Глава 18

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ГРУПП

Аксиомы группы; абелева группа; циклическая группа; подгруппа; порядок; изоморфизм; гомоморфизм; автоморфизм; перестановка; симметрическая группа; цикл; транспозиция; четность; знакопеременная группа; ядро гомоморфизма; нормальная подгруппа; простая группа; сопряженные элементы; смежные классы; теорема Лагранжа; факторгруппа; теорема о гомоморфизмах; трансляции; внутренние автоморфизмы; теорема Кэли; сопряженные подгруппы; простота группы $\mathcal{A}_5$; композиционный ряд; теорема Жордана—Гёльдера; образующие; определяющие соотношения; свободная группа; свободная абелева группа; проблема тождества; пространственные и точечные группы; прямое и полупрямое произведения; симморфные пространственные группы.

Предварительные сведения: элементарная алгебра.

Эта глава содержит обзор элементарной теории групп. Для использования в следующих главах самое главное — это теорема о гомоморфизмах и связанные с ней понятия.

18.1. АКСИОМЫ ГРУППЫ. ПРИМЕРЫ

Группой G называется любое множество элементов $\{a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots\}$, конечное или бесконечное, если на нем определена операция, обозначаемая через $\circ$ и такая, что:

1) если a и b—два любых элемента из G, то $a \circ b$ является также элементом G;

2) если a, b и c—три любых элемента из G, то $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (закон ассоциативности);

3) если a и b—два любых элемента из G, то в G существуют единственный элемент x и единственный элемент y, такие, что $a \circ x = b$ и $y \circ a = b$.

Если элементами являются числа, матрицы, кватернионы и т. п., то результатом операции $a \circ b$ может быть сумма или произведение a и b; в приведенных ниже примерах мы будем точно указывать смысл этой операции. В случае отображений, преобразований, вращений, перестановок и т. п. под групповой операцией понимают обычный закон композиции: если a и b—преобразования, то $a \circ b$ представляет собой преобразование, заключающееся в том, что сначала осуществляется b, а затем a.

Замечание. В некоторых книгах аксиома 3 заменяется эквивалентной аксиомой: G содержит единственный единичный элемент e

и для каждого элемента a из G существует единственный обратный элемент a^{-1} (см. следующий параграф).

В качестве первого примера группы G рассмотрим множество всех вращений в плоскости: пусть R_φ обозначает преобразование, при котором точки x, y перемещаются в (можно сказать, отображаются на) точки x', y', где

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned} \tag{18.1.1}$$

Если осуществляются последовательно преобразования R_{φ_1} и R_{φ_2}, то результатом будет вращение на угол $\varphi_1+\varphi_2$, т. е. преобразование $R_{\varphi_1+\varphi_2}$. Легко проверить, что множество $\{R_\varphi\colon 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ всех таких вращений удовлетворяет аксиомам группы.

Чтобы описать любое вращение в трехмерном пространстве, можно сначала выбрать некоторое направление, проходящее через начало координат, а затем осуществить вращение на некоторый угол вокруг этого направления как неподвижной оси. Из теоремы Эйлера, которая будет доказана в § 19.2, следует, что результатом двух таких преобразований, выполненных последовательно, будет снова такое же преобразование, т. е. вращение вокруг *некоторой* оси на *некоторый* угол. [Это кажется очевидным (поскольку каждый знает, что это верно), пока не делаются попытки доказать это утверждение.] Вследствие этого множество всех вращений в трехмерном пространстве образует группу. Группа всех вращений в n-мерном пространстве обозначается через $SO(n)$ по причинам, которые будут объяснены ниже.

В качестве третьего примера возьмем множество всех вращений в трехмерном пространстве, при которых некоторый куб с центром в начале координат остается инвариантным (т. е. отображается на куб, совпадающий с первоначальным). Такими вращениями будут: повороты на 90, 180 и 270° вокруг оси, проходящей через центры противоположных граней, поворот на 180° вокруг оси, проходящей через середины противоположных ребер, повороты на 120 или 240° вокруг оси, проходящей через противоположные вершины. Легко проверить, что эти преобразования (включая тождественное) образуют группу из 24 элементов. В общем случае множество всех преобразований определенного вида (например, вращений, общих линейных преобразований, движений, конформных отображений), при которых данная фигура остается инвариантной, представляет собой группу, ибо ясно, что фигура инвариантна относительно произведения таких отображений и относительно обратных к ним. Движения, при которых инвариантна кристаллическая решетка, образуют *пространственную группу кристалла*; см. § 18.13.

Множество всех перестановок n объектов образует группу; такие группы рассматриваются в § 18.4.

