

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ: ГИДРОДИНАМИКА

Связь между линейными и нелинейными эволюционными задачами; гидродинамика как пример такой связи; система законов сохранения; квазилинейные уравнения; слабые решения; скачки и условия на скачке; ударные волны; поверхности скольжения; контактные разрывы; условия Ренкина—Гюгонио; условие энтропии; характеристики; гиперболические уравнения; характеристическая форма уравнений; инварианты Римана; теорема Коши—Ковалевской; начальная поверхность или начальные данные без характеристических точек; характеристическая плоскость; задача Римана; спонтанное образование ударных волн; неустойчивости Гельмгольца и Тейлора; кусочно аналитические задачи с начальными данными; маховское отражение; тройное пересечение ударных волн; течение в окрестности угловой точки; вычисление степенных рядов в задаче об отсоединенной ударной волне; алгебраические преобразования степенных рядов на ЭВМ; арифметика с подсчетом значащих цифр; аналитическое продолжение на ЭВМ.

Предварительные сведения: основы гидродинамики.

Нелинейные задачи с начальными данными в основном еще не изучены. Все линейные задачи из предыдущих глав в общем являются частными случаями нелинейных задач или превращаются в нелинейные, если учитываются все взаимосвязи. Акустика переходит в гидродинамику, если считать амплитуды колебаний конечными; уравнения Максвелла и уравнение Дирака при совместном их рассмотрении представляют нелинейную систему (см. работу Гросса [1966]). Новые феномены, возникающие из-за нелинейности, многочисленны и разнообразны; некоторые из них будут описаны в этой главе в связи с задачами гидродинамики. Основной вывод состоит в том, что нужно стремиться некоторым образом сформулировать результат в терминах кусочно аналитических функций. При этом весьма вероятно, что детали такой формулировки останутся неясными до тех пор, пока не будет проделана достаточно большая теоретическая работа.

Нелинейным стационарным задачам присущи также многочисленные дополнительные особенности, такие, как бифуркация и уединенные волны, но они не затрагиваются в этой книге. Не затрагиваются также конвекция и турбулентность, выделяющиеся из задач с начальными данными по той причине, что непредсказуемость деталей является их существенной чертой. Не вполне детерминированный характер имеют задачи метеорологии. В них случайные явления вместе с неадекватным знанием начальных данных увеличивают масштабы неопределенности, но можно использовать новые данные наблюдений, поступающие с течением времени.

Возникающие из-за нелинейности феномены столь многочисленны и разнообразны, что невозможно познакомиться со всеми ними при изучении какого-либо одного предмета, например, гидродинамики. Однако некоторые из них находят достаточно широкие приложения, в особенности теория характеристик, развитие скачков и других особенностей точных решений и теорема Коши—Ковалевской—все это важно, например, в общей теории относительности. Задача Коши для предложенных Эйнштейном уравнений поля будет обсуждаться во втором томе.

Весьма вероятно, что нелинейные эффекты окажутся важными и в других областях, например в квантовой теории поля при изучении взаимодействия частиц. Вряд ли можно предсказать, с какого рода феноменами еще придется столкнуться.

17.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН

Уравнение звуковых волн

$$\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \nabla^2 u,$$

где u — отклонение $p - p_0$ от статического давления p_0 , отражает следующие три допущения, сделанные при идеализации физической реальности:

- 1) однородность и изотропность статического состояния,
- 2) инфинитезимальную малость акустического возмущения: $u \ll p_0$,

3) инфинитезимальную малость среднего свободного пробега молекул газа по сравнению с линейным масштабом возмущения, равным $(|\nabla p|/p)^{-1}$.

Если мы отбросим два первых допущения, но оставим третье, то придем к гидродинамике, которую можно рассматривать как нелинейное обобщение волнового движения. Ей и посвящена эта глава.

Как было указано в § 15.4, одномерное волновое уравнение имеет решения вида $u(x, t) = f(x \pm ct)$. Если носитель f ограничен, то такое решение представляет собой волновой пакет, движущийся с постоянной скоростью $\pm c$ и без изменения амплитуды, т. е. размера и формы. Для более общих линейных уравнений с постоянными коэффициентами, таких, как уравнения упругих колебаний однородной среды или уравнение Шредингера для свободной частицы, волновой пакет, вообще говоря, изменяется по мере своего движения благодаря явлениям рассеяния и затухания (или роста). Для линейных уравнений с переменными коэффициентами движение оказывается еще более сложным, но в частном случае гиперболических систем (см. § 17.8 ниже) может иметь место распространение без рассеяния или затухания, и происходит оно вдоль так называемых характеристик,

которые аналогичны траекториям $x = \text{const} \pm ct$ в одномерном случае и движущимся волновым фронтам при большей размерности.

Уравнения гидродинамики нелинейны, но если мы наложим малое возмущение на заданное гладкое решение, то это возмущение будет удовлетворять линейной гиперболической системе уравнений, получающейся путем линеаризации уравнений гидродинамики относительно этого решения. Изучение характеристик играет ведущую роль в анализе гидродинамических задач.

В нелинейных задачах встречается ряд новых явлений, таких, как ударные волны и контактные разрывы, которые могут быть представлены при помощи так называемых слабых решений уравнений. Для изучения этих решений необходимо записать уравнения в форме соответствующих законов сохранения. В общем случае может быть несколько таких консервативных форм: гладкие решения у них одинаковы, а слабые различны, и выбор той или иной из них основывается на физических соображениях.

17.2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Рассмотрим одномерное движение идеальной (невязкой) жидкости, происходящее при таких условиях, что теплопроводностью можно пренебречь. Жидкость можно представлять себе движущейся в длинной трубе с поперечным сечением единичной площади без трения о стенки. Пусть ρ , u , p , \mathcal{E} — плотность, скорость, давление и внутренняя энергия на единицу массы жидкости — являются функциями x и t , где x — декартова координата вдоль трубы, а t — время. В качестве дополнительных зависимых переменных удобно ввести импульс и (полную) энергию на единицу объема, а именно $m = m(x, t) = \rho u$ и $e = e(x, t) = \rho \mathcal{E} + \frac{1}{2} \rho u^2$. Пусть траектории двух частиц жидкости заданы уравнениями $x = a = a(t)$ и $x = b = b(t)$, где $a(t) < b(t)$. Рассмотрим часть жидкости, заключенную между этими траекториями. Ее полная масса, полный импульс и полная энергия соответственно равны

$$M = \int_a^b \rho dx, \quad P = \int_a^b m dx, \quad E = \int_a^b e dx. \quad (17.2.1)$$

Согласно основным физическим законам $\dot{M} = 0$ (здесь точка обозначает d/dt), \dot{P} равна сумме сил, действующих на эту часть жидкости, а \dot{E} равна скорости, с которой эти силы совершают работу. Таким образом,

$$\begin{aligned} \dot{M} &= 0, & \dot{P} &= -p(b, t) + p(a, t), \\ \dot{E} &= -p(b, t)u(b, t) + p(a, t)u(a, t). \end{aligned} \quad (17.2.2)$$

Каждое из этих уравнений можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx + g(x, t) \Big|_{x=a(t)}^{x=b(t)} = 0,$$

или же в виде

$$\int_a^b (\partial f / \partial t) dx + (uf + g) \Big|_{x=a}^{x=b} = 0,$$

так как $\dot{a} = u(a, t)$ и $\dot{b} = u(b, t)$, или, наконец, в виде

$$\int_a^b [\partial f / \partial t + \partial (uf + g) / \partial x] dx = 0;$$

если при этом предположить дифференцируемость функции $uf + g$. Это верно для каждого интервала (a, b) , и поэтому для f и g из C^1 отсюда следует, что выражение в квадратных скобках тождественно обращается в нуль. Таким образом мы приходим к уравнениям с частными производными для гидродинамики, если выражения для f и g соответствуют (17.2.1) и (17.2.2). Положим

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} m \\ m^2/\rho + p \\ (e + p)m/\rho \end{pmatrix}. \quad (17.2.3)$$

Тогда получающиеся уравнения можно сокращенно записать так:

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{F} / \partial x = 0.$$

Пока у нас неизвестных функций (это ρ , m , e и p) больше, чем уравнений. Но, согласно законам термодинамики, существует функциональная связь между p , ρ и \mathcal{E} , называемая *уравнением состояния* вещества. Если она записана в виде $p = f(\mathcal{E}, \rho)$ (для идеального газа $p = (\gamma - 1)\rho\mathcal{E}$, $\gamma = \text{const}$), то в переменных, введенных в (17.2.3), она выглядит так:

$$p = f((1/\rho)(e - 1/2 m^2/\rho), \rho). \quad (17.2.4)$$

Если символ p в (17.2.3) понимается как сокращенное обозначение для этого выражения, то каждая компонента вектора \mathbf{F} будет функцией компонент вектора \mathbf{U} , т.е. $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U})$, и поэтому

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{F}(\mathbf{U}) / \partial x = 0. \quad (17.2.5)$$

Система уравнений этого общего вида при любом числе зависимых и независимых переменных называется *системой законов сохранения* (см. работы Лакса [1954, 1957]). Для течения жидкости в плоскости x, y вектор импульса имеет две компоненты m и n , а уравнения в форме законов сохранения имеют вид

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \partial \mathbf{F}(\mathbf{U}) / \partial x + \partial \mathbf{G}(\mathbf{U}) / \partial y = 0, \quad (17.2.6)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ n \\ e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} m \\ m^2/\rho + p \\ mn/\rho \\ (e+p)m/\rho \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} n \\ mn/\rho \\ n^2/\rho + p \\ (e+p)n/\rho \end{bmatrix}. \quad (17.2.7)$$

Уравнения (17.2.5) могут быть также представлены различными способами в виде системы квазилинейных уравнений, например, как

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t + u\partial/\partial x)\rho &= -\rho du/\partial x, \\ \rho(\partial/\partial t + u\partial/\partial x)u &= -\partial p/\partial x, \\ \rho(\partial/\partial t + u\partial/\partial x)\mathcal{E} &= -\rho du/\partial x, \end{aligned} \quad (17.2.8)$$

где снова $p = f(\mathcal{E}, \rho)$. Система уравнений называется *квазилинейной*, если она линейна относительно частных производных высшего порядка (в данном случае первого порядка) с коэффициентами, являющимися функциями недифференцированных величин и их низших производных (здесь — только самих величин u , p , ρ , \mathcal{E}).

Теперь покажем, как можно получить другую систему законов сохранения. Пусть $T = T(x, t)$ и $S = S(x, t)$ — абсолютная температура и удельная (на единицу массы) энтропия жидкости. Согласно законам термодинамики, S и T также являются функциями \mathcal{E} и ρ , причем

$$d\mathcal{E} + pd(1/\rho) = TdS. \quad (17.2.9)$$

Объединяя первое и третье из уравнений (17.2.8), можно получить, что

$$(\partial/\partial t + u\partial/\partial x)\mathcal{E} + p(\partial/\partial t + u\partial/\partial x)(1/\rho) = 0.$$

Используя теперь (17.2.9), будем иметь

$$(\partial/\partial t + u\partial/\partial x)S = 0,$$

откуда следует, что вдоль траекторий частиц энтропия постоянна. Далее, это уравнение можно объединить с первым из уравнений (17.2.8), что дает

$$\partial(\rho S)/\partial t + \partial(\rho u S)/\partial x = 0. \quad (17.2.10)$$

Это новая форма третьего уравнения консервативной системы. Если ρS обозначить через $s = s(x, t)$ (это энтропия на единицу объема) и зависимость между s , \mathcal{E} и ρ записать в виде $s = f_1(\mathcal{E}, \rho)$, то

$$s = f_1((1/\rho)(e - \frac{1}{2}m^2/\rho), \rho).$$

Поэтому если вместо (17.2.3) мы возьмем

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} m \\ m^2/\rho + p \\ ms/\rho \end{bmatrix}, \quad (17.2.11)$$

то получим новую систему законов сохранения.

Пока течение остается гладким, т.е. пока p , u , ρ и т.д. как функции от x и t принадлежат C^1 , система (17.2.8) и обе системы законов сохранения, основанные на (17.2.3) и (17.2.11), эквивалентны. Однако реальные течения не всегда гладки, и даже в гладком в начальный момент течения со временем могут возникнуть ударные волны и другие особенности. Течения с особенностями описываются слабыми решениями дифференциальных уравнений; такие решения обсуждаются в следующем параграфе. В классе слабых решений эти три системы дифференциальных уравнений уже неэквивалентны, и правильная форма должна определяться из физических соображений. Как мы увидим, правильные слабые решения дает только консервативная система, основанная на (17.2.3), потому что сохранение массы, импульса и энергии—это основные физические законы (при наличии ударных волн энтропия не сохраняется, а возрастает).

Для гладких решений каждую из консервативных систем можно представить в квазилинейной форме, для чего сначала определяется матрица $A = A(\mathbf{U})$ с элементами

$$A_{jk} = \partial F_j(\mathbf{U}) / \partial U_k; \quad (17.2.12)$$

тогда система

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + A(\mathbf{U}) \partial \mathbf{U} / \partial x = 0 \quad (17.2.13)$$

будет квазилинейной.

17.3. СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ

Сначала рассмотрим случай одной пространственной[†] переменной. Интегрирование системы (17.2.2) по t от t_1 до t_2 дает

$$M(t_2) - M(t_1) = 0,$$

$$P(t_2) - P(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [-p(b, t) + p(a, t)] dt, \quad (17.3.1)$$

$$E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} [-p(b, t)u(b, t) + p(a, t)u(a, t)] dt,$$

где, как и в (17.2.2), $a = a(t)$ и $b = b(t)$. Эти уравнения являются *фундаментальным* выражением физических законов сохранения массы, импульса и энергии для жидкости, поскольку они не требуют дифференцируемости входящих в них функций. Они связывают значения массы, импульса и энергии рассматриваемой части жидкости в момент t_2 со значениями тех же самых величин в момент времени t_1 . Однако если компоненты $\mathbf{U}(x, t)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))$ рассматриваются как распределения на плоскости x, t , то система (17.3.1) в точности эквивалентна консервативной системе (17.2.5), если производные понимаются в смысле теории распределений. Если $\mathbf{W}(x, t)$ — векторнозначная пробная функция с тем же числом компонент, что и \mathbf{U} , то, согласно определению производной от распределения, (17.2.5) означает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(\partial \mathbf{W} / \partial t) \cdot \mathbf{U} + (\partial \mathbf{W} / \partial x) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U})] dx dt = 0. \quad (17.3.2)$$

Любая функция $\mathbf{U}(x, t)$, которая удовлетворяет этому уравнению для всех таких векторных пробных функций $\mathbf{W}(x, t)$, называется *слабым решением* консервативной системы (17.2.5).

17.4. УСЛОВИЯ НА СКАЧКЕ

Слабое решение в общем случае кусочно гладко. Гладкие части удовлетворяют дифференциальным уравнениям в любой из форм, но этого в общем случае недостаточно для определения характера движения, исходя из начальных данных, и дифференциальные уравнения должны быть дополнены условиями на скачке в местах разрыва.

