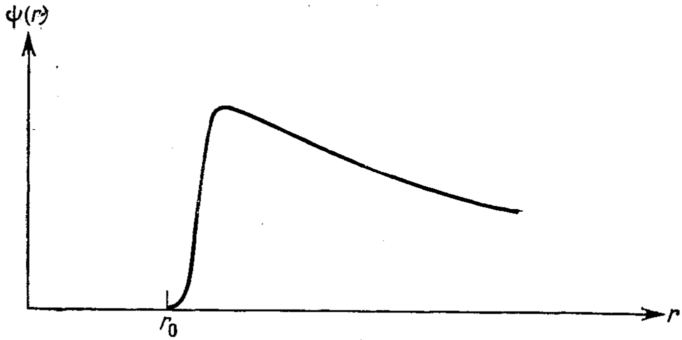

Рис. 16.1. Функция $\psi(r)$.

всех $t < r_0/c$, однако это удается сделать только для волн, сходящихся к началу координат, но не для волн, сходящихся к другим точкам V^3.]

В многомерном случае нет обобщения метода, основанного на уравнениях (16.3.1); однако в этом случае при решении задачи Коши или задачи в прямоугольной области можно использовать методы, основанные на разложении в ряд Фурье; при этом доказывается, что данная задача корректно поставлена относительно L^2-нормы, являющейся обобщением нормы (16.3.8).

16.4. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Пусть $\psi = \psi(\mathbf{x}, t) = \psi(x_1, \ldots, x_n, t)$ — комплекснозначная функция (*волновая функция*). Уравнением Шредингера является уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V\right] \psi, \tag{16.4.1}$$

где ∇^2 есть n-мерный лапласиан, $V = V(\mathbf{x})$ — заданная вещественная функция переменных $x_1, \ldots, x_n$ (*потенциал*), $\hbar$ и m — постоянная Планка, деленная на 2π, и масса электрона соответственно. Оператор $H = (-\hbar^2/(2m)) \nabla^2 + V$ называется квантовомеханическим *гамильтонианом* (*оператором Гамильтона*) *системы*. Для водородоподобного атома $n = 3$ и $V = -Ze^2/|\mathbf{x}|$; здесь Ze — заряд ядра, а $-e$ — заряд электрона. Для многоэлектронных атомов n равно утроенному числу электронов, а V описывает взаимодействие электронов не только с ядром, но и между собой. Для электрона в металлическом кристалле $n = 3$, $V(\mathbf{x})$ — периодическая по всем трем переменным функция.

Задача с начальными данными может быть проиллюстрирована примером свободной частицы в одномерном случае. Это задача нахождения комплекснозначной функции $\psi(x, t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geqslant 0, \tag{16.4.2}$$

со следующими начальными данными при $t=0$:

$$\psi(x, 0), \quad -\infty < x < \infty. \tag{16.4.3}$$

Сначала возьмем банахово пространство $\boldsymbol{B}$ непрерывных ограниченных функций переменной x с максимум-нормой

$$\|\psi\|=\sup_x|\psi(x)|. \tag{16.4.4}$$

При таком выборе нормы данная задача с начальными данными является *некорректно* поставленной, что можно увидеть, рассматривая строгое решение вида

$$\psi(x, t)=\sqrt{\frac{t_0}{t_0-t}}\exp\frac{-imx^2}{2\hbar(t_0-t)}, \quad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{16.4.5}$$

где t_0 — положительная постоянная. [Это решение моделирует фундаментальное решение (15.2.6) уравнения теплопроводности.] Поскольку $\|\psi(x, t)\|=[t_0/(t_0-t)]^{1/2}$, в то время как $\|\psi(x, 0)\|=1$, отсюда следует, что

$$\|E_0(t)\|\geqslant\sqrt{t_0/(t_0-t)}.$$

Поэтому для любого $t>0$ оператор $E_0(t)$ неограничен, потому что квадратный корень можно сделать сколь угодно большим, взяв t_0 достаточно близким к t, например положив $t_0=t+\varepsilon$. [Заметим, между прочим, что решение (16.4.5) квадратично интегрируемо, если постоянная t_0 задана с малой отрицательной мнимой частью.]

Известное значение квадратичной интегрируемости для квантовой механики наводит на мысль, что в данной задаче в качестве $\boldsymbol{B}$ следует брать пространство $L^2(\mathbb{R})$ (см. гл. 5) с нормой

$$\|\psi\|=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}. \tag{16.4.6}$$

В качестве $\boldsymbol{D}(A)$ можно взять множество таких распределений $\psi(x)\in L^2$, что $\psi'(x)$ и $\psi''(x)$ также принадлежат L^2. Тогда если $\psi=\psi(x, t)$ — строгое решение задачи (16.4.2), то

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\psi\|^2&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\overline{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial t}\right)dx=\\&=\frac{i\hbar}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\overline{\psi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\psi\frac{\partial^2\overline{\psi}}{\partial x^2}\right)dx=\\&=\frac{i\hbar}{2m}\left(\overline{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial x}\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty}=0.\end{aligned} \tag{16.4.7}$$

[В § 5.6 было доказано, что если ψ и ψ' принадлежат $L^2(\mathbb{R})$, то $\psi \rightrightarrows 0$ при $x \to \pm\infty$; если, кроме того, $\psi'' \in L^2$, то и $\psi' \to 0$ при $x \to \pm\infty$.] Это означает, что норма $\|\psi\|$ строгого решения при $t > 0$ та же, что и при $t = 0$, т. е. $\|E_0(t)\| = 1$. Отсюда следует также единственность строгого решения, потому что $\|\psi_1 - \psi_2\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\psi_1 = \psi_2$, так что если $\psi_1 = \psi_2$ при $t = 0$, то $\psi_1 = \psi_2$ при всех t.

Упражнение

1. Примените преобразование Фурье (по x) к уравнению (16.4.2) и найдите явный вид соответствующего (16.4.5) строгого решения полученного уравнения.

Рассуждения, связанные с (16.4.7), невозможны при большей размерности, потому что $\psi(\mathbf{x})$ не обязана стремиться к нулю при $|\mathbf{x}| \to \infty$ даже в том случае, когда и ψ, и все ее производные первого порядка принадлежат L^2. Однако сам результат сохраняется: в § 16.8 будет показано, что если H — любой самосопряженный оператор, то (1) к оператору $-(i/\hbar) H$ можно применить теорему Хилле—Иосиды, и (2) если $d\psi/dt = -(i/\hbar) H\psi$, то $(d/dt)\|\psi\|^2 = 0$; следовательно, задача с начальными данными для уравнения Шредингера корректно поставлена относительно L^2-нормы. Это очень общий результат: оператор H может быть гамильтонианом системы, состоящей из любого числа частиц, на которые действуют любые внутренние и внешние силы, предполагается только, что H самосопряжен. Исследование самосопряженности различных гамильтонианов Шредингера и Дирака было проведено в гл. 10 и 11.

Для многоэлектронного атома из принципа исключения Паули следует одно важное вспомогательное условие. Его полное изложение потребовало бы введения электронных спинов, однако пояснить его можно следующим образом. Пусть $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)$ — волновая функция двухэлектронного атома, где теперь $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — трехмерные векторы. В этом случае используется гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}^6)$. Иногда требуется, чтобы волновая функция была симметрической относительно перестановки двух электронов, т. е. $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t)$, а иногда необходимо, чтобы она была антисимметрической: $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = -\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t)$. Для учета этих требований вводятся два подпространства L^2_+ и L^2_- пространства $L^2(\mathbb{R}^6)$, состоящие из симметрических и антисимметрических функций из $L^2(\mathbb{R}^6)$ соответственно. Гамильтониан H многоэлектронного атома всегда инвариантен относительно перестановок двух электронов, так что если $\psi \in L^2_+$ (или L^2_-), то и $H\psi \in L^2_+$ (или L^2_-). Поэтому если $\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)$ — произвольное решение уравнения Шредингера, то симметрическая функция

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) + \psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t)$$

и антисимметрическая функция

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t)-\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t)$$

являются решениями того же самого уравнения в подпространствах L^2_+ и L^2_- соответственно. Если ограничиваться рассмотрением того или иного подпространства, которые, очевидно, замкнуты и поэтому являются банаховыми пространствами со всеми их свойствами, то вспомогательное условие выполняется автоматически. На подходящей области определения гамильтониан самосопряжен на каждом из этих подпространств, следовательно, по теореме Хилле—Иосиды задача с начальными данными снова поставлена корректно.