Некоторые множества вещественных или комплексных чисел или кватернионов являются группами относительно сложения или умножения, например множество всех целых чисел (положительных, отрицательных и нуля) относительно сложения, множество всех положительных вещественных чисел относительно умножения, целые числа $0, 1, \ldots, m-1$ относительно сложения по модулю m, наконец, множество всех ненулевых (вещественных) кватернионов относительно умножения.

Когда групповой операцией является сложение, $a \circ b$ обозначают через $a+b$, элемент, обратный элементу a,— через $-a$, а единицу — через 0. Часто кружок опускается и композиция двух элементов a и b записывается просто как произведение ab.

Конечную группу можно полностью описать при помощи ее *таблицы умножения*. Например, *группа Клейна из четырех элементов*, V_4, определяется таблицей

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

в которой имеется в виду, что $a \circ b = c$ и т. д. Каждый элемент группы появляется один раз в любой строке и один раз в любом столбце; более того, все строки (и все столбцы) различны. Любое квадратное размещение букв, обладающее таким свойством, называется *латинским квадратом* (Эйлер). Любой латинский квадрат определяет абстрактную группу при условии, что определенная таким образом мультипликативная структура имеет единицу и удовлетворяет закону ассоциативности.

Теория абстрактных групп имеет дело с отношениями, показанными в таблице умножения, и совершенно игнорирует внутреннюю природу элементов a, b и т. д. В отличие от математического анализа, теории функций вещественной и комплексной переменных, дифференциальных уравнений и других аналитических дисциплин (теория групп относится к *алгебре*) здесь почти никогда не встречаются численные значения, исключая использование целых чисел для нумерации и счета. Теория групп играет определенную роль в квантовой механике, в теории спектров, в анализе классических динамических систем, в теории автоморфных функций, в теории алгебраических уравнений и т. д.

18.2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ. ДАЛЬНЕЙШИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Следующие законы являются следствиями из аксиом 1—3 предыдущего параграфа.

Закон сокращения: Если a, b, c—любые элементы группы G, то из $a \circ b = a \circ c$ следует $b = c$ и из $b \circ a = c \circ a$ следует $b = c$.

Существование единицы: В G содержится единственный элемент e, такой, что $a \circ e = e \circ a = a$ для любого a из G.

Существование обратного элемента: Если a—произвольный элемент G, то существует единственный элемент a^{-1}, такой, что $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$; кроме того, $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

Расширенный закон ассоциативности: $(a \circ (b \circ (c \circ d))) \circ e = a \circ b \circ c \circ d \circ e$ и т. п. В дальнейшем необязательные скобки будут опускаться. Кроме того,

$$(a \circ b \circ \ldots \circ x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1} \circ \ldots \circ b^{-1} \circ a^{-1}.$$

Если a принадлежит G и m—любое целое число, то степень a^m определяется следующим образом:

$$a^0 = e, \quad a^1 = a, \quad a^2 = a \circ a, \ \ldots, \ a^{n+1} = a^n \circ a, \quad a^{-m} = (a^{-1})^m.$$

Очевидно, что эти степени перестановочны (коммутируют) и $a^n \circ a^m = a^{n+m}$. Вообще, если $a \circ b = b \circ a$, то говорят, что элементы a и b из G *коммутируют*. Если любые пары элементов из G коммутируют, то G называется *коммутативной* или *абелевой* группой. Если все элементы a^n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ являются различными элементами группы, то a называется *элементом бесконечного порядка*; в противном случае, как легко видеть, существует *порядок элемента* a—наименьшее положительное целое число l, такое, что $a^l = e$; при этом $a^m = e$ тогда и только тогда, когда l является делителем m, и любая степень элемента a равна одному из элементов $\{e, a, a^2, \ldots, a^{l-1}\}$.

Подгруппой группы G называется подмножество G' элементов группы G, если оно само является группой относительно операции, определенной в группе G. Вращения вокруг оси z составляют подгруппу группы вращений в трехмерном пространстве. Различные степени элемента a составляют подгруппу, называемую подгруппой, *порожденной* элементом a; такая подгруппа является *циклической* группой конечного или бесконечного порядка. *Порядок* группы есть число элементов в ней (конечное или бесконечное). Если G' является подгруппой G, мы пишем $G' < G$. В любом случае $G < G$ и $\{e\} < G$. Если $G' \neq G$, то G'— *собственная* подгруппа; если $G' = \{e\}$, то G' — *тривиальная* подгруппа.

Вопросы и упражнения

1. Что является обратным элементом для R_φ в $SO(2)$? Что является единичным элементом?