Предположим, что слабое решение $\mathbf{U}(x, t)$ имеет разрыв в плоскости x, t вдоль кривой \mathcal{E} : $x = x(t)$, но дифференцируемо в некоторой окрестности \mathcal{N} кривой \mathcal{E} ; функция $x(t)$ предполагается дифференцируемой. Пусть $\mathbf{W}(x, t)$ — пробная функция, носитель которой принадлежит \mathcal{N} . Обозначим через \mathcal{R} часть носителя $\mathbf{W}(x, t)$, лежащую по одну сторону (например, слева) от \mathcal{E} (см. рис. 17.1). Так как $\mathbf{W} = 0$ на границе \mathcal{R} всюду, за исключением отрезка кривой \mathcal{E} , то по теореме Гаусса

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \cdot \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \cdot \mathbf{F} \right) dx dt + \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{W} dx dt = \\ & = \iint_{\mathcal{R}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{W} \cdot \mathbf{F}) \right] dx dt = \\ & = \iint_{\mathcal{E}} \left[-\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \mathbf{W} \cdot \mathbf{F} \right] ds, \end{aligned}$$

где взяты левые предельные значения U и $F(U)$ на \mathcal{C} , а $(1 + \dot{x}^2)^{-1/2}$ и $-\dot{x}(1 + \dot{x}^2)^{-1/2}$ — компоненты единичного вектора нормали к \mathcal{C} в системе координат x, t . Второй интеграл в левой части равен нулю, потому что (17.2.5) выполняется (в строгом

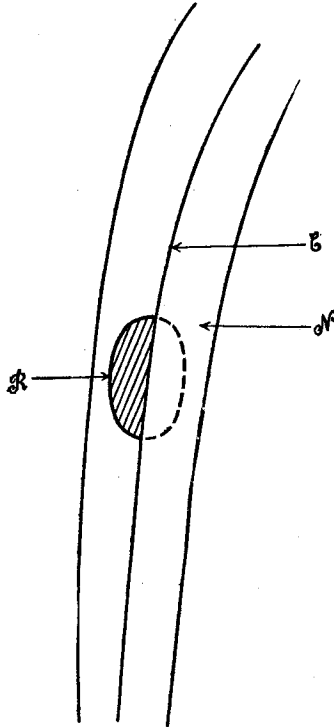


Рис. 17.1. Диаграмма к условиям на скачке.

смысле) внутри \mathcal{R} . Поэтому если мы выполним аналогичное интегрирование по правой части носителя W и сложим оба результата, а затем используем (17.3.2), то получим, что

$$0 = \int_{\mathcal{C}} (\dot{x}[U] - [F]) \cdot \frac{W}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} ds,$$

где $[]$ обозначает разность между двумя предельными значениями функции на двух сторонах кривой \mathcal{C} , т. е. скачок этой функции (скажем, при переходе слева направо). *Разность*, а не сумма получается потому, что направление единичного вектора нормали меняется на противоположное, когда теорема Гаусса применяется для второй части носителя W . В силу произвольности W из

последнего уравнения вытекает следующее условие на скачке:

$$\dot{x}[\mathbf{U}] - [\mathbf{F}(\mathbf{U})] = 0 \quad \text{на } \mathcal{E}. \quad (17.4.1)$$

Обобщение на случай более чем одной пространственной переменной получается непосредственно. Функция $\mathbf{U}(x, y, t)$ является слабым решением уравнения (17.2.6), если

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} \cdot \mathbf{U} + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial y} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{U}) \right] dx dy dt = 0 \quad (17.4.2)$$

для любой векторной пробной функции $\mathbf{W}(x, y, t)$. Чтобы найти обобщение условия (17.4.1), напомним, что $-\dot{x}$ и x были компонентами перпендикулярного к \mathcal{E} вектора в системе координат x, y, t . Поэтому если $\mathbf{U}(x, y, t)$ — слабое решение уравнения (17.2.6), гладкость которого нарушается только разрывом первого рода вдоль поверхности \mathcal{S} в трехмерном пространстве с координатами x, y, t , а $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_t)$ — перпендикулярный к \mathcal{S} вектор, то вместо (17.4.1) для \mathbf{U} получится условие

$$\lambda_t[\mathbf{U}] + \lambda_x[\mathbf{F}(\mathbf{U})] + \lambda_y[\mathbf{G}(\mathbf{U})] = 0 \quad \text{на } \mathcal{S}. \quad (17.4.3)$$

17.5. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И ПОВЕРХНОСТИ СКОЛЬЖЕНИЯ

Для гидродинамики в случае одной пространственной переменной, когда \mathbf{U} и $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ заданы в виде (17.2.3), условия на скачке можно интерпретировать следующим образом. Первая компонента векторного уравнения (17.4.1) такова:

$$\dot{x}[\rho] = [m] = [\rho u]. \quad (17.5.1)$$

Если предельные значения слева и справа от кривой \mathcal{E} отметить индексами 1 и 2 соответственно, то это уравнение можно переписать в виде

$$(u_1 - \dot{x})\rho_1 = (u_2 - \dot{x})\rho_2.$$

Так как $u_1 - \dot{x}$ и $u_2 - \dot{x}$ являются относительными скоростями жидкости относительно местоположения разрыва с обеих его сторон, то общее значение обеих частей последнего равенства представляет собой массу M жидкости, которая протекает через единицу площади разрыва за единицу времени:

$$M = (u_1 - \dot{x})\rho_1 = (u_2 - \dot{x})\rho_2; \quad (17.5.2)$$

M положительна, если жидкость движется через разрыв вправо. Теперь запишем две другие компоненты векторного уравнения (17.4.1):

$$M u_2 - M u_1 = p_1 - p_2, \quad (17.5.3)$$

$$M (\mathcal{E}_2 + \frac{1}{2} u_2^2 - \mathcal{E}_1 - \frac{1}{2} u_1^2) = p_1 u_1 - p_2 u_2. \quad (17.5.4)$$

Эти уравнения показывают, что скорость изменения импульса при прохождении жидкости через разрыв равна разности сил давления по обе стороны от разрыва, а скорость изменения полной энергии (т.е. суммы внутренней и кинетической энергий) равна скорости, с которой эти силы совершают работу.

Для дву- или трехмерных течений скорость жидкости представляется вектором \mathbf{u} . Из-за увеличения размерности уравнения (17.5.2) — (17.5.4) изменяются незначительно; в частности, (17.5.3) заменяется векторным уравнением. Предположим, что ρ , ρ и \mathbf{u} имеют разрывы первого рода на поверхности \mathcal{S} и что P — точка \mathcal{S} , а U — скорость поверхности относительно той системы координат, в которой записаны уравнения, измеряемая по нормали к поверхности в точке P . Иначе говоря, будем считать, что λ — единичный вектор нормали к поверхности в точке P , направленный в область с индексом 2; тогда если провести через P прямую в направлении λ , то U будет скоростью движения точки пересечения поверхности с этой прямой. Так как $\lambda \cdot \mathbf{u}$ представляет собой ортогональную проекцию скорости жидкости на это направление, то вместо уравнения (17.5.2) будем иметь

$$M = (\lambda \cdot \mathbf{u}_1 - U) \rho_1 = (\lambda \cdot \mathbf{u}_2 - U) \rho_2. \quad (17.5.5)$$

Скорость изменения импульса равна $M(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1)$, а сила равна $\lambda(\rho_1 - \rho_2)$, и поэтому уравнения (17.5.3) и (17.5.4) заменяются уравнениями

$$M(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) = \lambda(\rho_1 - \rho_2), \quad (17.5.6)$$

$$M(\mathcal{E}_2 + \frac{1}{2}\rho_2\mathbf{u}_2^2 - \mathcal{E}_1 - \frac{1}{2}\rho_1\mathbf{u}_1^2) = \rho_1\lambda \cdot \mathbf{u}_1 - \rho_2\lambda \cdot \mathbf{u}_2. \quad (17.5.7)$$

Уравнение (17.5.6) эквивалентно двум уравнениям:

$$M(\lambda \cdot \mathbf{u}_2 - \lambda \cdot \mathbf{u}_1) = \rho_1 - \rho_2, \quad (17.5.8)$$

$$M(\lambda \times \mathbf{u}_2 - \lambda \times \mathbf{u}_1) = 0. \quad (17.5.9)$$

Из уравнения (17.5.9) видно, что существуют две основные возможности: либо тангенциальная компонента скорости, равная $\lambda \times \mathbf{u}$, непрерывна при переходе через \mathcal{S} , либо $M = 0$. В первом случае \mathcal{S} представляет собой *ударную волну* или *фронт ударной волны*; во втором случае — это *поверхность скольжения*, при переходе через которую давление p и нормальная компонента скорости остаются непрерывными ($\lambda \cdot \mathbf{u}_1 = \lambda \cdot \mathbf{u}_2 = U$), тогда как плотность ρ и тангенциальная компонента $\lambda \times \mathbf{u}$ скорости могут иметь произвольные скачки. Если же $M = 0$ и функция $\lambda \times \mathbf{u}$ непрерывна, то поверхность является *контактным разрывом*, когда разрывны только плотность и температура и нет относительного движения.

Для случая ударной волны приведенные выше условия на скачке можно записать в терминах удельного объема $V = 1/\rho$ в

следующей (одной из возможных) форме:

$$(1/V_1)(\lambda \cdot \mathbf{u}_1 - U) = (1/V_2)(\lambda \cdot \mathbf{u}_2 - U) = \sqrt{(p_2 - p_1)/(V_1 - V_2)}, \quad (17.5.10)$$

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = 1/2 (p_1 + p_2)(V_1 - V_2), \quad (17.5.11)$$

$$\lambda \times (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = 0. \quad (17.5.12)$$

В таком виде они известны как условия *Ренкина—Гюгонио*. Более общие условия (17.4.1) или (17.4.3) часто также называются условиями Ренкина—Гюгонио в обобщенном смысле. Положительное значение квадратного корня в (17.5.10) соответствует случаю $M > 0$ (ударной волне, движущейся относительно жидкости в сторону области с индексом 1); отрицательное значение квадратного корня соответствует случаю $M < 0$.

17.6. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН РАЗРЕЖЕНИЯ

Если $M > 0$, то индекс 2 указывает жидкость, которая пройдена фронтом ударной волны (или находится за ним). Поэтому в данном случае можно ожидать, что $p_2 > p_1$ и $V_2 > V_1$, как и наблюдается в экспериментах. Однако уравнения (17.5.10) — (17.5.12) остаются верными, если индексы 1 и 2 поменять местами (согласно (17.5.5), это не меняет массу M) и поэтому существуют также решения, для которых $p_2 < p_1$ и $V_2 > V_1$ ¹⁾. Такие решения называются *ударными волнами разрежения*. Как будет сейчас показано, их можно исключить из рассмотрения, проанализировав энтропию, устойчивость или же механизмы диссипации.

Чтобы исследовать энтропию, сначала рассмотрим случай идеального газа; тогда²⁾

$$\mathcal{E} = pV/(\gamma - 1), \quad T \propto pV, \quad S \propto \ln(pV^\gamma). \quad (17.6.1)$$

В общем случае, когда $\mathcal{E} = \mathcal{E}(p, V)$, уравнение (17.5.11), записанное в виде

$$\mathcal{E}(p_2, V_2) - \mathcal{E}(p_1, V_1) = 1/2 (p_1 + p_2)(V_1 - V_2),$$

устанавливает связь между p_1, V_1 и p_2, V_2 : для заданных p_1, V_1 существует однопараметрическое семейство возможных конечных состояний, каждое из которых представляется точкой (p_2, V_2) на плоскости p, V ; геометрическим местом этих точек является так называемая *кривая Гюгонио*. Для заданных p_1, V_1 положим

$$\pi = p_2/p_1, \quad \eta = V_1/V_2 = \rho_2/\rho_1;$$

¹⁾ Если при этом движение фронта волны по-прежнему происходит в сторону области с индексом 1. — *Прим. перев.*

²⁾ Символ \propto означает функциональную зависимость, т. е. равенство с точностью до постоянного множителя или слагаемого. — *Прим. перев.*

здесь π и η — коэффициент давления и коэффициент сжатия ударной волны соответственно. В случае идеального газа нетрудно проверить, что кривая Гюгонио описывается уравнением

$$\pi = (\theta\eta - 1)/(\theta - \eta) \quad (\theta = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)). \quad (17.6.2)$$

Так как π и η по определению положительны, они меняются в интервалах $0 < \pi < \infty$ и $1/\theta < \eta < \theta$. Ударные волны сжатия и разрежения получаются при $\eta > 1$ и $\eta < 1$ соответственно. Бесконечно сильная ударная волна (при $\pi \rightarrow \infty$) сжимает жидкость только в конечное число раз $\theta = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ (при этом температура $T_2 \rightarrow \infty$). На кривой Гюгонио энтропия как функция от η выражается формулой

$$S \propto \ln p + \gamma \ln V,$$

а изменение энтропии, вызываемое ударной волной, составляет

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_2 - S_1 \propto \ln \pi - \gamma \ln \eta = \\ &= \ln [(\theta\eta - 1)/(\theta - \eta)] - \gamma \ln \eta. \end{aligned}$$

Производная функции ΔS по η вдоль кривой Гюгонио равна

$$\frac{d}{d\eta} \Delta S = \frac{\theta}{\theta\eta - 1} + \frac{1}{\theta - \eta} - \frac{\gamma}{\eta} = \frac{\gamma\theta(\eta - 1)^2}{(\theta\eta - 1)(\theta - \eta)\eta}.$$

Эта величина положительна на всей кривой (ибо $1/\theta < \eta < \theta$), кроме точки $\eta = 1$, где она обращается в нуль; следовательно, $\Delta S > 0$ при $\eta > 1$ и $\Delta S < 0$ при $\eta < 1$. Ударные волны могут существовать в системе, в которой все другие процессы изэнтропичны. Следовательно, случай $\Delta S < 0$ может быть исключен из рассмотрения, и из второго закона термодинамики вытекает, что ударные волны разрежения в природе не встречаются¹⁾. Вывод о том, что ΔS — это возрастающая функция η вдоль кривой Гюгонио (за исключением точки $\eta = 1$), имеет место для общего уравнения состояния при весьма широких предположениях (см. книгу Куранта и Фридрихса [1948, § 65]).

На невозможность существования ударных волн разрежения указывают и следующие соображения относительно их устойчивости. Рассмотрим две ударные волны, следующие одна за другой. Для простоты предположим, что это плоские параллельные волны стационарной формы, движущиеся относительно жидкости в одном и том же направлении. Из уравнений Ренкина — Гюгонио нетрудно получить, что если это ударные волны сжатия, то задняя дви-

¹⁾ Хотя возможность существования ударной волны разрежения при некоторых весьма специфических условиях теоретически предсказывалась уже довольно давно, экспериментаторам удалось подтвердить это лишь в самое последнее время (см. работу Борисова и др. [1980]). — *Прим. перев.*

жется быстрее передней, так что они через короткое время сливаются в одну ударную волну, тогда как ударные волны разрежения с течением времени все больше и больше удалялись бы друг от друга. Благодаря отсутствию в природе абсолютной точности ударную волну одинаково хорошо можно представлять себе либо как одиночный разрыв конечной величины, либо в виде последовательности многих малых разрывов с малыми расстояниями между ними. Если такая последовательность состоит из ударных волн сжатия, то они быстро сливаются, формируя крутой общий профиль, тогда как ударные волны разрежения стремились бы разойтись в стороны, формируя при этом профиль плавного перехода.

Благодаря молекулярной природе жидкости в ней неизбежны такие диссипативные процессы, как теплопроводность и вязкость. Очевидно, что переход давления, плотности и температуры от их начальных значений к конечным не может происходить мгновенно, а должен осуществляться в слое, толщина которого сравнима со средним свободным пробегом молекул жидкости. Даже если эта толщина составляет несколько таких пробегов, градиент температуры оказывается достаточным для того, чтобы вызвать заметное перетекание тепла от нагретого участка к холодному, а возникающие в жидкости сдвиги достаточны для появления заметных сил вязкости (напомним, что плоское сжатие в одном направлении вызывает сдвиги; это можно установить, рассматривая прямые, образующие углы 45° с направлением сжатия¹⁾).