16.5. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ВАКУУМЕ

В этом параграфе демонстрируется использование второго определения самосопряженного оператора, данного в § 8.6. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=-c\nabla\times\mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=c\nabla\times\mathbf{E}, \tag{16.5.1}$$

где векторные поля $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют также вспомогательным условиям

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \quad \text{и} \quad \nabla\cdot\mathbf{H}=0 \tag{16.5.2}$$

и начальному условию

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) \quad \text{и} \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, 0) \quad \text{заданы.} \tag{16.5.3}$$

[Можно рассмотреть несколько более общую задачу об электромагнитном поле. Однако если есть токи и заряды, на движение которых влияют эти поля, или имеют место ферромагнитные эффекты, то уравнения оказываются нелинейными.]

Уместным для данной задачи банаховым пространством является подпространство $\boldsymbol{H}_0$ гильбертова пространства $\boldsymbol{H}$, элементами u которого служат пары векторных полей в $\mathbb{R}^3$ с евклидовой нормой:

$$u=\begin{bmatrix}\mathbf{E}(\mathbf{x})\\ \mathbf{H}(\mathbf{x})\end{bmatrix}, \tag{16.5.4}$$

$$\|u\|=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^3}(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{H}|^2)\,d^3\mathbf{x}\right)^{1/2}, \tag{16.5.5}$$

где

$$|\mathbf{E}|=(|E_x|^2+|E_y|^2+|E_z|^2)^{1/2}, \tag{16,5.6}$$

а величина $|\mathbf{H}|$ аналогична. Тогда

$$\boldsymbol{H} = \{u\colon \|u\| < \infty\}, \tag{16.5.7}$$

а скалярное произведение в $\boldsymbol{H}$ имеет вид

$$(u_1, u_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\overline{\mathbf{E}}_1 \cdot \mathbf{E}_2 + \overline{\mathbf{H}}_1 \cdot \mathbf{H}_2)\, d^3\mathbf{x}.$$

Пространство $\boldsymbol{H}$ представляет собой декартово произведение шести пространств вида

$$\left\{E_x(\mathbf{x})\colon \int\limits_{\mathbb{R}^3} |E_x|^2\, d^3\mathbf{x} < \infty\right\},$$

т. е. пространств типа $L^2(\mathbb{R}^3)$; поэтому можно написать

$$\boldsymbol{H} = (L^2(\mathbb{R}^3))^6,$$

имея в виду, что квадрат нормы в декартовом произведении равен сумме квадратов норм шести перемножаемых пространств.

Подпространство $\boldsymbol{H}_0$ определяется так:

$$\boldsymbol{H}_0 = \{u \in \boldsymbol{H}\colon\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0,\quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0\}. \tag{16.5.8}$$

Ясно, что это линейное многообразие в $\boldsymbol{H}$; сейчас мы докажем, что оно замкнуто, следовательно, является подпространством, т. е. гильбертовым пространством со всеми его свойствами. Компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ являются распределениями из L^2, а производные в (16.5.8) берутся в смысле теории распределений. Итак, $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ в том и только в том случае, когда $\int \overline{\varphi} \nabla \cdot \mathbf{E}\, d^3\mathbf{x} = 0$ для любой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, тогда как $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ тогда и только тогда, когда для любой пробной функции ψ $\int \overline{\psi} \nabla \cdot \mathbf{H}\, d^3\mathbf{x} = 0$. По определению производной распределения это означает, что элемент

$$u = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

ортогонален всем элементам из $\boldsymbol{H}$ вида

$$\begin{bmatrix} \nabla\varphi \\ \nabla\psi \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $\boldsymbol{H}_0$ является ортогональным дополнением множества всех элементов такого вида. Ортогональное дополнение всегда является замкнутым линейным многообразием (см. гл. 1), поэтому $\boldsymbol{H}_0$ замкнуто.

Для того чтобы представить (16.5.1) в виде $\partial u/\partial t = Au$, оператор A определяется сначала на $\boldsymbol{H}$ следующим образом: формально определим оператор A_0 как

$$A_0 u = \begin{bmatrix} -c\nabla \times \mathbf{H} \\ c\nabla \times \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c\nabla\times \\ c\nabla\times & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \tag{16.5.9}$$

(входящие в это равенство величины как распределения вполне определены); затем возьмем

$$\boldsymbol{D}(A)=\{u\in\boldsymbol{H}\colon\ A_0u\in\boldsymbol{H}\};\quad \text{для } u\in\boldsymbol{D}(A)\quad Au=A_0u. \tag{16.5.10}$$

Элемент Au всегда принадлежит $\boldsymbol{H}_0$, потому что дивергенция вихря равна нулю; таким образом, A переводит $\boldsymbol{H}_0$ в себя. Мы получаем ограничение A на $\boldsymbol{H}_0$, которое также будет обозначаться через A и которое оказывается подходящим для рассматриваемой задачи с начальными данными. Далее будет доказана следующая теорема.

Теорема. *A — симметрический оператор, который определен на $\boldsymbol{H}_0$. Резольвентное множество $\rho(A)$ содержит верхнюю и нижнюю полуплоскости; отсюда следует, что A самосопряжен и поэтому в силу теоремы Хилле—Иосиды рассматриваемая задача с начальными данными корректно поставлена.*

Доказательства этих утверждений кажутся почти тривиальными после применения преобразования Фурье. Определим

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{k},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\,e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,d^3\mathbf{x}$$

и аналогично $\hat{\mathbf{H}}$. Отображение

$$\begin{bmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{E}}\\ \hat{\mathbf{H}}\end{bmatrix}$$

является изоморфизмом $\boldsymbol{H}$ на гильбертово пространство $\hat{\boldsymbol{H}}$, которое определяется так же, как и $\boldsymbol{H}$, и лишь над $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ставятся крышки. Подпространство $\boldsymbol{H}_0$ отображается при этом на подпространство

$$\hat{\boldsymbol{H}}_0=\{\hat{u}\in\hat{\boldsymbol{H}}\colon\ \mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{E}}=0,\ \mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{H}}=0\}. \tag{16.5.11}$$

[$\hat{\boldsymbol{H}}_0$ — ортогональное дополнение множества всех векторов вида

$$\begin{bmatrix}\mathbf{k}\varphi\\ \mathbf{k}\psi\end{bmatrix},$$

что является другим доказательством замкнутости $\boldsymbol{H}_0$ и $\hat{\boldsymbol{H}}_0$.] После преобразования Фурье оператор A задается равенством

$$\hat{A}\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{E}}\\ \hat{\mathbf{H}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-c\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{H}}\\ c\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{E}}\end{bmatrix}, \tag{16.5.12}$$

а его область определения состоит из всех тех векторов из $\hat{\boldsymbol{H}}_0$, для которых правая часть (16.5.12) принадлежит $\hat{\boldsymbol{H}}_0$. Из векторных тождеств

$$-\mathbf{u}_1\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{v}_2)=-(\mathbf{u}_1\times\mathbf{k})\cdot\mathbf{v}_2=(\mathbf{k}\times\mathbf{u}_1)\cdot\mathbf{v}_2,$$
$$\mathbf{u}_2\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{v}_1)=(\mathbf{u}_2\times\mathbf{k})\cdot\mathbf{v}_1=-(\mathbf{k}\times\mathbf{u}_2)\cdot\mathbf{v}_1$$