2. Покажите, что $SO(2)$ — коммутативная группа, а $SO(3)$ не является таковой.

3. Покажите, что группа вращений, которая оставляет куб инвариантным, имеет порядок 24, как было указано в § 18.1.

4. Опишите группу вращений, оставляющую инвариантным прямой круговой цилиндр; сделайте то же самое для икосаэдра.

5. Выведите из аксиом группы три закона, приведенные в начале данного параграфа.

6. Определите, какие из перечисленных множеств являются группами.
   (а) Множество всех ненулевых комплексных чисел, если групповой операцией является умножение.
   (б) Множество всех невырожденных матриц размера $n \times n$ при умножении.
   (в) Множество всех положительных рациональных чисел при умножении.
   (г) Множество всех положительных иррациональных чисел при умножении.
   (д) Множество всех положительных алгебраических чисел при умножении.
   (е) Множество всех матриц размера $n \times n$ при сложении.
   (ж) Множество всех матриц размера $n \times n$ и вида e^A при умножении.
   (з) Множество целых чисел $1, 2, \ldots, p-1$ при умножении по модулю p (p простое).
   (и) Множество целых чисел $1, 2, \ldots, m-1$ при умножении по модулю m (m составное).
   (к) Множество всех векторов в E^3 при векторном сложении.
   (л) Множество всех ненулевых векторов в E^3 при векторном умножении.
   (м) Множество всех комплексных чисел z, таких, что $|z|=1$, при умножении.
   (н) Множество всех унитарных матриц размера $n \times n$ при сложении.
   (о) Множество всех унитарных матриц размера $n \times n$ при умножении.
   (п) Множество всех преобразований Мёбиуса

$$z \longrightarrow z' = (az+b)/(cz+d) \quad (ad-bc \neq 0)$$

   в комплексной плоскости.

18.3. ИЗОМОРФИЗМ

Если существует взаимно однозначное отображение φ группы G на группу G', такое, что

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \circ \varphi(b) \tag{18.3.1}$$

для всех a и b из G, то φ представляет собой *изоморфизм*, а группы являются *изоморфными*; символически $G \cong G'$. [В (18.3.1) первый кружок обозначает групповую операцию в G, а второй — в G'.] Говорят, что произведения отображаются на произведения. В этом случае G и G' можно рассматривать лишь как две различные реализации одной и той же абстрактной группы.

Например, если G — множество чисел $\{1, i, -1, -i\}$ с умножением в качестве групповой операции, а G' — множество матриц $\{I, A, B, C\}$ с матричным умножением в качестве групповой операции, причем

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

то отображение

$$\varphi\colon\ 1 \to I,\quad i \to A,\quad -1 \to B,\quad -i \to C$$

является изоморфизмом G на G'; нетрудно проверить справедливость (18.3.1) для каждой из 16 возможных пар (a, b) элементов из G. Например, $(-i)=(-1)(i)$; следовательно, должно быть $\varphi(-i)= =\varphi(-1)\,\varphi(i)$, т. е. $C=BA$, как и в действительности. Следует заметить, что отображение

$$\varphi_1\colon\ 1 \to I,\quad i \to C,\quad -1 \to B,\quad -i \to A$$

является другим изоморфизмом G на G'.

Если G — группа всех комплексных чисел z, таких, что $|z|=1$, с умножением в качестве групповой операции, то отображение

$$\varphi\colon\ e^{i\theta} \to \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

является изоморфизмом G на двумерную группу вращений $SO(2)$.

Изоморфизм группы на себя называется *автоморфизмом*. В качестве примера возьмем отображение описанной выше группы $\{I, A, B, C\}$:

$$I \to I,\quad A \to C,\quad B \to B,\quad C \to A.$$

Автоморфизмом группы $SO(2)$ является отображение

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Любое отображение φ (не обязательно взаимно однозначное или на всю группу) группы G в группу G', такое, что справедливо (18.3.1), называется *гомоморфизмом*. Если G есть группа $GL(n, C)$ всех невырожденных комплексных матриц размера $n\times n$ с умножением в качестве групповой операции, то отображение $A \to \det A$ является гомоморфизмом группы G на группу всех ненулевых комплексных чисел относительно умножения. Для второго примера возьмем в качестве G группу M_2 всех движений в плоскости, т. е. группу всех преобразований вида

$$T_{\theta,\,a,\,b}\colon\ \begin{cases} x \to x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a,\\ y \to y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b,\end{cases} \tag{18.3.2}$$

где $0 \leqslant \theta < 2\pi$, а a и b — произвольные вещественные числа. Тогда отображение

$$T_{\theta, a, b} \to \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (18.3.3)$$

является гомоморфизмом G на $SO(2)$, что можно увидеть, осуществляя последовательно два преобразования вида (18.3.2). Поскольку $SO(2)$ представляет собой подгруппу группы G (при $a=b=0$), отображение (18.3.3) можно рассматривать как гомоморфизм группы G в себя.