Чтобы получить качественную оценку этих процессов, можно использовать описывающие их классические уравнения, несмотря на то, что эти уравнения точны только тогда, когда температура и плотность очень мало изменяются на расстоянии, сравнимом с длиной свободного пробега. В работе Беккера [1922] (см. также книгу Рихтмайера и Мортонa [1967, § 12.10]) классические члены, представляющие перетекание тепла и силы вязкости, включены в уравнения гидродинамики для случая одной пространственной переменной x . При этом ищется такое решение, для которого u , p , ρ , \mathcal{E} зависят от x и t только через комбинацию $\omega = x - Ut$ (U — константа) и достигают предельных значений u_1 , p_1 , ρ_1 , \mathcal{E}_1 и u_2 , p_2 , ρ_2 , \mathcal{E}_2 при $\omega \rightarrow -\infty$ и $\omega \rightarrow \infty$ соответственно с непрерывным, но достаточно быстрым переходом от одной совокупности значений к другой на достаточно малом интервале по ω . Оказывается, что предельные значения точно удовлетворяют условиям на скачке (17.5.2) — (17.5.4) при $\dot{x} = U$. (Этого следовало ожидать, потому что условия на скачке зависят только от сохранения в целом массы, импульса и энергии, а диссипативные эффекты

¹⁾ См., например, книгу Зельдовича и Райзера [1966, с. 576]. — *Прим. перев.*

исчезают в пределе при $\omega \rightarrow \pm \infty$.) Однако решение такого вида существует только для ударных волн сжатия, т. е. при $u_1, u_2 > U$ только для $\rho_2 > \rho_1$ (при этом $\rho_2 > \rho_1$, $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$, $u_2 < u_1$). Следовательно, не существует бегущего решения стационарной формы, соответствующего ударной волне разрежения. Ясно, что если ударная волна разрежения с произвольным профилем начнет движение в момент $t=0$, то со временем ее профиль будет неограниченно расплываться и никогда не станет стационарным.

17.7. ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ И ХАРАКТЕРИСТИКИ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Звуковые волны—это колебания с малой амплитудой и малой длиной волны, накладываемые в качестве возмущений на гладкое течение жидкости. Если $\mathbf{U}^0 = \mathbf{U}^0(x, t)$ —гладкое решение консервативной системы (17.2.5) и $\mathbf{U}^0 + \varepsilon \mathbf{U}^1$ —другое такое решение, где ε —малая величина, а \mathbf{U}^1 представляет звуковую волну, то

$$\partial(\mathbf{U}^0 + \varepsilon \mathbf{U}^1)/\partial t + \partial F(\mathbf{U}^0 + \varepsilon \mathbf{U}^1)/\partial x = 0.$$

Следовательно, с точностью до первого порядка по ε

$$\partial \mathbf{U}^1/\partial t + \partial(A(\mathbf{U}^0)\mathbf{U}^1)/\partial x = 0,$$

где матрица A определена в (17.2.12). Предположение о малости длины звуковой волны означает, что \mathbf{U}^0 должно очень мало меняться на длине волны для \mathbf{U}^1 , т. е. что величиной $\partial \mathbf{U}^0/\partial x$ можно пренебречь по сравнению с $\partial \mathbf{U}^1/\partial x$, и поэтому

$$\partial \mathbf{U}^1/\partial t + A(\mathbf{U}^0)\partial \mathbf{U}^1/\partial x = 0. \quad (17.7.1)$$

Для данного гладкого течения $\mathbf{U}^0(x, t)$ (17.7.1) представляет собой линейное уравнение относительно $\mathbf{U}^1(x, t)$, отличающееся от (17.2.13) только тем, что оно линеаризовано путем замены в матрице коэффициентов A неизвестной функции $\mathbf{U}(x, t)$ известной функцией $\mathbf{U}^0(x, t)$.

В элементарной теории звуковых волн предполагается, что решение уравнения (17.7.1) должно представлять волны, распространяющиеся по жидкости в обе стороны. Если матрица коэффициентов постоянна и может быть диагонализирована при помощи преобразования $A \rightarrow TAT^{-1} = D$, а произведение $T\mathbf{U}^1$ обозначено через \mathbf{V}^1 , то уравнение (17.7.1) принимает вид

$$\partial \mathbf{V}^1/\partial t + D \partial \mathbf{V}^1/\partial x = 0. \quad (17.7.2)$$

Уравнения этой системы будут взаимно независимы, а j -е уравнение запишется как

$$\partial V_j^1/\partial t + \lambda_j \partial V_j^1/\partial x = [\partial/\partial t + \lambda_j \partial/\partial x] V_j^1 = 0, \quad (17.7.3)$$

где λ_j есть j -е собственное значение матрицы A . Для вещественного λ_j решение этого уравнения будет представлять волну, распространяющуюся со скоростью λ_j .

Так как на самом деле матрица коэффициентов в (17.7.1) не является постоянной, матрицы T и D зависят от U^0 , и поэтому вместо (17.7.2) будем иметь

$$T \partial U^1 / \partial t + TA \partial U^1 / \partial x = 0,$$

т. е. ¹⁾

$$T \partial U^1 / \partial t + DT \partial U^1 / \partial x = 0. \quad (17.7.4)$$

Следовательно, вместо (17.7.3) получится уравнение

$$\sum_{k=1}^l T_{jk}(U^0) [\partial / \partial t + \lambda_j(U^0) \partial / \partial x] U_k^1 = 0 \quad (j=1, \dots, l), \quad (17.7.5)$$

где l — число уравнений в системе (для гидродинамики в одномерном случае $l=3$). Теперь решение представляет волны, распространяющиеся в среде с переменными свойствами, а уравнения системы взаимосвязаны, потому что матрица T в (17.7.5) не перестановочна с дифференциальным оператором.

17.8. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Напомним, что матрица A может быть приведена к диагональной форме с помощью преобразования подобия $A \rightarrow TAT^{-1} = D$ тогда и только тогда, когда она имеет полную систему собственных векторов. При этом столбцы матрицы T^{-1} образуют полную систему правосторонних собственных векторов, а строки матрицы T образуют полную систему левосторонних собственных векторов. Система

$$\partial U / \partial t + A \partial U / \partial x = 0$$

уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами называется *гиперболической*, если все собственные значения матрицы A вещественны, а система ее собственных векторов полна. Линейная система

$$\partial U / \partial t + A(x, t) \partial U / \partial x = 0$$

с переменными коэффициентами называется *гиперболической в области \mathcal{R}* плоскости x, t , если в каждой точке области \mathcal{R} все собственные значения матрицы $A(x, t)$ вещественны, а система ее собственных векторов полна. Гиперболичность нелинейной системы зависит не только от уравнений, но также и от решения. Если $U(x, t)$ есть решение системы

$$\partial U / \partial t + A(U) \partial U / \partial x = 0, \quad (17.8.1)$$

¹⁾ Если матрица $A(U^0)$ диагонализируема при всех значениях решения U^0 . — Прим. перев.

то эта система будет *гиперболической* в области \mathcal{R} для решения $U(x, t)$, если матрица $A(U(x, t))$ обладает указанными выше свойствами, т. е. если линеаризованная система, которая получается при линеаризации системы (17.8.1) относительно решения $U(x, t)$, является гиперболической в области \mathcal{R} .

На зависимость $A(U)$ от U или $A(U(x, t))$ от x и t часто накладывают ограничения. Например, считают, что эти функции удовлетворяют условию Липшица, а чтобы избежать плохой обусловленности матриц, требуют ограниченности величины $\|T\| \|T^{-1}\|$ в области \mathcal{R} , где $\|\cdot\|$ обозначает норму матрицы, а T — матрица преобразования, которое приводит A к диагональному виду: $TAT^{-1} = D$.

Если матрица T умножается непосредственно на систему (17.8.1), а не на ее линеаризованную форму, то получается система

$$\sum_{k=1}^l T_{jk}(U) (\partial/\partial t + \lambda_j(U) \partial/\partial x) U_k = 0 \quad (j=1, \dots, l) \quad (17.8.2)$$

(сравните ее с (17.7.5)). Это *характеристическая форма* системы (17.8.1). Система является гиперболической тогда и только тогда, когда она может быть преобразована в систему уравнений с вещественными коэффициентами, имеющую характеристическую форму.

Если система является гиперболической, то для каждого $j=1, \dots, l$ существует однопараметрическое семейство кривых $x(t)$ на плоскости x, t , которые удовлетворяют уравнению $dx/dt = \lambda_j$, т. е. уравнению

$$dx(t)/dt = \lambda_j(U(x(t), t)). \quad (17.8.3)$$

Такие кривые называются *характеристиками* решения $U(x, t)$. Это пути распространения (в смысле геометрической акустики) звуковых волн, наложенных на решение $U(x, t)$. Существенной чертой характеристической формы (17.8.2) является то, что в данной точке с координатами x, t все величины в j -м уравнении дифференцируются в одном и том же направлении в плоскости x, t , а именно в направлении j -й характеристики, проходящей через эту точку.

17.9. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ В ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Уравнения одномерной гидродинамики проще всего представить в характеристической форме, выбрав в качестве зависимых переменных плотность ρ , скорость u и удельную энтропию S . Если уравнение состояния записано в виде

$$p = p(S, \rho),$$

а $c = c(S, \rho)$ определяется формулой

$$c^2 = \partial p(S, \rho) / \partial \rho, \quad (17.9.1)$$

то уравнения § 17.2 принимают вид

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t + u\partial/\partial x) \rho + \rho \partial u/\partial x &= 0, \\ (\partial/\partial t + u \partial/\partial x) u + (1/\rho) (c^2 \partial \rho/\partial x + (\partial p/\partial S) (\partial S/\partial x)) &= 0, \\ (\partial/\partial t + u \partial/\partial x) S &= 0; \end{aligned}$$

тогда

$$A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ c^2/\rho & u (1/\rho) & \partial p(S, \rho)/\partial S \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}, \quad (17.9.2)$$

а собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы A являются корнями уравнения

$$\det(A - \lambda I) = [(u - \lambda)^2 - c^2](u - \lambda) = 0$$

и равны $u \pm c$ и u . Характеристики — это траектории распространяющихся вперед и назад звуковых сигналов и частиц жидкости.

Теперь нетрудно записать уравнения в характеристической форме:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho + \rho c \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial}{\partial x} \right) u &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho - \rho c \left(\frac{\partial}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial}{\partial x} \right) u &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) S &= 0. \end{aligned} \quad (17.9.3)$$

Важным частным случаем является тот, в котором в некоторый начальный момент времени $t = 0$ энтропия постоянна, т. е. $S(x, 0)$ не зависит от x . Тогда третье из уравнений (17.9.3) показывает, что S будет оставаться постоянной все время (точнее, до появления ударных волн), а это означает изэнтропичность течения. Отсюда следует, что ρ и c зависят только от ρ , и поэтому временно их можно обозначить через $\rho(\rho)$ и $c(\rho)$. Определим еще одну термодинамическую величину, а именно

$$\sigma(\rho) = \int [1/(\rho c(\rho))] d\rho(\rho);$$

тогда первые два из уравнений (17.9.3) после деления на ρ дадут

$$[\partial/\partial t + (u \pm c) \partial/\partial x] (\sigma \pm u) = 0. \quad (17.9.4)$$

Величины $\sigma \pm u$, которые называются *инвариантами Римана*, постоянны вдоль опережающих и запаздывающих характеристик.

На уравнениях (17.9.4) основаны различные аналитические численные методы расчета одномерных изэнтропических течений. Один такой пример, в котором рассматривается спонтанное образование ударных волн, приводится ниже в § 17.14.

В (17.9.4) c и σ являются функциями ρ , и поэтому в качестве зависимых переменных могут быть взяты $u(x, t)$ и $\rho(x, t)$. В некоторых случаях ρ можно исключить из $c(\rho)$ и $\sigma(\rho)$ (например, для идеального газа

$$\sigma = 2c/(\gamma - 1)), \quad (17.9.5)$$

и тогда в качестве зависимых переменных можно взять $u(x, t)$ и $c(x, t)$.

17.10. ЗАМЕЧАНИЯ О ЗАДАЧАХ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Для нелинейных уравнений с частными производными, которые возникают в физических приложениях, теория задач с начальными данными состоит из двух частей. Начальные данные и решения в общем случае являются кусочно гладкими, и поэтому одна часть теории посвящена гладким фрагментам решений, а в другой ее части рассматриваются скачки и прочие особенности. Если решение гладко в области пространства x, t , то его эволюция определяется дифференциальными уравнениями. Если в такой области все зависимые величины известны в некоторый момент времени t_0 , то можно надеяться определить их там в ближайшие последующие моменты $t_0 + \varepsilon$, решая локальную задачу с начальными данными для дифференциальных уравнений. Такие локальные задачи с начальными данными рассматриваются в теореме Коши—Ковалевской, которая будет приведена ниже (см. § 17.14).

Сначала напомним, что уравнение с частными производными, имеющее порядок выше первого, всегда можно свести к системе более низкого порядка за счет введения новых неизвестных. Например, уравнение

$$f(u, \partial u/\partial t, \partial^2 u/\partial t^2, \partial u/\partial x, \partial^2 u/\partial x^2, \partial^2 u/\partial x \partial t) = 0$$

можно переписать в виде системы

$$\begin{aligned} f(u, v, \partial v/\partial t, \partial u/\partial x, \partial^2 u/\partial x^2, \partial v/\partial x) &= 0, \\ \partial u/\partial t &= v, \end{aligned}$$

которая имеет первый порядок по t .

Поэтому естественно рассмотреть систему уравнений

$$\partial u_i/\partial t = f_i \quad (i = 1, \dots, l), \quad (17.10.1)$$

где для каждого i функция f_i зависит от неизвестных u_1, \dots, u_l и их производных по пространственным переменным

x, y, \dots . Однако эта система слишком специфична в одном отношении: мы приходим к ней только тогда, когда исходные уравнения (каковы бы они ни были) могут быть разрешены относительно всех первых производных du_i/dt по t . Но это не всегда так.

Чтобы дать в дальнейшем физическую интерпретацию условия разрешимости относительно производных по времени, рассмотрим линейный случай для двух независимых переменных. Если считать неизвестные $u_i(x, t)$ ($i = 1, \dots, l$) компонентами вектора $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, t)$ и предположить, что исходная система полностью сводится к системе первого порядка как по x , так и по t , то последняя запишется в виде

$$A \partial \mathbf{U} / \partial t + B \partial \mathbf{U} / \partial x + C \mathbf{U} = 0, \quad (17.10.2)$$

где A, B и C суть $(l \times l)$ -матрицы, элементы которых являются гладкими функциями от x и t . Заметим, что отсюда не следует равенство порядков по t и x для исходного уравнения. Например, уравнение теплопроводности $du/dt = \partial^2 u / \partial x^2$ можно представить в виде (17.10.2), если ввести новую функцию $v = du/dx$ и положить

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (17.10.3)$$

Рассмотрим теперь задачу Коши, или задачу только с начальными данными, определяемую уравнениями (17.10.2) совместно с начальным условием $\mathbf{U}(x, 0)$, заданным для всех x . Если $\det A \neq 0$ в некоторой области \mathcal{R} плоскости x, t , содержащей ось x (или в более общем случае часть оси x), то систему (17.10.2) можно разрешить, выразив $\partial \mathbf{U} / \partial t$ через заданную функцию $\mathbf{U}(x, 0)$ на оси x в области \mathcal{R} . После этого дифференцирование (17.10.2) по t дает уравнение для определения $\partial^2 \mathbf{U} / \partial t^2$ на оси x через функции \mathbf{U} и $\partial \mathbf{U} / \partial t$ (теперь уже известные) и т. д. Поэтому если функция $\mathbf{U}(x, 0)$ бесконечно дифференцируема по x , то определены все производные $\partial^k \mathbf{U} / \partial t^k$, и их можно использовать для построения степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) t^k \partial^k \mathbf{U} / \partial t^k |_{x, 0}. \quad (17.10.4)$$

Можно доказать (это частный случай теоремы Коши—Ковалевской), что если $\mathbf{U}(x, 0)$ — аналитическая функция, а матрицы A, B и C — аналитические функции по x и t , то ряд (17.10.4) сходится для t из некоторого интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$, где ε может зависеть от x , и сумма этого ряда как функция от x и t удовлетворяет уравнению (17.10.2). Следовательно, решение задачи с начальными данными получается в некоторой окрестности оси x в области \mathcal{R} .