следует, что $\hat{A}$ симметричен, т. е. что

$$(u,\hat{A}v)=(\hat{A}u,v)\qquad \forall u,v\in\boldsymbol{D}(\hat{A}).$$

Чтобы исследовать резольвенту и резольвентное множество, возьмем произвольный элемент

$$\hat{v}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{v}}_1\\ \hat{\mathbf{v}}_2\end{bmatrix}$$

пространства $\hat{H}_0$ ($\hat{\mathbf{v}}_1$ и $\hat{\mathbf{v}}_2$—трехмерные векторные поля) и рассмотрим уравнение

$$(\hat{A}-\lambda)\,\hat{u}=\hat{v}, \tag{16.5.13}$$

где λ—произвольное невещественное число. Если это уравнение имеет единственное решение $\hat{u}$ для любого $\hat{v}$ и $\|\hat{u}\|\leqslant K\|\hat{v}\|$ для некоторого $K=K(\lambda)$, то λ принадлежит резольвентному множеству $\rho(\hat{A})=\rho(A)$, а $\hat{u}=\hat{R}_\lambda\hat{v}$, где $\hat{R}_\lambda$—резольвента: $\hat{R}_\lambda=(\hat{A}-\lambda)^{-1}$. В развернутом виде (16.5.13) записывается так (крышки всюду опущены):

$$\begin{aligned}-c\mathbf{k}\times\mathbf{u}_2-\lambda\mathbf{u}_1&=\mathbf{v}_1,\\ c\mathbf{k}\times\mathbf{u}_1-\lambda\mathbf{u}_2&=\mathbf{v}_2.\end{aligned} \tag{16.5.14}$$

Эти линейные уравнения имеют единственное решение

$$\mathbf{u}_1=\frac{\lambda\mathbf{v}_1-c\mathbf{k}\times\mathbf{v}_2}{c^2k^2-\lambda^2},\quad \mathbf{u}_2=\frac{\lambda\mathbf{v}_2+c\mathbf{k}\times\mathbf{v}_1}{c^2k^2-\lambda^2}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу (16.5.14) из равенств $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1=\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2=0$ следуют равенства $\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_1=\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_2=0$. Знаменатель никогда не обращается в нуль, потому что $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Шесть компонент вектора u являются линейными комбинациями шести компонент вектора v с коэффициентами, являющимися ограниченными функциями переменной k при любом невещественном λ. Теперь нетрудно показать, что существует такое $K=K(\lambda)$, что $\|u\|\leqslant K\|v\|$, т. е. $\lambda\in\rho(A)$, что и требовалось доказать.

16.6. ПОЛУГРУППЫ

Напомним, что если A—оператор в конечномерном пространстве (т. е. A соответствует квадратной матрице), то решением задачи с начальными данными является функция $u(t)=e^{tA}u(0)$, где для любой матрицы M экспоненциальная функция e^M определяется как степенной ряд. Если A неограничен, то в бесконечномерном случае функцию e^{tA} уже нельзя определить так просто; тем не менее мы сейчас покажем, что разрешающий оператор $E(t)$ обладает многими свойствами экспоненты e^{tA}.

Если $u(t)$—любое строгое решение дифференциального уравнения (16.1.1), то функция $\tilde{u}(t)\overset{\text{def}}{=}u(t+s)$, где s—неотрицательная постоянная, является строгим решением с начальным элементом $u(s)$, и поэтому $\tilde{u}(t)=E(t)\,u(s)$; однако $u(s)=E(s)\,u(0)$ и $u(t+s)=E(t+s)\,u(0)$, следовательно,

$$E(t+s)\,u(0)=E(t)\,E(s)\,u(0)\quad \forall u(0)\in\boldsymbol{U}.$$

Так как $\boldsymbol{U}$ плотно в $\boldsymbol{B}$, а операторы $E(t)$ ограничены, отсюда следует, что

$$E(t+s)=E(t)\,E(s)\quad (t,\ s\geqslant 0). \tag{16.6.1}$$

[Попутно эти рассуждения показывают, что U—не просто множество *начальных* данных строгих решений, а множество *всех* значений, допускаемых строгими решениями.]

Набор объектов $a, b, c, \ldots$, для которых определена бинарная операция $a \circ b$ со свойствами ассоциативности и т. д., называется *полугруппой*; она отличается от группы только тем, что существование обратных элементов не предполагается. Набор операторов $\{E(t)\colon t \geqslant 0\}$ является однопараметрической полугруппой операторов. Если задача с начальными данными обратима по времени, как задача о волновом движении, то набор $\{E(t)\colon$ все вещественные $t\}$ образует однопараметрическую *группу* линейных операторов. Для операторов операцией, записываемой как произведение в уравнении (16.6.1), является обычная композиция преобразований, поэтому для нее ассоциативность автоматически выполняется: $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$.

Полугруппа $\{E(t)\colon t \geqslant 0\}$ разрешающих операторов корректно поставленной задачи с начальными данными обладает некоторыми особыми свойствами.

Во-первых, она коммутативна, так как из равенства (16.6.1) следует, что $E(t)E(s) = E(s)E(t)$.

Во-вторых, она имеет единичный элемент $E(0) = I$, потому что $E(0)u = u$ для всех u.

В-третьих, эта полугруппа сильно непрерывна. Пусть $u(t)$— произвольное строгое решение дифференциального уравнения (16.1.1). Для любого $\varepsilon > 0$, согласно (16.1.4),

$$\left\| \frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t} - Au(t) \right\| < \varepsilon,$$

если только Δt достаточно мало. Поэтому в силу неравенства треугольника

$$\|u(t+\Delta t)-u(t)\| \leqslant (\|Au(t)\|+\varepsilon)\Delta t,$$

т. е. $u(t+\Delta t) \to u(t)$ при $\Delta t \to 0$ в смысле сходимости в $\boldsymbol{B}$. Иначе говоря, для любого $u \in \boldsymbol{U}$ $E(t+\Delta t)u \to E(t)u$. Так как $\boldsymbol{U}$ плотно в $\boldsymbol{B}$, а операторы $E(t)$ ограничены, то доказательство того, что

$$E(t+\Delta t)u \to E(t)u \quad \text{для любого } u \in \boldsymbol{B} \quad \text{при } \Delta t \to 0 \quad (t \geqslant 0), \tag{16.6.2}$$

является простым упражнением на использование неравенства треугольника. [Для $t=0$ предполагается, что $\Delta t \to 0$ только по положительным значениям, поскольку $E(t)$, вообще говоря, не определены для $t < 0$.] Свойство (16.6.2) называется *сильной непрерывностью* семейства $E(t)$ операторов. Заметим, что эта полугруппа, вообще говоря, *не является* непрерывной по норме, т. е. $\|E(t+\Delta t)-E(t)\|$ обычно не стремится к нулю при $\Delta t \to 0$.

В-четвертых, $E(t)$ равномерно ограничена на любом конечном интервале: для заданного интервала $[0, t_0]$ найдется такая постоянная K, что $\| E(t) \| \leq K$ для всех $t \in [0, t_0]$, потому что $E_0(t)$ равномерно ограничены в силу (16.2.1), а $E(t)$ имеет ту же норму, что и $E_0(t)$, согласно теореме о расширении.

В общем случае разные операторы A_1 и A_2 могут порождать одну и ту же полугруппу $E(t)$ (например, A_2 может быть расширением A_1); в этом случае соответствующие задачи с начальными данными тождественны, за исключением чисто терминологического отличия, состоящего в том, что некоторые строгие решения одной задачи оказываются только обобщенными решениями другой.

В следующем параграфе будет показано, что любое семейство $E(t)$, обладающее этими свойствами, является разрешающим оператором некоторой корректно поставленной задачи с начальными данными.

Общую теорию полугрупп см. в книге Хилле и Филлипса [1957].

16.7. ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЙ ГЕНЕРАТОР ПОЛУГРУППЫ

Рассмотрим теперь обращение разультата предыдущего параграфа. Взяв любую полугруппу $E(t)$ с описанными там свойствами, мы определим такой оператор A', называемый *инфинитезимальным генератором* полугруппы $E(t)$, что задача с начальными данными

$$du(t)/dt = A'u(t), \quad u(0) \text{ задан}, \tag{16.7.1}$$

окажется корректно поставленной, а $E(t)$ будет ее разрешающим оператором. Оператор A' определяется как «производная» от $E(t)$ при $t=0$ в следующем смысле: область определения $\boldsymbol{D}(A')$ определяется как множество всех $u \in \boldsymbol{B}$, таких, что $(1/\Delta t)[E(\Delta t) - I]u$ имеет предел в $\boldsymbol{B}$ при $\Delta t \to 0$, само же значение $A'u$ определяется как этот предел, т. е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} (1/\Delta t)[E(\Delta t) - I]u = A'u. \tag{16.7.2}$$

Очевидно, что $\boldsymbol{D}(A')$ — линейное подпространство в $\boldsymbol{B}$ и A' — линейный оператор.

Теорема 1. *Если $E(t)$ обладает свойствами, описанными в предыдущем параграфе, т. е. если $E(t)$ является ограниченной сильно непрерывной коммутативной полугруппой с единицей $E(0) = I$, то задача с начальными данными* (16.7.1) *с оператором A', определяемым формулой* (16.7.2), *корректно поставлена. Множество $\boldsymbol{U}'$ возможных начальных элементов $u(0)$ строгих решений совпадает с $\boldsymbol{D}(A')$, а строгие решения имеют вид $u(t) = E(t)u(0)$. Кроме того, A' — замкнутый оператор.*

Доказательство. (а) Пусть u_0 — любой элемент описанной выше области определения $\boldsymbol{D}(A')$. Так как $E(t)$ ограничен и коммутирует с $E(\Delta t)$, величина

$$E(t)(1/\Delta t)[E(\Delta t - I]u_0 \quad \text{или} \quad (1/\Delta t)[E(\Delta t - I]E(t)u_0$$

при $\Delta t \longrightarrow 0$ стремится к пределу, равному $E(t)A'u_0$. Поэтому $E(t)u_0 \in \boldsymbol{D}(A')$, а $A'E(t)u_0 = E(t)A'u_0$, следовательно, функция $u(t) = E(t)u_0$ такова, что

$$\left\| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - A'u(t) \right\| \longrightarrow 0 \quad \text{при } \Delta t \longrightarrow 0,$$

т. е. является строгим решением задачи (16.7.1). (б) Чтобы показать, что это решение единственно, возьмем *произвольное* решение $u(t)$, таксе, что $u(0) = u_0$, а затем покажем, что $u(t) = E(t)u_0$. Покажем, что для любого $t > 0$ функция $g(s) = E(t-s)u(s)$, определенная для $s \in [0, t]$, постоянна, т. е. не зависит от s. Прежде всего

$$\frac{d}{ds}g(s)\Big|_{s=s_0} = \frac{d}{ds}E(t-s)u(s_0)\Big|_{s=s_0} + \frac{d}{ds}E(t-s_0)u(s)\Big|_{s=s_0}.$$

В правой части первое слагаемое равно

$$-\frac{d}{dt}E(t-s)u(s_0)\Big|_{s=s_0} = -A'E(t-s_0)u(s_0)$$

(потому что $E(t-s)u(s_0)$ удовлетворяет (16.7.1) согласно пункту (а)), а второе слагаемое равно

$$E(t-s_0)\frac{d}{ds}u(s)\Big|_{s=s_0} = E(t-s_0)A'u(s_0)$$

(потому что $E(\cdot)$ ограничен и предполагается, что $u(t)$ является решением задачи (16.7.1)). Как было указано выше, $E(\cdot)$ и A' на элементах $\boldsymbol{D}(A')$ коммутируют, поэтому $dg(s)/ds = 0$, т. е. $g(s)$ — постоянная; следовательно, $g(t) = g(0)$, т. е. $u(t) = E(t)u(0)$, что и требовалось доказать. Теперь покажем, что инфинитезимальный генератор A' является замкнутым оператором. Если $w(s)$ — любое непрерывное однопараметрическое семейство элементов из $\boldsymbol{B}$, то интеграл $\int_a^b w(s)\,ds$ определяется (он также является элементом $\boldsymbol{B}$) как предел сумм Римана

$$\sum_j w(s_j')(s_{j+1} - s_j),$$

где $\ldots, s_j, s_{j+1}, \ldots$ — разбиение интервала $[a, b]$, а $s_j' \in [s_j, s_{j+1}]$ для каждого j, т. е. точно так же, как и для обычной непрерывной функции. Доказательство того, что этот предел является единственным и что интеграл обладает всеми ожидаемыми свойствами, такими, как

$$\frac{d}{db}\int_a^b w(s)\,ds = w(b), \tag{16.7.3}$$

$$\left\| \int_a^b w(s)\,ds \right\| \leqslant \int_a^b \|w(s)\|\,ds, \tag{16.7.4}$$

оставляется читателю в качестве упражнения на использование неравенства треугольника.

Если $u_0 \in \boldsymbol{D}(A')$ и $u(t)=E(t)u_0$ — соответствующее строгое решение, то ясно, что

$$u(t)-u_0=\int_0^t A'u(s)\,ds, \qquad (16.7.5)$$

т. е.

$$[E(t)-I]\,u_0=\int_0^t A'E(s)\,u_0\,ds. \qquad (16.7.6)$$

[*Замечание.* Функция $A'u(s)=E(s)A'u_0$ непрерывна.] Предположим теперь, что $\{v_n\}$ — последовательность элементов из $\boldsymbol{D}(A')$, таких, что $v_n \longrightarrow u$ и $A'v_n \longrightarrow w$. Нужно показать, что $u \in \boldsymbol{D}(A')$ и $w=A'u$. Итак,

$$E(\delta)\,u-u=\lim_{n\to\infty}[E(\delta)\,v_n-v_n]=\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta A'E(s)\,v_n\,ds=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta E(s)\,A'v_n\,ds=\int_0^\delta E(s)\lim_{n\to\infty}A'v_n\,ds.$$

[Сходимость равномерна по s, потому что $E(s)$ равномерно ограничены по s.] Поэтому, поскольку $A'v_n \longrightarrow w$,

$$\frac{E(\delta)\,u-u}{\delta}=\frac{1}{\delta}\int_0^\delta E(s)\,w\,ds,$$

а это выражение при $\delta \longrightarrow 0$ сходится к $E(0)\,w=w$ в силу непрерывности подынтегральной функции. Таким образом, из определений A' и $\boldsymbol{D}(A')$, данных в начале параграфа, следует, что $u \in \boldsymbol{D}(A')$ и $A'u=w$, т. е. A' — замкнутый оператор.

Если в качестве A взять оператор A', то множество строгих решений задачи с начальными данными, у которой $E(t)$ — разрешающий оператор, становится наибольшим. Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если $u(t)$ — любое строгое решение корректно поставленной задачи с начальными данными* (16.1.1), *то $u(0) \in \boldsymbol{D}(A')$, где A' — инфинитезимальный генератор разрешающего оператора $E(t)$, и, следовательно, $u(t)$ является строгим решением также и уравнения*

$$du(t)/dt=A'u(t).$$

Доказательство. Условие (16.1.4) с заменой A на A' следует из (16.7.2).