Ситуация будет совсем иной, если $\det A = 0$ на оси x в области \mathcal{R} . Пусть в этом случае $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x)$ — левосторонний собственный вектор матрицы A , соответствующий нулевому собственному значению. Умножая (17.10.2) слева на \mathbf{V}^T , мы увидим, что начальная функция $\mathbf{U}(x, 0)$ должна в таком случае удовлетворять условию

$$(\mathbf{V}^T B \partial/\partial x + \mathbf{V}^T C) \mathbf{U}(x, 0) = 0 \quad (17.10.5)$$

для каждого такого левостороннего собственного вектора \mathbf{V} , но это означает, что задача с начальными данными теперь не имеет решения. Далее, если начальная функция все же удовлетворяет этому условию, то описанный выше метод степенных рядов становится вообще непригодным для построения решения, потому что производные $\partial \mathbf{U}/\partial t$, $\partial^2 \mathbf{U}/\partial t^2$ и т. д. уже не определяются однозначно на оси x при помощи уравнения (17.10.2): например, к любому значению функции $\partial \mathbf{U}/\partial t$, получающемуся из (17.10.2), можно добавить произвольное кратное правостороннего собственного вектора матрицы A , соответствующего нулевому собственному значению.

Таким образом, задача с начальными данными локально имеет единственное решение, если $\det A \neq 0$ в области \mathcal{R} . Если же это не так, то решения в общем случае не существует, а если оно все-таки существует, то оно всегда будет неединственным. Интерпретация и обобщение этого результата будут даны в следующем параграфе.

Задача [теплопроводности, сформулированная выше в терминах двух функций u и v (это отнюдь не лучшая ее формулировка), дает пример того, что $\det A = 0$ (согласно (17.10.3)). У этой задачи нет решения, если начальные значения u и v не удовлетворяют условию $v = du/dx$ на оси x , а если это условие выполнено, то решение задачи не является единственным, потому что к v можно добавить произвольную функцию от t .

17.11. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИНФОРМАЦИИ ВОДОЛЬ ХАРАКТЕРИСТИК В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Теперь сформулируем выводы предыдущего параграфа в терминах характеристик. Если, как и в § 17.8, существует линейная комбинация уравнений системы (17.10.2), в которой все величины дифференцируются по одному и тому же направлению в плоскости x, t , то говорят, что получившееся уравнение (эта линейная комбинация) имеет *характеристическую форму*. Это тот случай, когда существует такой вектор $\mathbf{W} = \mathbf{W}(x, t)$, что векторы $\mathbf{W}^T A$ и $\mathbf{W}^T B$ пропорциональны, т. е.

$$\lambda \mathbf{W}^T A = \mu \mathbf{W}^T B$$

при некоторых $\lambda = \lambda(x, t)$ и $\mu = \mu(x, t)$, не обращающихся одновременно в нуль. Тогда нужная линейная комбинация получается умножением (17.10.2) на \mathbf{W}^T слева. Предположим сначала, что один из векторов $\mathbf{W}^T A$ и $\mathbf{W}^T B$ не является тождественным нулем и поэтому отличен от нуля в некоторой области \mathcal{R} плоскости x, t . Тогда интересующая нас линейная комбинация может быть представлена в \mathcal{R} как

$$\mathbf{W}^T A (\mu \partial / \partial t + \lambda \partial / \partial x) \mathbf{U} + \mu \mathbf{W}^T C \mathbf{U} = 0,$$

если $\mathbf{W}^T A \neq 0$, и как

$$\mathbf{W}^T B (\mu \partial / \partial t + \lambda \partial / \partial x) \mathbf{U} + \lambda \mathbf{W}^T C \mathbf{U} = 0,$$

если $\mathbf{W}^T B \neq 0$. Если кривая $\mathcal{C}: x = x(s), t = t(s)$ в \mathcal{R} определяется уравнениями

$$\dot{x} = \lambda(x, t), \quad \dot{t} = t(x, t), \quad (17.11.1)$$

где точка означает дифференцирование по параметру s , то в обоих случаях \mathcal{C} является *характеристикой* или *характеристической кривой*, а линейная комбинация принимает вид

$$\mathbf{Y}^T \partial \mathbf{U} / \partial t + \mathbf{X}^T \mathbf{U} = 0 \quad \text{на } \mathcal{C}. \quad (17.11.2)$$

По своему характеру это обыкновенное дифференциальное уравнение. Если на \mathcal{C} известны $n-1$ компонент вектора \mathbf{U} , а n -я его компонента известна в одной точке кривой \mathcal{C} , то во всех других точках кривой эту компоненту можно найти интегрированием уравнения (17.11.2). Иначе говоря, *информация о решении распространяется вдоль характеристики*. Теперь рассмотрим тот случай, когда оба вектора $\mathbf{W}^T A$ и $\mathbf{W}^T B$ равны нулю в области \mathcal{R} , а $\mathbf{W}^T C$ в нуль не обращается. Тогда в силу (17.10.2) $\mathbf{W}^T C \mathbf{U} = 0$ в \mathcal{R} , и поэтому компоненты вектора \mathbf{U} снова оказываются взаимосвязанными на кривой \mathcal{C} . Наконец, если $\mathbf{W}^T A, \mathbf{W}^T B, \mathbf{W}^T C$ все равны нулю в области \mathcal{R} , то уравнения системы (17.10.2) не являются независимыми в \mathcal{R} , т. е. уравнений оказывается меньше, чем неизвестных, и поэтому решение локальной задачи с начальными данными становится неединственным.

Характеристическая кривая \mathcal{C} параллельна оси x , если на \mathcal{C} $\dot{t} = 0$, или $\mu = 0$, или же $\mathbf{W}^T A = 0$. Поэтому предыдущий результат относительно задачи с начальными данными, определяемой уравнением (17.10.2) и заданной в качестве начального условия функцией $\mathbf{U}(x, 0)$, может быть сформулирован следующим образом. Эта задача имеет единственное решение в некоторой окрестности оси x при произвольной начальной функции $\mathbf{U}(x, 0)$ тогда и только тогда, когда ось x не является характеристикой. Если же ось x является характеристикой, то некоторая информация, содержащаяся в функции $\mathbf{U}(x, 0)$, просто распространяется вдоль оси x (что налагает некоторое ограничение на

начальную функцию $U(x, 0)$ вместо того, чтобы распространяться в область $t > 0$ и тем самым участвовать в определении решения при $t > 0$.

В более общем случае начальные данные могут быть заданы вдоль кривой \mathcal{C} : $x = x(s)$, $t = t(s)$, т. е. $U(x(s), t(s))$ задается как функция параметра s . Тогда для произвольной аналитической начальной функции $U(x(s), t(s))$ существует единственное аналитическое решение уравнения (17.10.2) в некоторой окрестности кривой \mathcal{C} , если \mathcal{C} нигде не является характеристикой, т. е. нигде не касается характеристик уравнения (17.10.2). [При этом предполагается, что \mathcal{C} является аналитической кривой, т. е. $x(s)$ и $t(s)$ — аналитические функции, так что могут быть использованы разложения в степенные ряды.] Такая формулировка результата оказывается подходящей, например, для задач теории относительности, в которых временная переменная t уже не выделяется в физическом смысле. В специальной теории относительности \mathcal{C} может быть любой пространственно-подобной прямой в плоскости x, t или, в более общем случае, пространственно-подобной гиперплоскостью в пространстве-времени, а в общей теории относительности она может быть любой пространственно-подобной *гиперповерхностью*. Задача Коши для уравнений поля гравитации будет обсуждаться во втором томе.

17.12. ХАРАКТЕРИСТИКИ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. ТЕОРЕМА КОШИ — КОВАЛЕВСКОЙ

Случай трех или более независимых переменных рассматривается аналогично. Вместо (17.10.2) возьмем систему

$$A\partial U/\partial t + B\partial U/\partial x + C\partial U/\partial y + DU = 0, \quad (17.12.1)$$

в которой матрицы A, B, C и D являются гладкими функциями от x, y и t . Пусть \mathcal{S} — гладкая поверхность, заданная параметрически (параметры α и β):

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad t = t(\alpha, \beta),$$

а начальное условие имеет вид

$$U(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta), t(\alpha, \beta)) = \\ = \text{заданная на } \mathcal{S} \text{ гладкая функция от } \alpha \text{ и } \beta. \quad (17.12.2)$$

По аналогии с предыдущим параграфом поверхность \mathcal{S} называется *характеристической*, если она ориентирована так, что дифференциальные уравнения накладывают ограничения на начальную функцию (17.12.2) на \mathcal{S} . Поэтому будем искать такую линейную комбинацию уравнений системы (17.12.1), в которой все неизвестные (компоненты вектора U) дифференцируются по

направлениям, лежащим в некоторой плоскости. Если поверхность \mathcal{S} касается этой плоскости в некоторой точке P , то в P линейная комбинация может быть выражена через производные по α и β , и поэтому полученное дифференциальное уравнение (эта линейная комбинация) накладывает ограничения на начальную функцию (17.12.2) в точке P . При таких обстоятельствах эта плоскость является *характеристической плоскостью* в точке P , а P — *характеристической точкой* поверхности \mathcal{S} . Если все точки поверхности \mathcal{S} характеристические, то она представляет собой *характеристическую поверхность* рассматриваемой системы уравнений.

Предположим, что нужная нам линейная комбинация получается умножением (17.12.1) слева на вектор $\mathbf{W} = \mathbf{W}(x, y, t)$. В этой линейной комбинации неизвестная функция U_i дифференцируется по направлению (в пространстве x, y, t), направляющие косинусы которого пропорциональны величинам

$$(\mathbf{W}^T A)_i, (\mathbf{W}^T B)_i, (\mathbf{W}^T C)_i.$$

Поэтому если λ, μ, ν — направляющие косинусы нормали к \mathcal{S} в точке P , то P будет характеристической точкой поверхности \mathcal{S} при выполнении условия

$$\lambda \mathbf{W}^T A + \mu \mathbf{W}^T B + \nu \mathbf{W}^T C = 0. \quad (17.12.3)$$

Это означает, что \mathbf{W} должен быть левосторонним собственным вектором матрицы $\lambda A + \mu B + \nu C$, соответствующим нулевому собственному значению; условие же существования нулевого собственного значения имеет вид

$$\det(\lambda A + \mu B + \nu C) = 0. \quad (17.12.4)$$

Три неизвестные λ, μ, ν должны удовлетворять также условию $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, так что для них получилось всего два уравнения. Поэтому в общем случае можно ожидать существования одного или более однопараметрических семейств решений. Если эти решения вещественны, то существуют соответствующие однопараметрические семейства характеристических плоскостей. Для рассматриваемых ниже (см. упражнение 3) уравнений гидродинамики в случае двух пространственных переменных имеются два таких семейства: одно состоит из всех плоскостей, касательных к траектории частицы в пространстве x, y, t , а второе — из всех плоскостей, касательных к звуковому конусу. Конечно, гидродинамика нелинейна (см. следующий абзац). Но для нее ни одна поверхность (плоскость) $t = \text{const}$ не может быть характеристической, так как при совпадении одной из характеристических плоскостей с плоскостью $t = \text{const}$ возникала бы бесконечная скорость распространения сигнала, тогда как в гидродинамике при любом выборе начальных данных скорость жидкости и ско-

рость звука конечны, а максимальная скорость распространения сигнала равна их сумме. Это также следует из того факта, что матрица A в уравнении (17.12.1) равна I для случая гидродинамики.

Предположим теперь, что матрицы коэффициентов A , B , C и D в уравнении (17.12.1) зависят не только от x , y и t , но и от компонент вектора \mathbf{U} . (Именно так обстоит дело в гидродинамике — см. § 17.2.) Тогда уравнения (17.12.1) называются *квазилинейными*. Определения и выводы остаются теми же самыми, что и для линейного случая, но точка зрения несколько изменяется: для данной системы уравнений поверхность \mathcal{S} может быть характеристической или не быть ею в зависимости от начальных функций, заданных на \mathcal{S} , т. е. от компонент векторного поля (17.12.2) на \mathcal{S} , поскольку A , B и C зависят от \mathbf{U} . Часто это формулируется в виде указания на то, являются или не являются заданные начальные функции характеристическими относительно заданной поверхности \mathcal{S} .

Задача Коши (задача определения $\mathbf{U}(x, y, t)$ по данным Коши (17.12.2) при помощи дифференциального уравнения (17.12.1)) называется аналитической, если поверхность \mathcal{S} и все рассматриваемые функции являются аналитическими. Чтобы поверхность \mathcal{S} была аналитической, функции $x(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$ и $t(\alpha, \beta)$ должны быть аналитическими, а ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial t}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial t}{\partial \beta} \end{pmatrix}$$

должен быть равен 2 всюду на \mathcal{S} . [Чтобы убедиться, что это последнее условие в действительности необходимо, заметим, что уравнения $x(\alpha, \beta) = \alpha^3$, $y(\alpha, \beta) = \beta$, $t(\alpha, \beta) = \alpha^2$ определяют поверхность, которая имеет точки возврата на оси y , где ранг этой матрицы равен только 1.]

Теперь сформулируем без доказательства один из вариантов теоремы Коши — Ковалевской для случая трех независимых переменных x , y , t . Обобщение на случай большего числа независимых переменных будет очевидным.

Теорема. *Предположим, что аналитические данные Коши (17.12.2) заданы на аналитической поверхности \mathcal{S} и не являются характеристическими относительно \mathcal{S} в некоторой принадлежащей \mathcal{S} двумерной окрестности точки P . Предположим также, что матрицы A , B и C в (17.12.1) являются аналитическими функциями от x , y , t и компонент вектора \mathbf{U} . Тогда найдется такая трехмерная окрестность точки P , в которой задача Коши имеет единственное решение.*

В наиболее распространенном случае в качестве \mathcal{S} берется плоскость x, y ($t=0$), и условия теоремы удовлетворяются во всех ее точках. Тогда если K — любая компактная область в этой плоскости, то найдется такой интервал $(-\varepsilon, \varepsilon)$, что задача имеет единственное решение для всех $(x, y) \in K$ и всех $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите характеристики уравнения теплопроводности, если оно записано в виде системы (17.10.2), (17.10.3). Выше утверждалось, что если A — вырожденная матрица (т. е. $\det A = 0$), то метод степенных рядов вообще неприменим, поскольку производные $\partial U/\partial t$, $\partial^2 U/\partial t^2$ и т. д. в общем случае не определяются однозначно при помощи этого метода. Согласуйте это утверждение с тем фактом, что для уравнения теплопроводности решение $u(x, t)$ при $t > 0$ однозначно определяется заданием $u(x, 0)$.

2. Рассмотрите характеристики системы уравнений Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \partial v / \partial x, \quad \partial v / \partial t = -\partial u / \partial x;$$

3. Рассмотрим двумерное течение жидкости, когда давление p , плотность ρ и скорость $\mathbf{u} = (u, v)$ являются функциями от x, y и t . Взяв за исходные уравнения § 17.2 и простое уравнение состояния $p = (\gamma - 1) \rho \mathcal{E}$, покажите, что уравнения в характеристической форме запишутся так:

$$Dp/Dt - c^2 D\rho/Dt = 0, \quad (17.12.5)$$

$$\boldsymbol{\mu} \cdot (D\mathbf{u}/Dt + (1/\rho) \nabla p) = 0, \quad (17.12.6)$$

$$\rho c (\boldsymbol{\lambda} D/Dt + c \nabla) \cdot \mathbf{u} + (D/Dt + c \boldsymbol{\lambda} \cdot \nabla) p = 0. \quad (17.12.7)$$

Все векторы, входящие в эти уравнения, имеют по две компоненты; в частности, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, а $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\mu}$ — произвольные единичные векторы в плоскости x, y . Через D/Dt обозначен оператор

$$D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla = \partial/\partial t + u \partial/\partial x + v \partial/\partial y,$$

т. е. оператор дифференцирования вдоль траекторий частиц, а c — адиабатическая скорость звука, равная $\sqrt{\gamma p/\rho}$. Эти уравнения являются обобщением уравнений (17.9.3). В уравнении (17.12.6) направления дифференцирования ограничены плоскостью, касательной к траектории частицы и параллельной вектору $\boldsymbol{\mu}$; в (17.12.7) они ограничены плоскостью, касательной к звуковому конусу и такой, что линия пересечения этой плоскости с плоскостью x, y перпендикулярна вектору $\boldsymbol{\lambda}$.