16.8. ТЕОРЕМА ХИЛЛЕ — ИОСИДЫ

В случае когда A — ограниченный оператор, разрешающий оператор $E(t)$ получается по формуле

$$E(t)=e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}(1/k!)\,(tA)^k; \qquad (16.8.1)$$

этот ряд сходится по норме для всех t, т. е.

$$\left\| E(t) - \sum_{k=0}^{n} (1/k!)(tA)^k \right\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \qquad (16.8.2)$$

Если A неограничен, как в большинстве практических ситуаций, то ряд (16.8.1) может вообще не сходиться, а если это так, то это в лучшем случае приводит к некоторому ограничению $E(t)$ на достаточно малую область определения, такую, что все операторы A^k $(k=1, 2, \ldots)$ на ней определены.

Упражнение

1. Докажите (16.8.2) для ограниченного оператора и покажите, что

$$de^{tA}/dt = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Часто нелегко решить, является ли вообще данный оператор инфинитезимальным генератором какой-либо полугруппы. Обычно это помогает сделать следующая теорема. (Напоминаем, что, согласно предыдущему параграфу, оператор A всегда можно считать замкнутым.)

Теорема (Хилле—Иосида). *Пусть A — замкнутый линейный оператор с плотной в **B** областью определения. Если для всех $\lambda > \alpha$ оператор $(A-\lambda)^{-1}$ существует, ограничен и имеет плотную в **B** область определения и если*

$$(\lambda-\alpha)\|(A-\lambda)^{-1}\| \leqslant 1 \quad \text{для всех } \lambda > \alpha \qquad (16.8.3)$$

(т. е. если резольвента $R_\lambda(A)$ существует для $\lambda > \alpha$ и ее норма ограничена числом $1/(\lambda-\alpha)$), то A является инфинитезимальным генератором некоторой полугруппы $E(t)$, которая сильно непрерывна при $t \geqslant 0$ и такова, что $E(0) = I$ и $\|E(t)\| \leqslant e^{\alpha t}$ при $t \geqslant 0$.

Доказательство см. в книге Хилле и Филлипса [1957].

Если предположения теоремы выполняются, то ясно, что A определяет корректно поставленную задачу с начальными данными.

В следующем параграфе мы применим эту теорему к задаче о переносе нейтронов, а пока укажем два ее элементарных применения. (1) Если A ограничен, то $\|(A-\lambda)^{-1}\| \leqslant (\lambda - \|A\|)^{-1}$ для всех $\lambda > \|A\|$; следовательно, задача с начальными данными корректно поставлена и $\|E(t)\| \leqslant \exp\{t\|A\|\}$ в соответствии с (16.8.1). (2) Пусть оператор H самосопряжен и $A = -iH$. Тогда $(A-\lambda)^{-1} = i(H-i\lambda)^{-1}$ и условия теоремы Хилле—Иосиды следуют из известных свойств самосопряженных операторов—см. § 8.3. В этом случае полугруппа $E(t)$ обычно обозначается через e^{-iHt}. Применения теоремы к операторам Шредингера были приведены в § 16.4.

16.9. ПЕРЕНОС НЕЙТРОНОВ В СЛОЕ. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ХИЛЛЕ — ИОСИДЫ

В данном параграфе дается еще один пример вычисления резольвенты и ее использования. Рассмотрим перенос нейтронов в однородном слое материала, занимающего область $-a \leqslant x \leqslant a$, y, z произвольны. Предположим, что рассеяние является упругим и изотропным и что все нейтроны имеют одну и ту же скорость v. Пусть θ — угол между вектором скорости нейтронов и осью x, и пусть $\mu = \cos\theta$. Обозначим через $\Psi(x, \mu, t)$ плотность нейтронов (плотность числа частиц) в фазовом пространстве в точке x в направлении θ и в момент времени t; предполагается, что эта плотность не зависит от y и z и от угла φ по азимуту вокруг оси x. Уравнением эволюции этой системы является так называемое уравнение переноса нейтронов

$$\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} + \mu\frac{\partial}{\partial x} + \sigma\right)\Psi(x, \mu, t) = \sigma\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\Psi(x, \mu', t)\,d\mu' \qquad (16.9.1)$$

(см. Рихтмайер и Мортон [1967]); здесь σ — полное ядерное сечение, отнесенное к единице объема ($1/\sigma$ является величиной среднего свободного пробега), c — среднее число частиц, появляющихся после столкновения ($c = 1$ при чистом рассеянии, $c < 1$ для рассеяния с поглощением, $c > 1$ для размножающей среды).

Член $\sigma\Psi(x, \mu, t)$ в (16.9.1) можно исключить при помощи подстановки

$$\Psi(x, \mu, t) = \psi(x, \mu, t)\,e^{-t\sigma t}.$$

Если взять такие единицы длины и времени, что $\sigma = 1$, $v = 1$ (в этих единицах $2a$ равен толщине слоя в длинах среднего свободного пробега), то мы получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(x, \mu, t) = -\mu\frac{\partial}{\partial x}\psi(x, \mu, t) + \frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\psi(x, \mu', t)\,d\mu'. \qquad (16.9.2)$$

Это уравнение можно записать как

$$\partial\psi/\partial t = A\psi, \qquad (16.9.3)$$

где A — интегродифференциальный оператор в правой части уравнения (16.9.2) с подходящей областью определения в подходящем банаховом пространстве.

В первоначальной постановке задачи предполагалось, что (16.9.2) выполняется только на интервале $-a \leqslant x \leqslant a$, а область определения оператора A ограничивается функциями, удовлетворяющими граничным условиям

$$\psi(a, \mu, t) = 0 \quad \text{при } \mu < 0,$$
$$\psi(-a, \mu, t) = 0 \quad \text{при } \mu > 0,$$

которые утверждают, что извне нейтроны в слой не попадают. В более удобной формулировке задачи (К. О. Фридрихс, не опубликовано), принятой здесь, предполагается, что уравнение (16.9.2) выполняется для всех x, однако постоянная c заменяется функцией

$$c(x)=\begin{cases} c & \text{при } -a\leqslant x\leqslant a, \\ 0 & \text{при } |x|>a. \end{cases} \tag{16.9.4}$$

Это эквивалентно предположению, что область вне слоя заполнена абсолютно поглощающей средой, имеющей то же полное ядерное сечение σ, что и слой. Для всех задач, в которых начальное распределение нейтронов $\psi(x, \mu, 0)$ не содержит нейтронов, попадающих в слой извне, т. е. равно нулю для $x\mu<0$ и $|x|>a$, такая постановка задачи порождает в точности то же решение в слое, что и первоначальная, потому что любой нейтрон, вылетающий из слоя, обязательно поглотится при следующем столкновении и никогда не вернется в слой. При такой постановке не нужно никаких граничных условий.

Данный оператор A ни в каком подходящем гильбертовом пространстве не симметричен, поэтому при любом выборе области определения его нельзя сделать самосопряженным. Первый член в правой части (16.9.2) антисимметричен, а второй член симметричен; эти члены некоммутативны, следовательно, A нельзя сделать и нормальным оператором при любом выборе области определения. Спектр и другие свойства оператора A были исследованы Ленером и Уингом [1955, 1956] и Ленером [1962]. Точечный спектр этого оператора состоит из конечного числа положительных собственных значений, непрерывный спектр совпадает со всей мнимой осью, остальная же часть плоскости представляет собой резольвентное множество.

В этом параграфе оператор A будет рассматриваться в банаховом пространстве непрерывных функций с максимум-нормой, с которым легче работать, чем с гильбертовым пространством. Далее будет показано, что, когда область определения оператора A выбрана должным образом, условия теоремы Хилле — Иосиды выполняются, поэтому задача с начальными данными (16.9.3) корректно поставлена.

Пусть $\boldsymbol{B}$ — банахово пространство ограниченных непрерывных функций $f(x, \mu)$ (в общем случае комплекснозначных), определенных для всех вещественных x и всех $\mu\in[-1, 1]$, с нормой

$$\|f\|=\sup\{|f(x, \mu)|:\ x\in\mathbb{R},\ \mu\in[-1, 1]\}.$$

Область определения $\boldsymbol{D}(A)$ оператора A состоит из всех таких $f\in\boldsymbol{B}$, что $\partial f/\partial x\in\boldsymbol{B}$; тогда

$$(Af)(x, \mu)=-\mu\frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu)+\frac{c(x)}{2}\int_{-1}^{1} f(x, \mu')\,d\mu'. \tag{16.9.5}$$

Для того чтобы воспользоваться теоремой Хилле—Иосиды, нужно показать, что A — замкнутый оператор, а его резольвента $R_\lambda = (A-\lambda)^{-1}$ существует и ее норма ограничена числом $(\lambda-\alpha)^{-1}$ для всех вещественных λ, бо́льших некоторой постоянной α.

Доказательство замкнутости A основано на свойствах равномерной сходимости функций и предоставляется читателю в качестве упражнения (определение замкнутого оператора дано в § 7.6).

Для исследования резольвенты возьмем произвольный элемент g пространства $\boldsymbol{B}$ и произвольное комплексное число λ. Нужно решить уравнение

$$Af - \lambda f = g \tag{16.9.6}$$

относительно f, если это возможно, и найти постоянную $K = K(\lambda)$, такую, что $\|f\| \leqslant K\|g\|$ для всех $g \in \boldsymbol{B}$. Оказывается, достаточно рассмотреть положительные значения λ. Чтобы решить уравнение (16.9.6), положим

$$\xi(x) = \int_{-1}^{1} f(x, \mu)\,\mu; \tag{16.9.7}$$

тогда (16.9.6) примет вид

$$\left(\lambda + \mu\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, \mu) = \frac{c(x)}{2}\xi(x) - g(x, \mu). \tag{16.9.8}$$

Функция $\xi(x)$, конечно, неизвестна, однако для решения (16.9.6) мы сначала выразим решение $f(x, \mu)$ уравнения (16.9.8) через ξ и g. Если после этого $f(x, \mu)$ подставить в (16.9.7), то получится интегральное уравнение Фредгольма относительно $\xi(x)$. Решения (16.9.8) находятся элементарными методами и имеют следующий вид:

$$f(x, \mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{\lambda(x'-x)/\mu}\left[\frac{c(x')}{2}\xi(x') - g(x', \mu)\right]dx', & \mu > 0, \\ \dfrac{-1}{\mu}\displaystyle\int_{x}^{\infty} e^{\lambda(x'-x)/\mu}\left[\frac{c(x')}{2}\xi(x') - g(x', \mu)\right]dx', & \mu < 0. \end{cases} \tag{16.9.9}$$

Легко видеть, что $f(x, \mu)$ непрерывна как по μ, так и по x и что $f(x, 0)$ можно получить из любой строки формулы (16.9.9), устремив μ к нулю. Если в обоих интегралах выражения в квадратных скобках заменить их наибольшим значением $^1/_2 c\|\xi\| + \|g\|$, то, очевидно,

$$\|f\| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\frac{c}{2}\|\xi\| + \|g\|\right), \tag{16.9.10}$$

где под $\|\xi\|$ подразумевается $\sup|\xi(x)|$.

Теперь проинтегрируем найденную выше функцию $f(x, \mu)$ по μ от -1 до 1, чтобы получить $\xi(x)$, согласно (16.9.7). В результате получим

$$\xi(x)=\frac{c}{2}\int_{-a}^{a} E(\lambda|x'-x|)\,\xi(x')\,dx'+G_\lambda(x), \qquad (16.9.11)$$

где

$$G_\lambda(x)=\left[-\int_{-1}^{0}\frac{d\mu}{\mu}\int_{x}^{\infty}dx'+\int_{0}^{1}\frac{d\mu}{\mu}\int_{-\infty}^{x}dx'\right]e^{\lambda(x'-x)/\mu}g(x',\mu), \qquad (16.9.12)$$

а $E(\cdot)$ — интегральная показательная функция

$$E(z)=\int_{z}^{\infty}(e^{-w}/w)\,dw$$

(см. Абрамовиц и Стиган [1964]). Если в (16.9.12) заменить $g(x', \mu)$ на $\|g\|$, то интегрирование можно выполнить явно; оно дает $2/\lambda$, и поэтому

$$\|G_\lambda\|\leqslant(2/\lambda)\|g\|. \qquad (16.9.13)$$

Уравнение (16.9.11) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма с симметрическим ядром Гильберта—Шмидта. Оно имеет единственное решение ξ для любого G_λ, если только $2/c$ не является собственным значением входящего в него интегрального оператора. Покажем теперь, что так оно и есть в данном случае, в частности если λ достаточно велико. Функция $E(|w|)$ имеет логарифмическую особенность при $w=0$ и экспоненциально стремится к нулю при $w\to\infty$. Поэтому интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}E(|w|)\,dw$ конечен; кроме того, E положительна, следовательно,

$$\int_{-a}^{a}E(\lambda|x'-x|)\,dx'<\mathrm{const}/\lambda.$$

Поэтому норма первого слагаемого в правой части (16.9.11) может быть сделана меньше $^1/_2\|\xi\|$ для всех λ, бóльших некоторого λ_0, а в этом случае единственным решением однородного уравнения (где $G_\lambda=0$) является $\xi=0$, так что $2/c$ не может быть собственным значением. Вообще для $\lambda>\lambda_0$

$$\|\xi\|\leqslant{}^1/_2\|\xi\|+\|G_\lambda\|,$$

или

$$\|\xi\|\leqslant 2\|G_\lambda\|. \qquad (16.9.14)$$

Объединяя неравенства (16.9.10), (16.9.13) и (16.9.14), получаем

$$\|f\|\leqslant(1/\lambda)(2c/\lambda+1)\|g\| \quad \text{для всех } \lambda>\lambda_0.$$

Поскольку $f=R_\lambda g$, мы имеем

$$\|R_\lambda\| \leqslant (1/\lambda)(2c/\lambda+1),$$

а отсюда следует, что найдется такое число α, что

$$\|R_\lambda\| \leqslant 1/(\lambda-\alpha) \quad \text{для } \lambda>\alpha;$$

следовательно, здесь можно применить теорему Хилле—Иосиды и задача с начальными данными о переносе нейтронов в слое корректно поставлена.

16.10. НЕОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу с начальными данными

$$du(t)/dt - Au(t) = g(t), \tag{16.10.1}$$

$$u(0)=u_0, \tag{16.10.2}$$

где A — замкнутый линейный оператор, для которого соответствующая однородная задача ($g(t)\equiv 0$) корректно поставлена, и где u_0 и $g(t)$ заданы; $g(t)$ — однопараметрическое семейство элементов банахова пространства $\boldsymbol{B}$, иначе говоря, *кривая* в $\boldsymbol{B}$.

Рассмотрим первый пример. Пусть одномерная задача теплопроводности из § 15.2 дополнена источником тепла, распределенным вдоль стержня. Тогда правая часть $g(t)$ уравнения (16.10.1) представляет собой функцию от x и t — плотность источника.

Второй пример на первый взгляд может показаться задачей совершенно иного типа. Пусть уравнение теплопроводности однородно, однако граничные условия нулевой температуры на концах стержня заменяются условием, по которому на каждом конце стержня температура является заданной функцией от t, скажем $h_a(t)$ при $x=a$ и $h_b(t)$ при $x=b$. При помощи стандартного приема эта задача сводится к задаче типа первого примера. А именно, пусть $w(x, t)$ — любая гладкая функция, такая, что $w(a, t)=h_a(t)$ и $w(b, t)=h_b(t)$; положим

$$g(x, t) = -\frac{\partial w}{\partial t} + Aw = -\frac{\partial w}{\partial t} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Тогда функция $u(x, t) - w(x, t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям и неоднородному уравнению с частными производными. Такая редукция задачи существенна, если мы хотим рассматривать граничные условия как ограничения на область определения оператора A.