Для некоторых задач условие аналитичности везде может быть заменено условием гладкости. В частности, это верно для гиперболических уравнений, включая уравнения гидродинамики, при условии что гладкость означает однократную непрерывную дифференцируемость при определенных разумных ограничениях (см. книги Куранта и Гильберта [1962] или Гарабедяна [1964]). У решения могут существовать разрывы в высших (и, при обычных условиях, даже в первых) производных; на самом деле они распространяются вдоль характеристик. Однако метод Коши — Ковалевской непригоден для рассмотрения ударных волн и других главных особенностей. Более того, оказывается, что для существования решения при наличии контактного разрыва или поверхности скольжения сама эта поверхность и течение по обе ее

стороны должны быть аналитическими или по крайней мере кусочно аналитическими, а не только гладкими. Причиной этого являются неустойчивости Гельмгольца и Тейлора (см. § 17.15).

17.13. ЗАДАЧА РИМАНА И ЕЕ ОБОБЩЕНИЯ

Простейшей задачей с негладкими начальными данными является классическая задача Римана. Это задача с одной пространственной переменной, когда функции u , p и ρ в начальный момент постоянны, за исключением разрывов в точке $x=0$, где они претерпевают скачки от значений u_1 , p_1 , ρ_1 при $x < 0$ до значений u_2 , p_2 , ρ_2 при $x > 0$.

Примером практической реализации такой задачи является ударная труба. Это длинная труба или трубка, разделенная на две части тонкой поперечной диафрагмой в точке $x=0$. Воздух накачивается в одну из частей (например, в ту, для которой $x < 0$) до высокого давления p_1 , а в другой части остается под более низким давлением p_2 . После установления теплового и механического равновесия температура везде постоянна, так что в силу закона Бойля $p_1/\rho_1 = p_2/\rho_2$, а $u_1 = u_2 = 0$. После этого в момент $t=0$ диафрагма разрывается или быстро убирается. Тогда ударная волна будет двигаться по воздуху вправо, начиная от точки $x=0$, а волна разрежения — влево.

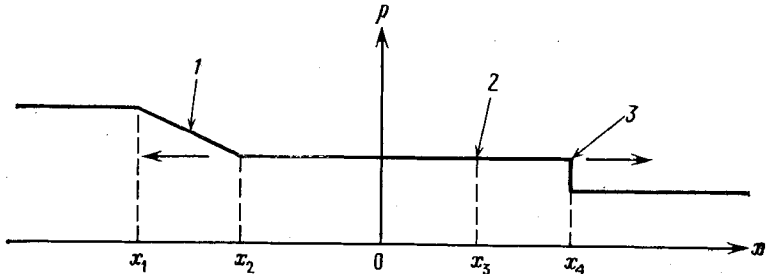


Рис. 17.2. Профиль давления в задаче Римана.

1 — волна разрежения; 2 — контактный разрыв; 3 — ударная волна.

Профиль давления в некоторый момент $t > 0$ будет таким, как показано на рис. 17.2. Первоначальная граница раздела, на которой раньше стояла диафрагма, уже находится в точке $x=x_3$, где имеется контактный разрыв (см. § 17.5), на котором давление непрерывно, а температура и плотность разрывны. (Сразу левее x_3 воздух расширился, а правее сжался.) Каждая из точек x_1 , x_2 , x_3 , x_4 движется от начала координат со своей постоянной скоростью. Нетрудно установить, что существует только одно решение этой задачи, удовлетворяющее условиям на скачке и условию энтропии в точках разрыва и дифференциальным урав-

нениям между ними. Легко видеть, что характер решения будет именно таким, как только что было описано.

Другим примером такого рода является столкновение двух облаков первоначально холодного межзвездного газа с границами в виде параллельных плоскостей. В момент столкновения $p_1 = T_1 = p_2 = T_2 = 0$, а $u_1 > 0$ и $u_2 < 0$. В этом случае образуются две ударные волны, движущиеся от плоскости столкновения внутрь каждого облака.

Общий случай с произвольными значениями $u_1, u_2, p_1, p_2, \rho_1, \rho_2$ был исследован Риманом в 1860 г. (см. книгу Куранта и Фридрикса [1948]).

По-видимому, простейшее обобщение задачи Римана получится в том случае, если допустить в ней не только постоянные, но и аналитические по обе стороны от точки $x=0$ функции при $t=0$. Этой задаче было посвящено много работ. В них доказаны существование и единственность решения для упрощенных вариантов этой задачи (например, когда имеются всего одна функция и одно дифференциальное уравнение). Однако общий случай еще нельзя считать исследованным до конца.

Соответствующая многомерная задача с начальными разрывами на искривленной в общем случае поверхности пока что очень далека от завершения и, по-видимому, еще долго останется в таком состоянии.

Соображения по поводу кусочно аналитических задач с начальными данными сформулированы в общих чертах в § 17.16. Предварительно для этой цели рассматриваются спонтанное образование ударных волн и неустойчивости Гельмгольца и Тейлора.

17.14. СПОНТАННОЕ ОБРАЗОВАНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН

Предположим, что газ в состоянии покоя заполняет длинную трубку с поршнем на одном из ее концов. При $t=0$ поршень начинает вдвигаться в трубку с непрерывным ускорением. Мы покажем, что возникающее при этом течение газа будет оставаться гладким до определенного момента времени t^* , а в этот момент в некоторой точке внутри газа образуется ударная волна, которая начнет двигаться по газу в сторону от поршня. Интенсивность ударной волны равна нулю при $t=t^*$, но становится положительной и возрастает при $t > t^*$. Таким образом, в течении, которое сначала было гладким, со временем может образоваться особенность. Это явление наблюдается в атмосфере некоторых пульсирующих звезд: ударная волна формируется в каждом цикле на стадии ускоренного разлета, когда оболочка движется наружу под действием расширяющегося внутризвездного вещества. Тогда ударная волна также движется наружу через оставшуюся атмос-

феру и исчезает в окружающем звезду вакууме, по-видимому, нагревая корону звезды при прохождении через нее.

Обозначим координату x поршня в момент t через $\xi(t)$ и предположим, что $\xi(t) = 0$ при $t < 0$. Газ находится в области $x > \xi(t)$. Предположим, что ускорение поршня $\ddot{\xi}(t) > 0$ при $t > 0$ и либо непрерывно при всех t , либо в крайнем случае имеет скачок при $t = 0$. При $t < 0$ мы имеем $u = 0$ и $c = c_0$ для всех $x > 0$. Уравнения в характеристической форме, описывающие течение, приведены в (17.9.4), (17.9.5). Характеристические кривые $x_{\pm}(t)$ в плоскости x, t задаются уравнениями

$$dx_+/dt = u + c, \quad dx_-/dt = u - c. \quad (17.14.1)$$

Вдоль каждой запаздывающей характеристики $x_-(t)$ величина $u - \sigma = u - 2c/(\gamma - 1)$ постоянна. Более того, она постоянна для всего течения, пока в нем не возникла ударная волна, так как $u = 0$ и $c = c_0$ при $t = 0$ для всех x . Таким образом,

$$u - 2c/(\gamma - 1) = -2c_0/(\gamma - 1). \quad (17.14.2)$$

Вдоль каждой опережающей характеристики $x_+(t)$ величина $u + 2c/(\gamma - 1)$ также постоянна, и поэтому u и c в отдельности постоянны вдоль нее, так что каждая опережающая характеристика в плоскости x, t является прямой с тангенсом угла наклона, равным $(u + c)^{-1}$. Запаздывающие характеристики остаются прямыми только до их пересечения с опережающей характеристикой, выходящей из начала координат (см. рис. 17.3).

Вдоль опережающей характеристики, начинающейся на поршне в момент t_0 , величины u, c, ρ и p определяются из системы уравнений

$$u = \dot{\xi}(t_0), \quad u - 2(c - c_0)/(\gamma - 1) = 0, \quad c^2 = \gamma p/\rho, \quad p = K\rho^\gamma, \quad (17.14.3)$$

а уравнение самой характеристики имеет вид

$$\begin{aligned} x_+(t) &= \xi(t_0) + (u + c)(t - t_0) = \\ &= \xi(t_0) + [c_0 + 1/2(\gamma + 1)\dot{\xi}(t_0)](t - t_0) \stackrel{\text{def}}{=} x_+(t, t_0). \end{aligned} \quad (17.14.4)$$

Из (17.14.3) следует, что пока $\dot{\xi}(t_0)$ возрастает, все величины u, c, ρ, p будут возрастающими функциями от t_0 . Поэтому тангенсы углов наклона, равные $(u + c)^{-1}$, уменьшаются при движении влево по семейству опережающих характеристик, и любые две такие характеристики обязательно пересекутся, если они продолжены вперед достаточно далеко. Две характеристики, начинающиеся при t_0 и $t_0 + \varepsilon$, пересекутся в момент t_1 , если

$$\partial x_+(t_1, t_0)/\partial t_0 = 0$$

(при этом были отброшены величины порядка ε^2). Учитывая это условие и считая, что $0 < \dot{\xi}(t_0) < \infty$, из уравнения (17.14.3)

получаем

$$t_1 = t_0 + \frac{2}{(\gamma-1)\xi(t_0)} \left[c_0 + \frac{\gamma-1}{2} \dot{\xi}(t_0) \right] \stackrel{\text{def}}{=} t_1(t_0). \quad (17.14.5)$$

Кривая на плоскости x, t , заданная в виде

$$x = x_+(t_1(t_0), t_0), \quad t = t_1(t_0) \quad (t_0 - \text{параметр}), \quad (17.14.6)$$

является огибающей характеристик; она изображена на рис. 17.3 линией с резким изломом. Мы видим, что эта кривая имеет точку возврата, соответствующую такому значению t_0 , при котором функция $t_1(t_0)$ достигает минимума.

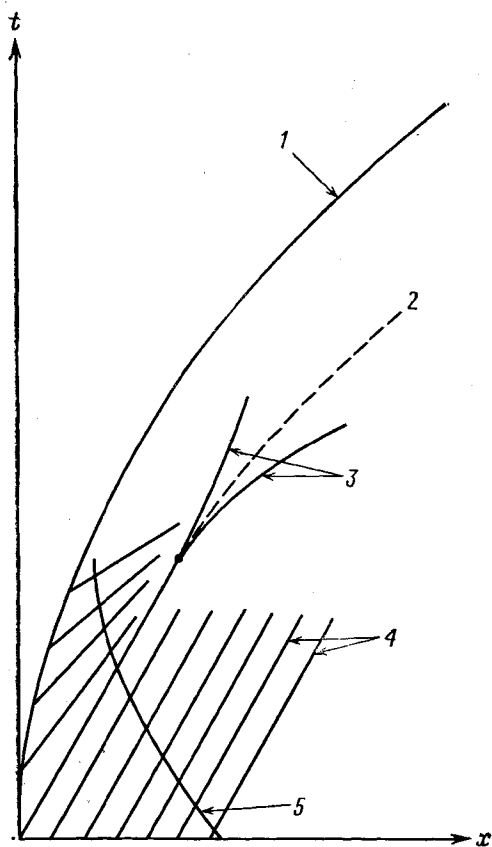


Рис. 17.3. Спонтанное образование ударной волны.

1 — кривая движения поршня $x = \xi(t)$; 2 — ударная волна; 3 — огибающая; 4 — опережающие характеристики; 5 — запаздывающая характеристика.

Ударная волна возникает в точке возврата огибающей и затем движется так, как это схематически указано на рисунке штриховой линией. Чтобы увидеть образование ударной волны, заметим, что ρ , ρ , u , c — возрастающие функции от t_0 , но скорость изменения x как функции от t_0 при фиксированном $t = t_1$ равна нулю в точке возврата, и поэтому ρ , u и c как функции от x имеют там бесконечные производные.

Изучение дальнейшего развития ударной волны становится более сложным, так как теперь нужно учитывать условия Ренкина — Гюгонно и течение уже нельзя считать изэнтропическим. Можно показать, что интенсивность ударной волны сначала возрастает как $(t - t^*)^{1/2}$, где t^* — минимум функции $t_1(t_0)$.

17.15. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ГЕЛЬМГОЛЬЦА И ТЕЙЛОРА

Чтобы задача с начальными данными была корректно поставленной по Адамару, необходимо не только существование единственного решения для всех начальных состояний системы, определяемых некоторым «разумным» классом начальных функций, но требуется еще и непрерывная зависимость (в некотором смысле) этого решения от начальных данных (см. гл. 16). Примером отсутствия такой непрерывной зависимости служит неустойчивость Гельмгольца.

Пусть некоторая плоскость разделяет две области (два полупространства), в каждой из которых со своей для каждой области скоростью равномерно движется жидкость, скользя без трения по этой плоскости. Введя малое возмущение начальных данных путем перехода от плоской поверхности скольжения к волнистой синусоидальной с малой амплитудой отклонений и соответствующего незначительного изменения течения вблизи этой поверхности, можно получить решение, в котором амплитуда возмущения со временем возрастает.

Этот рост является экспоненциальным до тех пор, пока амплитуда мала по сравнению с длиной волны, т. е. для линеаризованной задачи (см. ниже). Именно по этой причине легкий ветерок порождает волны на поверхности водоема. Описанное возрастание малых возмущений известно под названием *неустойчивости Гельмгольца*. (При этом предполагается, что скорость скольжения не превосходит определенной части скорости звука — при больших относительных скоростях акустические явления подавляют эту неустойчивость.) Более того, скорость экспоненциального роста таких возмущений неограниченно возрастает, если длина волны λ первоначальных колебаний поверхности скольжения стремится к нулю. Следовательно, для любых заданных $\epsilon > 0$ и $M > 0$ можно найти такое достаточно малое λ , что начальное «инфинитезимальное» возмущение с длиной волны λ возрастет более чем в M раз

за промежуток времени, меньший, чем ϵ . Но это и означает, что зависимость решения линеаризованной задачи от начальных данных не является непрерывной.

Если на границе между двумя жидкостями существует поверхностное натяжение (его лучше было бы назвать натяжением поверхности раздела), то возмущения с длиной волны, меньшей некоторого λ_0 , не возрастают, и поэтому непрерывная зависимость решения от начальных данных восстанавливается, даже если длинноволновые возмущения все еще остаются неустойчивыми. Волны на поверхности водоема стабилизируются под действием как поверхностного натяжения, так и гравитации. С другой стороны, когда поверхность скольжения образуется внутри данной жидкости, например, при движении восходящих воздушных потоков или при пересечении двух ударных волн (см. обсуждение задачи о маховском отражении в § 17.17), стабилизирующие факторы, вообще говоря, отсутствуют.

Предыдущие соображения основываются на линеаризованной теории неустойчивости. Хотя пока еще нет количественной теории нелинейных процессов, все же можно сделать несколько замечаний качественного и предположительного характера. Пусть невозмущенная поверхность между жидкостями — это плоскость x, y , а возмущенная поверхность \mathcal{S} задана уравнением $z = z(x, y, t)$. [Линеаризованная теория основывается на предположении, что $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$ везде $\ll 1$.] Простоты ради мы не будем учитывать влияние гравитации, поверхностного натяжения и сжимаемости жидкости и предположим, что течение является безвихревым по обе стороны поверхности \mathcal{S} , так что при любом t скорость выражается через свой потенциал ϕ как $\mathbf{u} = \nabla\phi$, где $\nabla^2\phi = 0$ в каждой области. Тогда задача с начальными данными формулируется следующим образом. Величины

$$z(x, y, t) \quad \text{и} \quad \partial z(x, y, t)/\partial t \quad (17.15.1)$$

заданы при $t=0$ как функции от x и y . Потенциал скорости $\phi(x, y, z, t)$ определяется в каждой области для любого t по функциям (17.15.1) при помощи уравнения Лапласа $\nabla^2\phi = 0$ и следующих условий: (1) нормальная компонента скорости \mathbf{u} непрерывна при переходе через \mathcal{S} и согласована на \mathcal{S} с нормальной компонентой скорости самой поверхности \mathcal{S} и (2) \mathbf{u} стремится к $(\pm V/2, 0, 0)$ при $z \rightarrow \pm \infty$, где V — относительная скорость или скорость скольжения. (Заметим, что потенциал ϕ не является непрерывным при переходе через \mathcal{S} .) Теперь движение определяется из того условия, что давление p непрерывно при переходе через \mathcal{S} и удовлетворяет уравнению

$$\rho_0(\partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = 0. \quad (17.15.2)$$

Рассмотрим решение задачи, для которой

$$z = z(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(t) e^{ikx}. \quad (17.15.3)$$

(Здесь следовало бы учесть и зависимость от y , но для упрощения записи она опускается.) В линейном приближении каждый член этой суммы можно рассматривать независимо от остальных. Тогда можно найти зависимость от времени (см. книгу Ландау и Лифшица [1954, § 30]), что дает

$$c_k(t) = A_k e^{kVt/2} + B_k e^{-kVt/2} \quad (17.15.4)$$

до тех пор, пока амплитуда мала по сравнению с длиной волны, т. е. $|c_k| \ll k$. Коэффициент в одном из показателей, а именно $|k|V/2$, стремится к бесконечности при $k \rightarrow \infty$. Поэтому для сходимости ряда вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \exp [ikx + (|k|V/2)t]$$

при некотором $t = t_0 > 0$ необходимо, чтобы

$$d_k = o(\exp[-(|k|V/2)t_0]) \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

а для выполнения этого условия начальная поверхность должна быть аналитической: если она не является аналитической, то решение нельзя получить методом рядов Фурье.