Часто член, представляющий источник, отражает взаимодействие между изучаемым процессом и некоторым другим процессом, одновременно происходящим в системе, как, например, в задаче совместного рассмотрения распространения звука и тепла, обсуждаемой в книге Рихтмайера и Мортона [1967], или в задачах электромагнетизма, где плотности заряда и токи служат источником электромагнитного поля и в свою очередь подвергаются влиянию этого поля. В таких случаях эти несколько процессов следует рассматривать как составляющие большей (часто нелинейной) задачи. Тем не менее иногда удобно иметь вычислительный алгоритм, доказательство существования решения и т. д. для одного процесса, в котором источники предполагаются заданными.

Задача называется *корректно поставленной*, если она имеет единственное решение при любом разумном выборе u_0 и $g(t)$ и если решение в некотором смысле непрерывно зависит от них. Для уточнения этого определения нам потребуется еще одно банахово пространство $\boldsymbol{B}_1$ с нормой $\|\cdot\|_1$, элементами которого являются функции $w(t)$ со значениями в $\boldsymbol{B}$, определенные на интервале $[0, t_0]$; мы полагаем

$$\boldsymbol{B}_1(0, t_0)=\{w(\cdot)\text{—любая кривая в } \boldsymbol{B}\colon w(t) \text{ непрерывна на } [0, t_0]\},$$
$$\|w(\cdot)\|_1=\max\{\|w(t)\|\colon t\in[0, t_0]\}.$$

Очевидно, что вследствие единственности решений однородной задачи любое решение неоднородной задачи также будет единственным. Действительно, разность двух решений для заданных u_0 и $g(\cdot)$ является решением однородной задачи с нулевыми начальными данными и поэтому должна быть равной нулю для всех t. Ниже мы покажем, что строгие решения существуют для множеств u_0 и $g(\cdot)$, плотных соответственно в $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}_1$; в приведенной ниже формуле (16.10.3) строгое решение выражается в явном виде через разрешающий оператор однородной задачи. Таким образом, остается показать, что это решение непрерывно зависит от u_0 и $g(\cdot)$.

Пусть $\hat{u}_0$ и $\tilde{u}_0$—два почти равных начальных элемента (почти тождественные начальные состояния физической системы), $\hat{g}(t)$ и $\tilde{g}(t)$—две почти совпадающие кривые в $\boldsymbol{B}$, а $\hat{u}(t)$ и $\tilde{u}(t)$—получающиеся строгие решения задачи (16.10.1), (16.10.2); тогда указанная задача называется *корректно поставленной*, если $\|\tilde{u}(\cdot)-\hat{u}(\cdot)\|_1$ меньше наперед заданного $\varepsilon>0$ при условии, что $\|\tilde{u}_0-\hat{u}_0\|$ и $\|\tilde{g}(\cdot)-\hat{g}(\cdot)\|_1$ меньше некоторого $\delta>0$. Изменение начального элемента от $\hat{u}_0$ до $\tilde{u}_0$ меняет решение на величину $E(t)(\tilde{u}_0-\hat{u}_0)$, о которой известно, что она мала, если мала величина $\|\tilde{u}_0-\hat{u}_0\|$, потому что однородная задача корректно поставлена. Поэтому достаточно рассмотреть случай $\tilde{u}_0-\hat{u}_0=0$, предполагая изменение только $g(\cdot)$. Обозначая $\tilde{g}(\cdot)-\hat{g}(\cdot)$ просто через $g(\cdot)$, а $\tilde{u}(\cdot)-\hat{u}(\cdot)$—просто через $u(\cdot)$, мы должны показать, что норма $\|u(\cdot)\|_1$ мала, если мала $\|g(\cdot)\|_1$ ($u(\cdot)$ — решение задачи (16.10.1) с $u(0)=0$). Отображение F_0: $g(\cdot)\to u(\cdot)$ (для $u(0)=0$) пространства $\boldsymbol{B}_1$ на себя, определенное этим строгим решением, является линейным преобразованием пространства $\boldsymbol{B}_1$; нужно показать, что F_0 имеет плотную область определения и ограничено. В целом это соответствует аналогичным рассуждениям для однородного случая, а обобщенные решения определяются путем расширения оператора F_0 до F с областью определения, совпадающей со всем $\boldsymbol{B}_1$.

Чисто формальные рассуждения показывают, что решением задачи (16.10.1), (16.10.2) должно быть

$$u(t)=E(t)\,u_0+\int_0^t E(t-s)\,g(s)\,ds, \tag{16.10.3}$$

потому что тогда

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(t)&=\frac{d}{dt}E(t)\,u_0+E(0)\,g(t)+\int_0^t\frac{d}{dt}E(t-s)\,g(s)\,ds=\\&=AE(t)\,u_0+g(t)+\int_0^t AE(t-s)\,g(s)\,ds=\\&=A\left[E(t)\,u_0+\int_0^t E(t-s)\,g(s)\,ds\right]+g(t)=\\&=Au(t)+g(t)\end{aligned} \tag{16.10.4}$$

и, очевидно, $u(0)=u_0$. Здесь нужно обосновать возможность дифференцирования под знаком интеграла в первой строке (16.10.4) и возможность перестановки знаков оператора A и интеграла в третьей строке. Если u_0 — любой элемент множества $\boldsymbol{U}$ начальных элементов строгих решений однородной задачи, введенного в § 16.2, а $g(\cdot)$ — любой элемент некоторого множества $\boldsymbol{G}\subset\boldsymbol{B}_1$, то указанные действия обосновать можно, и поэтому $u(t)$ является строгим решением задачи (16.10.1), (16.10.2). Множество $\boldsymbol{G}$ задается так:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}=\{g(\cdot)\in\boldsymbol{B}_1:\ g(t)\in\boldsymbol{D}(A^2),\quad 0\leqslant t\leqslant t_0;\\ g(t),\ Ag(t),\ A^2g(t)\ \text{непрерывны на}\ [0,\ t_0]\}.\end{aligned} \tag{16.10.5}$$

[Под непрерывностью здесь понимается сильная непрерывность, т. е. непрерывность в топологии $\boldsymbol{B}$, например $\|g(t+\delta)-g(t)\|\to 0$ при $\delta\to 0$.] Мы покажем далее, что множество $\boldsymbol{G}$ плотно в $\boldsymbol{B}_1$.

Теперь мы докажем предыдущие утверждения.

Утверждение 1 (обоснование действий в первой строке (16.10.4)). При фиксированном t_0

$$\frac{d}{dt}\int_0^{t_0} E(t-s)\,g(s)\,ds=\int_0^{t_0}\frac{d}{dt}E(t-s)\,g(s)\,ds.$$

Для $g(\cdot)\in \boldsymbol{G}$ все подынтегральные выражения в (16.10.3), (16.10.4) являются непрерывными функциями со значениями в $\boldsymbol{B}$; так же, как и в § 16.7, интегралы следует понимать как (сильные) пределы в $\boldsymbol{B}$ соответствующих сумм Римана. Как и в обычных интегралах, дифференцирование по параметру t под знаком интеграла допустимо, если отношение разностей сходится равномерно по s к производной, т. е. если

$$\left\|\frac{E(\delta)-I}{\delta}E(t-s)\,g(s)-AE(t-s)\,g(s)\right\|\to 0$$

равномерно по s $(0\leqslant s\leqslant t)$ при $\delta\to 0$. Поскольку оператор $E(t-s)$ ограничен и коммутирует с A на любом элементе из $\boldsymbol{D}(A)$, это требование сводится к тому, что

$$\left\|\frac{E(\delta)-I}{\delta}g(s)-Ag(s)\right\|\to 0$$

равномерно по s $(0\leqslant s\leqslant t)$ при $\delta\to 0$. Согласно (16.7.6),

$$\frac{E(\delta)-I}{\delta}g(s)-Ag(s)=\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}[AE(v)\,g(s)-Ag(s)]\,dv;$$