Поведение поверхности раздела при больших амплитудах (когда линейное приближение становится непригодным) изучалось экспериментально и при помощи численных расчетов. Для поверхности, которая в начальный момент имела вид

$$z = a_k(t) \cos kx,$$

установлено, что когда амплитуда становится сравнимой с длиной волны, т. е. когда $a_k \approx 1/k$, возрастание $a_k(t)$ перестает быть экспоненциальным и становится приближенно линейным с коэффициентом $\dot{a}_k(t) \approx \alpha V$, где α — постоянная порядка единицы. Зависимость от x также изменяется.

Наблюдения показывают, что при еще больших амплитудах ($a_k \gg 1/k$) поверхность раздела разрушается и заменяется турбулентным слоем, толщина которого со временем возрастает благодаря турбулентной диффузии. Мелкие начальные иррегулярности любого рода вызывают немедленное локальное разрушение этой поверхности.

С другой стороны, если начальная поверхность является кусочно аналитической, например состоящей из плоских полос зигзагообразным поперечным профилем, изображенным на рис. 17.4, то, согласно предположению из следующего параграфа (если оно

верно), должно существовать кусочно аналитическое решение; характер этого решения пока неизвестен.

Неустойчивость Тейлора подобна неустойчивости Гельмгольца. В этом случае нет скольжения вдоль \mathcal{S} . Вместо этого рассматриваются две жидкости с различными плотностями. Эта система

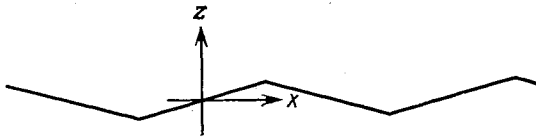


Рис. 17.4. Поперечный профиль начальной поверхности, состоящей из плоских полос.

испытывает ускорение в направлении от тяжелой жидкости к легкой. Примером такой системы с ускорением, создаваемым силой тяжести, является вода в верхней части сосуда, поддерживаемая давлением воздуха, находящегося в нижней его части. Если поверхность раздела — в точности горизонтальная плоскость, то система имеет равновесную конфигурацию, однако эта конфигурация неустойчива. Волны на поверхности раздела содержат зависящий от времени множитель вида $e^{\pm at}$, а не $\sin at$ или $\cos at$, как обычные волны на поверхности воды. Снова коэффициент a неограниченно возрастает (при отсутствии поверхностного натяжения), если длина волны стремится к нулю.

17.16. ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ КУСОЧНО АНАЛИТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Из-за отсутствия доказательств существования и единственности удобно принять некое рабочее предположение в качестве отправной точки для дальнейших исследований. Для гидродинамических задач с начальными данными представляется разумным предположить, что если начальные данные являются кусочно аналитическими, то существует единственное кусочно аналитическое решение по крайней мере для некоторого конечного интервала времени. При этом считается, что уравнение состояния также представляется кусочно аналитической функцией. Сделанные выше замечания о неустойчивостях Гельмгольца и Тейлора показывают, что кусочную аналитичность нельзя во всех случаях заменить кусочной гладкостью.

Под кусочной аналитичностью начальных данных подразумевается следующее. Пространство может быть разбито на ячейки, в каждой из которых описывающие течение функции являются аналитическими при $t=0$. Ячейки разделены аналитическими

поверхностями, при переходе через которые эти функции претерпевают разрывы первого рода, а поверхности ограничены аналитическими кривыми, которые служат ребрами ячеек. Пока нет полной ясности в том, какого рода особенности функций или поверхностей допустимы на ребрах и в угловых точках ячеек (несколько примеров таких особенностей будет описано в следующем параграфе), и поэтому даже в формулировке предположения должна оставаться некоторая неопределенность.

Кусочная аналитичность решения означает, что пространство-время может быть аналогично разбито на ячейки и т. д.; это, конечно, не означает, что разбиение пространства остается все время таким же, как при $t=0$, потому что со временем в течении могут возникать ударные волны и другие особенности. В задаче Римана при $t=0$ одномерное пространство разбивается на две области аналитичности ($x > 0$ и $x < 0$), но при $t > 0$, согласно рис. 17.2, таких областей будет пять.

17.17. ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЙ

Несколько примеров особенностей можно получить при рассмотрении явления маховского отражения. Пусть плоская стационарная ударная волна движется по ударной трубе слева направо и при этом набегаем на наклонную плоскость или клин, расположенный на дне трубы, как показано на рис. 17.5. Возмущение

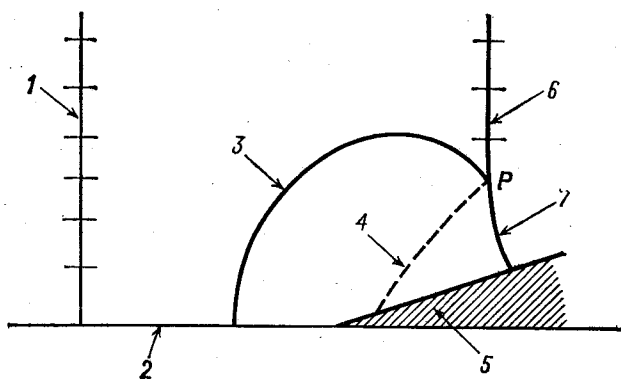


Рис. 17.5. Маховское отражение.

1 — первичная ударная волна; 2 — дно ударной трубы; 3 — вторичная ударная волна; 4 — поверхность скольжения; 5 — клин; 6 — первичная ударная волна; 7 — стембель Маха.

зарождается в тот момент, когда фронт ударной волны касается основания клина, а затем распространяется дальше от этой точки; криволинейной границей возмущения является вторичная ударная волна.

При определенных условиях, наложенных на угол клина и интенсивность первичной ударной волны (см. работы Бликни и Таубы [1949] и Даффа [1962]), первичная и вторичная ударные волны встречаются в так называемой *тройной точке* P над клином; от этой точки и до поверхности клина первичная и вторичная волны сливаются в одну ударную волну (также криволинейной формы), называемую *стеблем Маха*. Истечение вниз из тройной точки порождает также поверхность скольжения, показанную штриховой линией. Элемент жидкости непосредственно под поверхностью скольжения был сжат объединенной ударной волной, а элемент непосредственно над ней был сжат до того же окончательного давления (давление непрерывно при переходе через поверхность скольжения) последовательно двумя ударными волнами. Сжатие объединенной ударной волной приводит к большему увеличению энтропии, так как увеличение энтропии при прохождении конкретной ударной волны грубо оценивается как куб коэффициента сжатия этой волны. Поэтому температура и удельный объем снизу от поверхности будут больше, чем сверху от нее, так что скорость течения в сторону от ударных волн должна быть больше снизу от поверхности, чтобы обеспечивалось сохранение массы.

Для этого течения выполняется закон подобия, потому что в формулировку задачи не входит никакой характерной длины. (Ясно, что длина и поперечные размеры ударной трубы несущественны, и при обсуждении закона подобия их можно считать бесконечными.) Это означает, что полная картина течения в момент t_2 (началом отсчета времени служит момент достижения первичной ударной волной основания клина) является точно такой же, как и в момент t_1 , если осуществить преобразование подобия с коэффициентом t_1/t_2 . Иначе говоря, функции u , v , p и ρ зависят только от аргументов x/t и y/t , где x и y — декартовы координаты с началом отсчета в вершине клина.

Кажется очевидным, что ударные волны и поверхность скольжения должны быть аналитическими кривыми (за исключением, возможно, самой тройной точки P), а описывающие течение переменные в каждой области должны быть аналитическими функциями аргументов $\xi = x/t$ и $\eta = y/t$. Это наводит на мысль, что на таких кривых координаты $\xi - \xi_0$ и $\eta - \eta_0$ должны быть степенными рядами относительно длины дуги σ (в переменных подобия $d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2$), где ξ_0 и η_0 — координаты точки P , а в каждой из двух областей, ограниченных этими кривыми, u , v , p и ρ должны быть степенными рядами по двум переменным $\xi - \xi_0$ и $\eta - \eta_0$. Эти функции равны известным постоянным в каждой из областей спереди первичной ударной волны и сзади нее. Однако нетрудно убедиться в том, что ни одно решение такого вида не может удовлетворять одновременно условиям на скачке, диффе-

ренциальным уравнениям и закону подобия. Можно предположить, что одна или более кривых имеют бесконечную кривизну в точке P , подобно функции $y = |x|^{3/2}$ в начале координат. Для такого случая можно попытаться использовать представления в виде степенных рядов с дробными показателями степени, но этот подход также ничего не дает. Ничего не получается и при помощи представлений, в которые входят логарифмы. Пока что характер особенности в точке P остается неясным.

Течение в окрестности вершины клина служит примером течения в окрестности угловой точки. Для безвихревого течения несжимаемой жидкости решение выражается через дробные степени ξ и η (см. книгу Ландау и Лифшица [1954, § 10, задача 6]), и, по-видимому, здесь это верно даже тогда, когда течение является завихренным, а жидкость — сжимаемой.

Эти два примера, как и многие другие, показывают, что формулировка кусочно аналитических задач с начальными данными должна допускать не только разрывы первого рода, но и другие особенности, однако подходящий класс особенностей в настоящее время еще не очерчен.

Приложение к главе 17 (разделы А — Д).

ЗАДАЧА ОБ ОТСОЕДИНЕННОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Представление решения задачи Коши в виде степенного ряда было предложено Коши, а позднее Ковалевской с единственной целью доказать существование решения. До появления быстродействующих ЭВМ не могло быть и речи об использовании метода степенных рядов для проведения реальных численных расчетов, за исключением достаточно очевидных случаев. Даже при наличии современной ЭВМ нужно преодолеть ряд трудностей, чтобы сделать этот метод пригодным для практических целей. Успешно работающие методики были предложены Рихтмайером [1957] и Левисом [1959], которые ввели специальные правила для выполнения на ЭВМ действий трех различных видов (арифметических действий, алгебраических преобразований и действий с аналитическими функциями), что сделало метод степенных рядов пригодным для практики и очень точным в применении к задаче о расчете отсоединенной ударной волны, на которой он проверялся. Эти правила — арифметика с подсчетом значащих цифр, преобразование степенных рядов и аналитическое продолжение решения — описаны в данном приложении после краткого обсуждения постановки задачи об отсоединенной ударной волне.

17.А. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наша цель состоит в том, чтобы рассчитать стационарное двумерное течение сжимаемой жидкости, когда аналитические данные Коши заданы на аналитической кривой, не имеющей характеристических точек. Описывающие течение величины (давление, плотность, компоненты скорости и т. д.) представляются степенными рядами по двум пространственным переменным или по криволинейным координатам, одна из которых постоянна на заданной кривой. Разложение делается относительно некоторой точки на кривой. Тогда определение коэффициентов разложения по заданным начальным данным (значениям на кривой) при помощи гидродинамических уравнений в частных производных становится

формальной численной процедурой, которая выполняется машинными программами по преобразованию степенных рядов. После вычисления достаточно большого числа коэффициентов (скажем, нескольких сотен для каждой искомой величины) ряды суммируются, в результате чего получается решение вблизи той точки, относительно которой было сделано разложение. В обоснованности применения такой численной процедуры можно убедиться эмпирически, а именно: (1) сравнивая результаты, полученные в данной точке течения из разложений относительно двух или более соседних точек на кривой, (2) проверяя выполнение закона Бернулли и (3) проверяя постоянство энтропии вдоль линии тока.

Для изучения был выбран частный случай этой задачи — течение между отсоединенной ударной волной и осесимметричным затупленным телом наподобие головной части снаряда, движущегося при большом числе Маха в воздухе (без учета вязкости). Общие характеристики этого течения хорошо известны. Взаимное расположение ударной волны, тела и линий тока показано на рис.

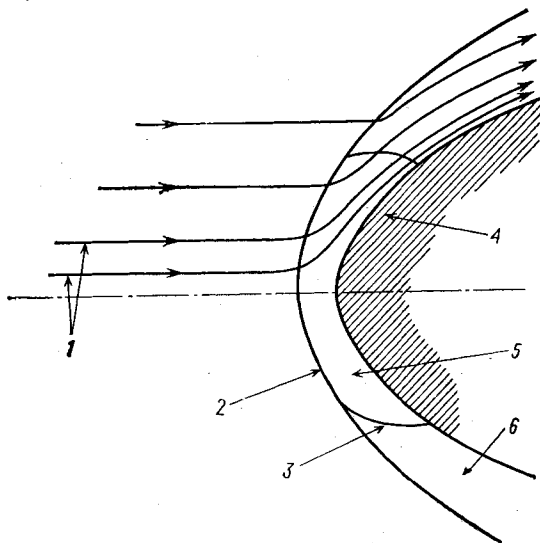


Рис. 17.6. Отсоединенная ударная волна.

1 — линии тока; 2 — ударная волна; 3 — звуковая линия; 4 — тело; 5 — область дозвукового течения; 6 — область сверхзвукового течения.

17.6. Выбрана такая система отсчета, в которой тело находилось бы в состоянии покоя. Зазор между ударной волной и поверхностью тела составляет примерно одну десятую радиуса кривизны в передней точке поверхности и в действительности зависит от числа Маха и уравнения состояния. Вблизи оси течение за ударной волной является дозвуковым, но с удалением от оси оно становится сверхзвуковым. При обычных условиях толщина примыкающего к поверхности тела пограничного слоя жидкости пренебрежимо мала, и поэтому предположение об отсутствии вязкости во всей области течения вполне оправдано.

Как и в ряде других подходов к этой задаче, мы начнем с предположения, что форма ударной волны известна, чтобы в дальнейшем рассчитать ту форму тела, которая порождает такую ударную волну. Если давление, плотность и скорость воздуха перед ударной волной известны, то их значения непосредст-

венно за ней определяются из условий Ренкина—Гюгионо на скачке. Если выбранные нами поверхность ударной волны и уравнение состояния являются аналитическими, то описывающие течение величины непосредственно за волной (данные Коши) будут аналитическими функциями подходящей координаты вдоль волны и могут быть разложены в ряд по степеням этой координаты. Подготовительная программа вычисляет коэффициенты этих разложений; основная программа вычисляет оставшиеся коэффициенты полного разложения по двум переменным, исходя из дифференциальных уравнений в частных производных; наконец, последняя программа вычисляет различные величины путем суммирования степенных рядов во всех заданных точках течения.

Математическая формулировка задачи сводится к следующему. Пусть z и r —цилиндрические координаты. Предположим, что течение симметрично относительно оси z , а форма ударной волны задана уравнением

$$z = G(r) = G_0 + G_2 r^2 + G_4 r^4 + \dots \quad (17.A.1)$$

В области перед ударной волной, т. е. при $z < G(r)$ (на рис. 17.6 она слева), описывающие течение величины постоянны, а скорость параллельна оси z . Воздух считается идеальным газом с уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1) \mathcal{E} \rho \quad (17.A.2)$$

в обозначениях § 17.2. Перед волной при надлежащем выборе единиц

$$p = 1, \quad \rho = 1, \quad u = U, \quad v = 0. \quad (17.A.3)$$

Здесь u и v —осевая и радиальная компоненты скорости жидкости, а U —постоянная. Скорость звука перед волной равна $\sqrt{\gamma p / \rho} = \sqrt{\gamma}$, и поэтому число Маха $M = U / \sqrt{\gamma}$.

За волной описывающие течение переменные зависят от z и r . Удобно ввести криволинейные координаты x и y таким образом, чтобы

$$\begin{aligned} x &= z - G(r), & z &= x + g(y), \\ y &= r - r_0, & r &= r_0 + y, \end{aligned} \quad (17.A.4)$$

где r_0 —положительная постоянная, $g(y) = G(r_0 + y)$, y —радиальная координата, измеряемая от радиуса r_0 той точки на ударной волне, относительно которой делаются разложения в степенные ряды, а x —координата, измеряемая параллельно оси, но от волны, а не от фиксированной плоскости, так что для волны $x = 0$. Если f обозначает любую из переменных течения u, v, p, ρ , то $f = f(x, y)$; $f(0, y)$ обозначает значение переменной непосредственно за волной, т. е. предел $f(x, y)$ при $x \downarrow 0$.

Чтобы описать наклон волны в точке $(0, y)$, введем угол α между нормалью к волне и направлением набегающего потока; тогда

$$\sin \alpha = \frac{g'(y)}{\sqrt{1 + g'(y)^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + g'(y)^2}}.$$

Непосредственно за волной значения переменных течения определяются как функции от y из условий Ренкина—Гюгионо на скачке. Согласно § 17.5, в данном случае эти условия запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{U}{\sqrt{1 + g'^2}} &= \sqrt{\frac{p-1}{1-1/\rho}}, & p &= \frac{\theta p - 1}{\theta - \rho} \quad \left(\theta = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right), \\ \frac{(U-u) + g'v}{\sqrt{1 + g'^2}} &= \sqrt{(p-1)(1-1/\rho)}, & \frac{(U-u)g' - v}{\sqrt{1 + g'^2}} &= 0, \end{aligned} \quad (17.A.5)$$

где g' обозначает $g'(y)$ и u, v, p, ρ обозначают $u(0, y), v(0, y), p(0, y), \rho(0, y)$. Так как функция $g'(y)$ известна, из этих уравнений можно найти u, v, p, ρ как функции от y при $x = 0$.

При $x \geq 0$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, $p(x, y)$ и $\rho(x, y)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с частными производными:

$$\begin{aligned} \rho \left[(u - vg') \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \rho \left[(u - vg') \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial p}{\partial y} - g' \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \rho u + \left(\frac{\partial}{\partial y} - g' \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho v + \frac{\rho v}{r_0 + y} &= 0, \\ \gamma p \left[(u - vg') \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right] - \rho \left[(u - vg') \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (17.A.6)$$

Первые два из этих уравнений представляют собой уравнения движения, третье — уравнение непрерывности, а четвертое — уравнение энергии, из которого ρ исключено при помощи уравнения состояния (17.A.2). Выражения в квадратных скобках являются производными вдоль линий тока; члены с множителем vg' появляются из-за неортогональности системы координат.

Уравнения (17.A.5) и (17.A.6) определяют задачу Коши. В терминах ее решения функция тока ψ запишется (без множителя 2ℓ) в виде

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2} (r_0 + y)^2 U - (r_0 + y) \int_0^x \rho(x', y) v(x', y) dx'. \quad (17.A.7)$$

Величина $2\ell\psi$ равна массе жидкости, протекающей в единицу времени через сечение, перпендикулярное оси z и ограниченное окружностью с центром на оси z , проходящей через точку (x, y) . Линия тока $\psi = 0$ состоит из двух частей — части оси z и кривой, пересекающей ось при некотором положительном значении x ; эта кривая определяет искомую поверхность тела. Теперь задача состоит в том, чтобы найти эту линию тока и течение между нею и ударной волной.

17.B. НЕКОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ

Задача некорректно поставлена, если нет непрерывной зависимости ее решения от данных Коши. Если на функции u , v , p и ρ при $x = 0$ накладывается малое возмущение, то получающееся возмущение решения в общем возрастает с возрастанием x . Оказывается, что всегда можно найти такое возмущение, которое возрастало бы с ростом x с любой наперед заданной экспоненциальной скоростью. Это связано с эллиптическим характером уравнений в частных производных в дозвуковой области (см. книгу Куранта и Фридрихса [1948, § 22]). Простейший пример такой неустойчивости эллиптического уравнения получается при рассмотрении уравнения Лапласа, которое имеет решения вида $e^{kx} \sin ky$ для произвольно большого k . Как известно, подходящие (корректно поставленные) граничные задачи для уравнения Лапласа (задачи Дирихле и Неймана) определяются заданием одной функции на замкнутой кривой, а не двух функций на начальной кривой.

Чтобы исследовать рост возмущений для аналогичной, но более простой задачи, сначала перепишем уравнения (17.A.6), считая x и y декартовыми коор-

динатами на плоскости и отбрасывая члены, содержащие g' и r_0 :

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0, \\ \gamma p \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \rho \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (17.Б.1)$$

Далее эти уравнения линеаризуются путем замены u на $u_0 + u_1$ (и аналогичной замены остальных переменных течения), где u_1 — малое и быстро изменяющееся возмущение (наподобие возмущения $e e^{kx} \sin ky$ для уравнения Лапласа). При этом предполагается, что можно пренебречь величинами u_1 и $(\nabla u_0)/u_0$ по сравнению соответственно с u_0 и $(\nabla u_1)/u_1$ и т. д. Если в линеаризованную систему (17.Б.1) подставить возмущение вида

$$\begin{aligned} u_1 &= \hat{u} \exp [i(k_1 x + k_2 y)], & p_1 &= \hat{p} \exp [i(k_1 x + k_2 y)], \\ v_1 &= \hat{v} \exp [i(k_1 x + k_2 y)], & \rho_1 &= \hat{\rho} \exp [i(k_1 x + k_2 y)], \end{aligned} \quad (17.Б.2)$$

то окажется, что постоянные \hat{u} , \hat{v} , \hat{p} , $\hat{\rho}$, k_1 и k_2 должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k}) \hat{v} + \hat{p} \mathbf{k} &= 0, & (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k}) \hat{\rho} + \rho_0 (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{v}}) &= 0, \\ (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k}) (\gamma p_0 \hat{\rho} - \rho_0 \hat{p}) &= 0. \end{aligned} \quad (17.Б.3)$$

Здесь \mathbf{v}_0 , $\hat{\mathbf{v}}$ и \mathbf{k} — это векторы

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Эти уравнения имеют решения различных видов. В частности, если $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k} \neq 0$, то

$$\hat{p} = (\gamma p_0 / \rho_0) \hat{\rho} = c^2 \hat{\rho},$$

где c — скорость звука. Тогда из уравнений (17.Б.3) можно исключить $\hat{\mathbf{v}}$ и p , что дает

$$c^2 \hat{\rho} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{k})^2 \hat{\rho},$$

и поэтому

$$c^2 (k_1^2 + k_2^2) - (u_0 k_1 + v_0 k_2)^2 = 0.$$

Если последнее равенство рассматривать как квадратное уравнение для определения отношения k_1/k_2 , то его дискриминант равен

$$c^2 (u_0^2 + v_0^2 - c^2) = c^2 (\|\mathbf{u}_0\|^2 - c^2).$$

Поэтому если $\|\mathbf{u}_0\| > c$, т. е. если течение является сверхзвуковым, то отношение k_1/k_2 вещественно и решение устойчиво. Наоборот, если $\|\mathbf{u}_0\| < c$, т. е. если течение является дозвуковым, то k_1 комплексно при вещественном k_2 и существуют решения вида

$$e^{i k_1 x} \sin k_2 y, \quad e^{i \bar{k}_1 x} \sin k_2 y,$$

одно из которых растет экспоненциально с возрастанием x .

Физическая задача, в которой задано тело, а не ударная волна, поставлена корректно, поскольку корректно поставлена задача Дирихле для уравне-

ния Лапласа. Соответствующая математическая формулировка заключается в том, что нужно одновременно рассчитывать фронт ударной волны и течение за ним. Пока еще нет численных методов для решения задач в такой непосредственной постановке, за исключением весьма неточных методов временного характера, при использовании которых можно лишь надеяться на то, что течение в конце концов станет стационарным.

Некорректность — это расплата за обращение задачи и трактовку ударной волны как заранее известной. Она служит препятствием для применения конечноразностных методов, но оказывается вполне преодолимой для метода степенных рядов. Более того, одно время выжалось опасение, что на звуковой линии, разделяющей дозвуковую и сверхзвуковую области, течение может иметь какую-либо особенность или быть неустойчивым в некотором смысле. Однако течение при переходе через звуковую линию остается гладким, а дозвуковой или сверхзвуковой характер течения совершенно не отражается на точности метода степенных рядов.

17.В. МЕТОД СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Пусть f обозначает любую из переменных течения u , v , p или ρ . Представим f в виде суммы ряда:

$$f = f(x, y) = \sum_{i, k} f_{jk} x^j y^k,$$

где суммирование происходит по всем парам (j, k) неотрицательных целых чисел, f_{jk} — коэффициенты разложения, а само разложение рассматривается в области $x \geq 0$.

При помощи уравнений (17. А. 5) величины u , v , p , ρ как функции от y при $x=0$ можно выразить через функцию $g'(y)$. При этом можно избавиться от иррациональностей, обусловленных радикалами, и поэтому степенные ряды для $u(0, y)$ и т. д. выражаются через степенной ряд для $g(y)$. Эта часть вычислений проводится по стандартным правилам и не нуждается в подробном пояснении. В результате ее выполнения получается около дюжины коэффициентов для каждой функции — они находятся в памяти ЭВМ и могут быть использованы для дальнейших вычислений (это коэффициенты u_{0k} , v_{0k} , p_{0k} , ρ_{0k} для $k=0, 1, \dots, K$). Начиная с них, основная программа вычисляет все коэффициенты u_{jk} , v_{jk} , p_{jk} и ρ_{jk} , для которых $j+k \leq K$. В численных расчетах K полагалось для различных задач равным 10, 14 и 19; тогда общее число членов каждого ряда равнялось $\frac{1}{2}(K+1)(K+2)$, т. е. 66, 120 и 210 соответственно для каждой функции.

Сначала уравнения (17.А.6) разрешаются относительно производных по x , что дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{(u - vg') \rho v [\partial p / \partial y + \gamma p / (y + r_0)]}{\gamma p (1 + g'^2) - \rho (u - vg')^2} + \\ &+ \frac{\gamma p [\rho u \partial v / \partial y + g' \partial p / \partial y - \rho v \partial u / \partial y]}{\gamma p (1 + g'^2) - \rho (u - vg')^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= - \frac{\partial p / \partial x + \rho v \partial u / \partial y}{\rho (u - vg')}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= - \frac{\partial p / \partial y - g' \partial p / \partial x + \rho v \partial v / \partial y}{\rho (u - vg')}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{\rho [(u - vg') \partial p / \partial x + v \partial p / \partial y] - \gamma p v \partial p / \partial y}{\gamma p (u - vg')}. \end{aligned} \quad (17.В.1)$$

Общую идею метода можно пояснить при помощи рис. 17.7. На нем каждая точка представляет пару значений индексов (j, k) , для которых мы хотим при окончании вычислений знать коэффициенты u_{jk} и т. д. Предположим, что на некоторой стадии вычислений для u, v, p и ρ известны все те коэффициенты, для которых $j+k \leq K$ и $j \leq j'$ для некоторого $j' \in [0, K]$.

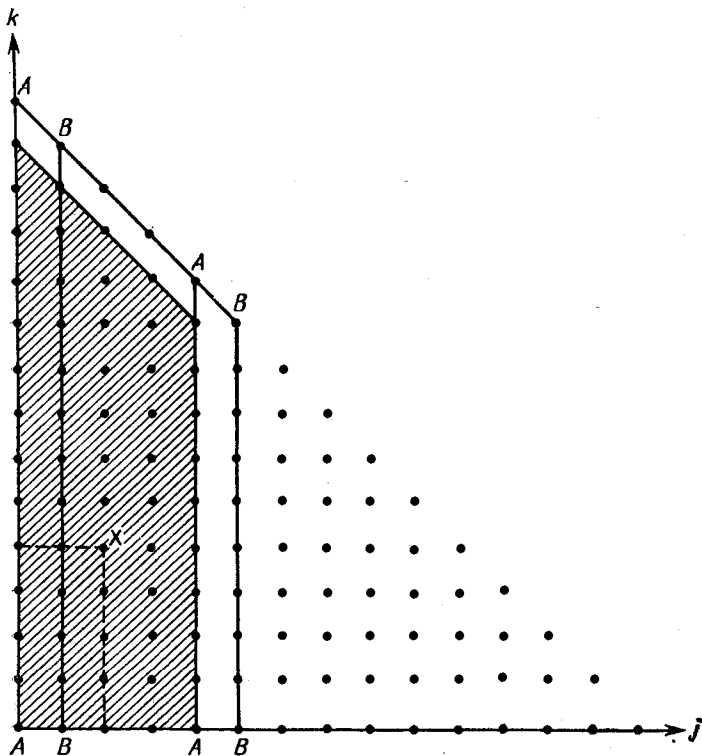


Рис. 17.7. Схема проведения вычислений.

Соответствующие точки на рис. 17.7 лежат в области AAAA (для изображенного случая $j' = 4$). Будем говорить для краткости, что функции u, v, p, ρ известны в данной области. Эта область обладает тем свойством (т. е. она имеет такую форму), что если в ней известны две функции, то в этой же области можно найти их сумму, разность, произведение или частное путем формального сложения, вычитания, умножения или деления соответствующих степенных рядов. Выполнение сложения и умножения очевидно. При умножении в отмеченной на рисунке точке X коэффициент произведения, например, двух функций f и g вычисляется по коэффициентам f и g в точках, лежащих в выделенном штриховыми линиями прямоугольнике, противоположными вершинами которого являются точки X и $(0, 0)$. Аналогичное замечание справедливо и для деления, которое выполняется по известным алгебраическим правилам деления многочленов от двух переменных как рядов. Для выполнения этих операций были созданы специальные подпрограммы. Были также написаны подпрограммы для формального (т. е. почленного) дифференцирования отрезка ряда по y и его интегрирования по x ,

Если u , v , p и ρ известны в области $AAAA$, то их производные по y могут быть найдены (при помощи подпрограммы дифференцирования) в заштрихованной на рисунке области, которая отличается от $AAAA$ лишь тем, что сдвинута на единицу вниз, так как дифференцирование уменьшает на единицу показатель степени y в каждом члене ряда. После этого при помощи других подпрограмм в заштрихованной области можно полностью вычислить выражение, стоящее в правой части первого из уравнений (17.В.1), а затем аналогичным образом и в правых частях остальных уравнений. Таким образом, теперь нам известны четыре частных производные du/dx , dv/dx , dp/dx и $d\rho/dx$ в заштрихованной области. Интегрируя их почленно по x , мы получим u , v , p , ρ в области $BBBB$, которая отличается от заштрихованной лишь тем, что сдвинута вправо на единицу. Если к $BBBB$ снова присоединить точки, соответствующие начальным коэффициентам при $x=0$, то после этого функции будут известны в области, которая отличается от упомянутой в начале абзаца области $AAAA$ лишь тем, что для нее неравенство $j \leq j'$ заменено неравенством $j \leq j' + 1$. Этим завершается последовательность тех действий, которые составляют один цикл вычислений.