поскольку в силу (16.10.5) $Ag(s)\in\boldsymbol{D}(A)$ для любого s, формулу (16.7.6) можно снова применить, на этот раз к подынтегральному выражению. В результате получаем, что

$$\frac{E(\delta)-I}{\delta}g(s)-Ag(s)=\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\left[\int_0^{v}AE(w)\,Ag(s)\,dw\right]dv,$$

и поэтому

$$\left\|\frac{E(\delta)-I}{\delta}g(s)-Ag(s)\right\|\leqslant\frac{1}{2}\,\delta\sup\|E(w)\,A^2g(s)\|,$$

где супремум берется при $0\leqslant w\leqslant t$, $0\leqslant s\leqslant t$; этот супремум конечен, потому что функция $A^2g(s)$ непрерывна, а оператор $E(w)$ равномерно ограничен. Это завершает обоснование действий в первой строке (16.10.4).

Утверждение 2 (обоснование действий в третьей строке (16.10.4)).

$$\int_0^t Ah(s)\,ds=A\int_0^t h(s)\,ds,$$

где для данного t функция $h(s)$ является непрерывной функцией $E(t-s)\,g(s)$.

Здесь необходимо рассмотреть только аппроксимации интегралов суммами Римана. Ясно, что значение оператора A на сумме Римана интеграла $\int_0^t h(s)\,ds$ равно сумме Римана интеграла $\int_0^t Ah(s)\,ds$; поскольку A — замкнутый оператор, переход к пределу при приближении интегралов их суммами дает равенство $A\int_0^t h(s)\,ds = \int_0^t Ah(s)\,ds$.

Это завершает доказательство того, что для любого $u_0 \in \boldsymbol{U}$ и любого $g(\cdot) \in \boldsymbol{G}$ формула (16.10.3) выражает строгое решение задачи с начальными данными (16.10.1), (16.10.2).

Утверждение 3. $\boldsymbol{G}$ плотно в $\boldsymbol{B}_1$. Чтобы показать это, нужно установить, что для инфинитезимального генератора A сильно непрерывной (для $t \geqslant 0$) полугруппы $E(t)$ область определения $\boldsymbol{D}(A^2)$ плотна в $\boldsymbol{B}$. Можно доказать, что вообще $\boldsymbol{D}(A^k)$ плотна в $\boldsymbol{B}$ для $k = 1, 2, \ldots$. Доказательство этого см. у Хилле и Филлипса [1957, с.308] или у Рихтмайера и Мортона [1967, с.52]. Именно, теперь $g(t)$ — любая непрерывная кривая в $\boldsymbol{B}$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, иначе говоря, $g(\cdot)$ — элемент банахова пространства $\boldsymbol{B}_1$, определенного в начале этого параграфа. Разобьем интервал $[0, t_0]$ на N подынтервалов длины $\delta = t_0/N$ и аппроксимируем каждое $g(n\delta)$ элементом h_n из $\boldsymbol{D}(A^2)$; затем при помощи линейной интерполяции определим функцию $h(t)$ по h_n, т. е. положим

$$h(t) = h_n + \frac{t - n\delta}{\delta}(h_{n+1} - h_n) \quad \text{для } n\delta \leqslant t \leqslant (n+1)\delta.$$

Ясно, что $h(t) \in \boldsymbol{D}(A^2)$ для всех t, и ясно, что $h(t)$, $Ah(t)$ и $A^2h(t)$ непрерывны, т. е. $h(\cdot) \in \boldsymbol{G}$. Если δ достаточно мало и достаточно малы $\|g(n\delta) - h_n\|$ для каждого n, то очевидно, что величина

$$\|g(\cdot) - h(\cdot)\|_1 = \sup\{\|g(t) - h(t)\|: t \in [0, t_0]\}$$

может быть сделана сколь угодно малой; иначе говоря, любой элемент $g(\cdot) \in \boldsymbol{B}_1$ может быть аппроксимирован с любой точностью по норме $\boldsymbol{B}_1$ элементами h из $\boldsymbol{G}$, т. е. $\boldsymbol{G}$ плотно в $\boldsymbol{B}_1$.

Пусть, наконец, F_0 — линейное преобразование пространства $\boldsymbol{B}_1$, определяемое следующим образом:

$$\boldsymbol{D}(F_0) = \boldsymbol{G},$$

$$F_0: \boldsymbol{g}(\cdot) \to u(\cdot), \quad \text{где } u(t) = \int_0^t E(t-s)\,g(s)\,ds.$$

Очевидно, что оператор F_0 ограничен для $0 \leqslant t \leqslant t_0$ (и поэтому неоднородная задача корректно поставлена) и его ограниченное расширение F на все $\boldsymbol{B}_1$ задается тем же самым интегралом. Тогда по аналогии с § 16.2 функцию $u(t)$, определяемую формулой (16.10.3), назовем *обобщенным решением* неоднородной задачи (16.10.1), (16.10.2) для любого $u_0 \in \boldsymbol{B}$ и любого $g(\cdot) \in \boldsymbol{B}_1$.

16.11. ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ ОПЕРАТОР A ЗАВИСИТ ОТ ВРЕМЕНИ

В большинстве практических задач зависимость A от t носит простой характер. Обычно выполняются следующие предположения:

1) область определения $\boldsymbol{D}(A)$ не зависит от t;

2) для любого $v \in \boldsymbol{D}(A)$ функция $A(t)v$ (сильно) непрерывна по t;

3) для любого фиксированного s задача с начальными данными: $(d/dt)u(t) = A(s)u(t)$ $(t \geqslant 0)$, $u(0)$ задано, корректно поставлена; обозначим ее решение через $u_s(t)$;

4) постоянная $K = K(t_0)$, входящая в неравенство $\|u_s(t)\| \leqslant K\|u_s(0)\|$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$ (см. (16.2.1)), может быть выбрана не зависящей от s для любого интервала $0 \leqslant s \leqslant s_0$.

При этих предположениях предыдущую теорию можно обобщить очевидным образом. Тогда задача с начальными данными

$$du(t)/dt = A(t)u(t), \quad t \geqslant s, \quad u(s) = u_0 \text{ (задано)}, \qquad (16.11.1)$$

корректно поставлена. Ее строгие решения определяются ограниченным плотно определенным оператором $E_0(t, s)$, так что $u(t) = E_0(t, s)u(s)$. Расширение $E(t, s)$ этого оператора на все $\boldsymbol{B}$ определяет обобщенные решения.

Операторы $E(t, s)$ не образуют полугруппу, однако они удовлетворяют тождеству

$$E(t_3, t_2)E(t_2, t_1) = E(t_3, t_1) \quad (t_3 \geqslant t_2 \geqslant t_1). \qquad (16.11.2)$$

Для любого s оператор $A(s)$ можно считать инфинитезимальным генератором полугруппы, определяемой задачей с начальными данными для уравнения $(d/dt)u(t) = A(s)u(t)$ $(t \geqslant 0)$; тогда

$$A(t) = \lim_{\delta \to 0}[(E(t+\delta, t) - I)/\delta].$$

Если условия теоремы Хилле—Иосиды выполняются равномерно по t, т. е. если резольвента $R_\lambda(A(t))$ существует для любого $\lambda > \alpha$ и ее норма ограничена числом $(\lambda - \alpha)^{-1}$ для всех t, принадлежащих конечному интервалу $[0, t_0]$, то задача с начальными данными (16.11.1) корректно поставлена на $[0, t_0]$.