Информация, полученная вначале из данных Коши, представляет собой частный случай, для которого область $AAAA$ сводится к отрезку оси k , соответствующему $j' = 0$. Поэтому после K циклов вычислений по описанной выше схеме функции будут известны по всей треугольной области $j + k \leq K$.

Упомянутые ранее подпрограммы были сведены в специальный язык программирования, каждая инструкция которого соответствует одной из формальных операций над степенными рядами. Затем уравнения в частных производных (17.В.1) были записаны непосредственно на этом языке, причем порядок выполнения действий был именно таким, как описано выше.

Язык этот дает также возможность начать новый цикл после окончания очередного цикла при $j' < K$ и прекратить вычисления при $j' = K$. Для программирования правых частей уравнений (17.В.1) потребовалось чуть менее ста инструкций на этом языке.

Использование подпрограмм и специального языка программирования следует рассматривать как нечто большее, чем только удачный эксперимент. Программа в действительности воссоздает и использует рекуррентные соотношения, которые выражают коэффициенты старших членов ряда через коэффициенты младших его членов. Так как мы имеем дело со степенными рядами по двум переменным и с довольно сложной системой четырех нелинейных уравнений в частных производных, то ясно, что эти рекуррентные соотношения должны быть очень сложными. Это соображение подтверждается следующим фактом: для того чтобы при помощи этих рекуррентных соотношений вычислить коэффициенты четырех функций течения до десятого порядка, требуется много миллионов арифметических операций. Вероятно, есть все основания сказать, что выписать эти рекуррентные соотношения (по крайней мере без ошибок) было бы за пределами человеческих возможностей. Поэтому выполнение формальных алгебраических преобразований при помощи ЭВМ является существенной частью практического использования метода степенных рядов Коши — Ковалевской.

17.Г. АРИФМЕТИКА С ПОДСЧЕТОМ ЗНАЧАЩИХ ЦИФР

Для проведения описанных выше вычислений оказалось необходимым использовать так называемую арифметику с подсчетом значащих цифр, причем не просто для того, чтобы иметь некоторую оценку точности результатов, а для того, чтобы вообще получить эти результаты. В такой арифметике достоверность вычислений при выполнении каждой операции контролируется индексом значащих цифр.

Напомним, что во времена ручного счета, когда результат каждого арифметического действия записывался на бумаге, было обычным делом подчер-

кивать в каждом числе ту цифру, которая рассматривалась как его последняя значащая цифра. После каждой арифметической операции число значащих цифр результата определяется по значащим цифрам операндов при помощи простого набора правил. Действуя так, можно было всегда заметить серьезную потерю точности в длинных вычислениях. Эта процедура считалась существенной частью высококачественных вычислений, и, по-видимому, удивительно то, что, за очень редкими исключениями, она не была реализована на вычислительных машинах либо аппаратно, либо в математическом обеспечении.

При решении рассматриваемой задачи были использованы два типа арифметики с подсчетом значащих цифр. Они описаны Рихтмайером [1957, 1960], Греем и Гаррисоном [1959], а также Ашенхёрстом и Метрополисом [1959]. В арифметике первого типа каждое число с плавающей точкой представляется тремя величинами: дробной частью (мантиссой) f , порядком e и индексом значащих цифр (разрядов) s ; все они размещаются в одном машинном слове. Мантисса f такова, что $1/2 \leq |f| < 1$, и представляется в виде двоичного числа со знаком, имеющего l двоичных разрядов (где l —величина порядка 40); e —целое число со знаком (скажем, $-200 < e < 200$), а s —целое число из интервала $0 \leq s \leq l$. [Некоторая работа была проделана и на машине с десятичной системой счисления, но мы будем пользоваться терминологией двоичной системы.] Тройка (f, e, s) представляет число

$$x = (f \pm 2^{-e}) \cdot 2^s. \quad (17.Г.1)$$

В f примерно s предположительно верных цифр. Правила для определения s остаются такими же, какими они были раньше при ручном счете. Перед сложением или вычитанием двух чисел то из них, у которого порядок меньше, денормализуется. Это означает, что если Δe —разность порядков этих чисел, то число (f, e, s) с меньшим порядком заменяется на (f', e', s') , где $f' = 2^{-\Delta e} f$, $e' = e + \Delta e$, $s' = \min(s + \Delta e, l)$. Теперь оба числа имеют одинаковый порядок и дробные части можно сложить и вычесть. Получившаяся новая дробная часть, скажем f_1 , лежит в интервале $-2 < f_1 < 2$, а новый индекс значащих цифр s_1 полагается равным наименьшему из тех двух индексов, которые были перед сложением или вычитанием. Наконец, результат нормализуется: если $1 \leq |f_1| < 2$, то f_1 , e_1 и s_1 заменяются на $1/2 f_1$, $e_1 + 1$, $\min(s_1 + 1, l)$, а если $|f_1| < 1/2$, то f_1 сдвигается влево относительно двоичной точки и одновременно e_1 и s_1 уменьшаются на 1 при каждом сдвиге на одну позицию, пока $|f_1|$ не попадет в интервал $[1/2, 1)$ или пока s_1 не станет равным нулю в процессе сдвига—в последнем случае e_1 уменьшится лишь настолько, насколько уменьшился s_1 . [Результат вида $x = (f, e, 0)$ вполне возможен. Он представляет собой близкое к нулю число с (мультипликативной) неопределенностью $\approx \pm 2^e$, и эту неопределенность нужно учитывать, если x используется в дальнейших вычислениях. Поэтому значение e имеет вполне определенный смысл. При $s=0$ дробная часть f , которая является полностью потерявшим значимость остатком, также полагается равной нулю, чтобы предотвратить возможное (но неверное) возникновение значимости при сложении двух или более таких чисел.] Умножение и деление выполняются по обычным для чисел с плавающей точкой правилам, а индекс значащих цифр результата принимается равным наименьшему из индексов операндов. Деление на число x , у которого $s=0$, является неприятной помехой в вычислениях, так как, согласно (17.Г.1), нуль может быть одним из возможных значений x .

При решении задачи об отсоединенной ударной волне использовался и другой тип арифметики с подсчетом значащих цифр, а именно ненормализованная арифметика, предложенная Метрополисом. Вместо индекса значащих цифр s у каждого числа с плавающей точкой спереди ставится столько нулей, чтобы все оставшиеся цифры были значащими. [Иначе говоря, после этих первых нулей идет известное число *гарантированных* цифр (в пределе вся полноразрядная мантисса), на которых еще не сказались ошибки округления. Но это лишь другая точка зрения на то же самое—в обоих случаях на машине

будут получаться одни и те же результаты.] При таком подходе не нужна нормализация после сложения или вычитания. После умножения или деления результат, который находится в регистре двойной длины, сдвигается так, чтобы впереди было столько нулей, сколько их было у наименее точного из операндов, после чего получается соответствующий порядок.

Оба типа арифметики оказались эффективными средствами для работы со степенными рядами.

Элементарные примеры показывают, что если в процессе вычислений величина x полностью теряет значимость (а это происходит независимо от того, применялась арифметика с подсчетом значащих цифр или нет), то следующие величины, которые зависят от x , могут иметь не только неверные цифры в мантиссе, но и неверный порядок. Предположим, что e^{-x} вычисляется при $x=20$ при помощи степенного ряда для e^{-x} . [В действительности это было бы неразумно, так как существует много лучших способов вычисления e^{-x} , но в общем случае наилучшие способы решения очень сложных задач неизвестны.] Пусть вычисления выполняются с десятью верными десятичными знаками. При n порядка 20 частная сумма ряда S_n превышает по модулю 10^7 , а ошибка округления составляет примерно 10^{-3} и не может быть уменьшена путем добавления следующих членов ряда, даже если они берутся с повышенной точностью. Следовательно, с ростом n частная сумма S_n не стремится к величине e^{-20} , которая меньше 10^{-8} , а остается значительно больше последней (примерно в 10^5 раз).

Теперь предположим, что функция $f(z)$ получается как сумма ряда $\sum a_n z^n$, коэффициенты a_n которого сами получаются в результате длинных вычислений, являющихся причиной все большей потери значимости с ростом n . Тогда при n , большем некоторого n_0 , все цифры у a_n могут стать незначимыми, а неопределенные множители могут сильно возрастать с ростом n . При таких обстоятельствах ряд $\sum a_n z^n$ оказывается полусходящимся: ошибка частной суммы как приближения к $f(z)$ убывает до некоторых пор с добавлением новых членов, но затем она начинает возрастать. Поэтому важно прекратить суммирование при $n \approx n_0$.

Как было установлено, степенные ряды по x и y для рассматриваемой задачи обладают тем свойством, что коэффициенты u_{jk} и т. д. остаются значащими в области \mathcal{R} плоскости j, k , ограниченной осями j и k и не очень четко определяемой кривой, которая, грубо говоря, отсекает треугольник. Следовательно, ряд $\sum u_{jk} x^j y^k$ должен суммироваться только в \mathcal{R} . При проведении этих сложных вычислений невозможно определить \mathcal{R} заранее, однако при наличии арифметики с подсчетом значащих цифр это делается очень просто. Суммирующая ряд подпрограмма проверяет индекс значащих цифр s у каждого коэффициента u_{jk} и не включает в сумму соответствующий член, если $s=0$. После реализации этого приема в программе точность получаемых результатов неожиданно резко возросла: от примерно одного десятичного знака до примерно шести десятичных знаков для разумно малых x и y (меньших примерно половины расстояния между ударной волной и телом).

17.Д. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

Область сходимости разложения $\sum_{j, k} f_{jk} x^j y^k$ функции $f=f(x, y)$ в степенной ряд определяется особенностями f , рассматриваемой как аналитическая функция от двух комплексных переменных. В задаче об отсоединенной ударной волне мало что известно об особенностях функций u, v, p и ρ , но совершенно ясно, что область сходимости слишком мала и не содержит вещественные точки (x, y) с достаточно большими положительными x , не достигая тем самым поверхности тела (т. е. линии тока $\psi=0$). Чтобы преодолеть это затруднение,

Левис [1959] предложил три метода аналитического продолжения решения; один из них будет описан в этом параграфе.

Пусть точка (x_0, y_0) принадлежит области сходимости рядов для функций u, v, p и ρ , причем $x_0 > 0$, и пусть $x - x_0 = \xi$, а $y = y_0 = \eta$. Тогда уравнение $\xi = 0$ ($x = x_0$) определяет в области течения кривую \mathcal{E}' , которая будет эквидистантой для ударной волны. Функции получаются на \mathcal{E}' в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) с помощью описанных выше вычислений. Следовательно, можно рассмотреть новую задачу Коши, для которой

$$u(x_0, y_0 + \eta), \quad v(x_0, y_0 + \eta), \quad p(x_0, y_0 + \eta), \quad \rho(x_0, y_0 + \eta)$$

предполагаются известными функциями переменной η на \mathcal{E}' и дифференциальные уравнения в частных производных используются еще раз, как и выше, для разложения $u(x_0 + \xi, y_0 + \eta)$ и т. д. в ряды по степеням ξ и η , например

$$u(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = \sum_{j, k} \hat{u}_{jk} \xi^j \eta^k.$$

Начальные данные для нового разложения, а именно коэффициенты \hat{u}_{0k} и т. д. выражаются через коэффициенты u_{jk} и т. д. предыдущего разложения. Чтобы найти эту зависимость, запишем, что

$$u(x_0, y_0 + \eta) = \sum_k \hat{u}_{0k} \eta^k = \sum_{j, k} u_{jk} x_0^j (y_0 + \eta)^k.$$

Здесь для простоты y_0 можно приравнять нулю (при этом новая точка, относительно которой делается разложение, будет находиться на том же расстоянии от оси тела, что и старая); тогда

$$\hat{u}_{0k} = \sum_j u_{jk} x_0^j.$$

Аналогичные выражения получаются и для функций v, p и ρ .

Пусть K_1 — наивысший показатель степени первого разложения, так что в это разложение включены все те члены, для которых $j + k \leq K_1$ (это K_1 мы ранее обозначали через K), и пусть K_2 имеет такой же смысл для второго разложения. Левис доказал, что если наложить определенное ограничение на выбор точки (x_0, y_0) , то найдется такая постоянная s ($0 < s \leq 1$), что при стремлении K_1 и K_2 к бесконечности таким образом, что K_2 всегда равняется целой части от sK_1 , второе разложение сходится к решению задачи Коши в области сходимости разложения этого решения в степенной ряд относительно точки (x_0, y_0) ; следовательно, получается правильное аналитическое продолжение. Это обстоятельство является существенным, потому что используемые для второго разложения данные Коши получают со все возрастающей точностью, когда $K_1 \rightarrow \infty$. (В теореме предполагается, что все арифметические действия выполняются точно и поэтому не происходит потери значащих цифр.) Для многих задач, включая задачу об отсоединенной ударной волне, можно положить $s = 1$, так что тогда $K_2 = K_1$.

Всю эту процедуру можно повторить, чтобы таким образом достичь еще больших значений x . В рассматриваемой задаче достаточно двух разложений, чтобы достичь поверхности тела, за исключением части течения вниз по потоку, где иногда приходилось использовать три разложения.

На рис. 17.8 изображены ударная волна, тело и звуковая линия для одного из расчетов Левиса, проводившегося с двойной точностью (с 54 двоичными знаками) при помощи ненормализованной арифметики Метрополиса. Ударная волна выбрана в виде гиперболоида вращения с таким углом между асимптотами гипербола, который в точности равен углу при вершине звукового конуса на бесконечности; число Маха $M = 12$, постоянная для идеального газа $\gamma = 1.4$, степени разложений $K_1 = K_2 = 19$. На основании тех трех возможностей проверить численные результаты, о которых упоминалось в начале

§ 17.А, можно сделать вывод о том, что для изображенной на рис. 17.8 области точность определения контура тела составляет примерно 8 десятичных знаков, компонент скорости u и v — примерно 6 знаков, а давления p и плотности ρ — примерно 7 знаков.

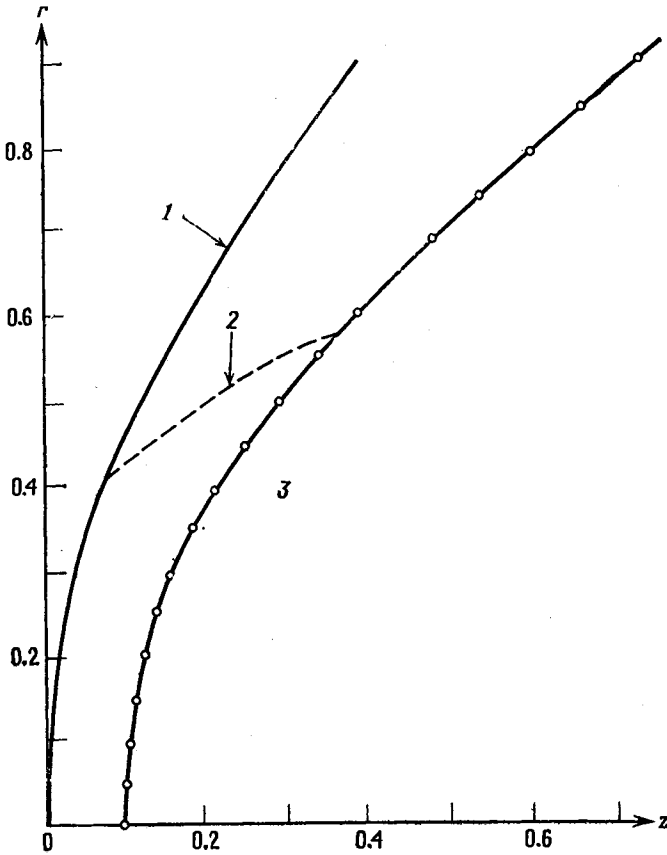


Рис. 17.8. Эскиз контура тела, рассчитанный Левисом.
1 — ударная волна; 2 — звуковая линия; 3 — тело.

Таким образом, метод степенных рядов может оказаться эффективным для решения аналитической задачи Коши, если при этом используются (1) алгебраические преобразования степенных рядов на ЭВМ, (2) арифметика с подсчетом значащих цифр и (3) аналитическое продолжение по методу Левиса.