18.4. ГРУППЫ ПЕРЕСТАНОВОК [1]

Перестановкой называется взаимно однозначное отображение множества C (обычно конечного) объектов или символов на себя. Например, если C состоит из первых семи цифр, $C=\{1, 2, \ldots, 7\}$, то частной перестановкой является отображение $\pi : j \to \pi(j)$, где функция $\pi(j)$ задается следующим образом:

$$\pi(1)=7, \quad \pi(2)=3, \quad \pi(3)=1, \quad \pi(4)=4,$$
$$\pi(5)=6, \quad \pi(6)=5, \quad \pi(7)=2.$$

Эту перестановку можно записать короче:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \qquad (18.4.1)$$

здесь имеется в виду, что каждый символ верхней строки отображается в символ, стоящий под ним. *Циклической* перестановкой или *циклом* называется перестановка, которая может быть полу-

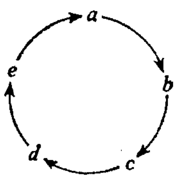

Рис. 18.1. Циклическая перестановка.

чена путем размещения символов на окружности и отображения каждого символа на следующий при перемещении по окружности (скажем, по часовой стрелке), как показано на рис. 18.1; этот цикл записывается еще короче, а именно как $(a\ b\ c\ d\ e)$, что является, разумеется, тем же самым, что и $(b\ c\ d\ e\ a)$ и т. д. Любая перестановка множества C может быть выражена через циклические

[1] Иногда перестановки называют подстановками.— *Прим. перев.*

перестановки различных подмножеств множества C; например, перестановку π, заданную при помощи (18.4.1), можно записать в виде

$$\pi = (1723)\,(4)\,(56). \tag{18.4.2}$$

Длиной цикла является число символов в нем. Циклы длины 1 [например, (4)] обычно опускаются, поскольку они представляют собой тождественное отображение, в котором ничего не переставляется. Цикл длины 2 является *транспозицией*, при которой меняются местами два символа, а остальные остаются на месте.

Любая перестановка может быть разложена в произведение последовательных транспозиций. Например, если

$$\pi_1 = (17), \quad \pi_2 = (72), \quad \pi_3 = (23), \quad \pi_4 = (56),$$

то перестановку (18.4.2) можно записать в виде

$$\pi = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3 \circ \pi_4 = (17)\,(72)\,(23)\,(56), \tag{18.4.3}$$

причем здесь подразумевается, что транспозиции следует выполнять справа налево. Разложение данной перестановки в произведение транспозиций не является однозначным, но сейчас мы докажем, что для данной перестановки число транспозиций или всегда четно, или всегда нечетно.

В самом деле, пусть $f(\ldots)$ — функция n вещественных или комплексных переменных, определенная следующим образом:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (x_k - x_j), \tag{18.4.4}$$

и пусть π: $j \to \pi(j)$ — перестановка целых чисел $1, 2, \ldots, n$; обозначим

$$f_\pi(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (x_{\pi(k)} - x_{\pi(j)}). \tag{18.4.5}$$

Если $x_k - x_j$ — любой из множителей в (18.4.4), то или $x_k - x_j$, или $x_j - x_k$ появится в точности один раз в качестве одного из множителей в (18.4.5), так что или $f_\pi \equiv f$, или $f_\pi \equiv -f$; соответственно этим случаям π называется *четной* или *нечетной* перестановкой. Это свойство называется *четностью* перестановки π. Если две перестановки имеют одинаковую четность (т. е. они обе четны или обе нечетны), то их произведение четно; если они имеют различные четности, то их произведение нечетно. Ясно, что транспозиция (12) нечетна, ибо тогда все множители в (18.4.5) имеют тот же знак, что и в (18.4.4), кроме множителя $x_2 - x_1$. Далее, видно, что транспозиция $(1l) = (2l)\,(12)\,(2l)$ обязательно нечетна и, наконец, что общая транспозиция $(jk) = (1j)\,(1k)\,(1j)$ всегда нечетна. Следовательно, в любом разложении четной (нечетной) перестановки в произведение транспозиций число множителей всегда четно (всегда нечетно).

Существует столько же нечетных, сколько четных перестановок данного множества C, так как если π_1— любая фиксированная нечетная перестановка, то отображение $\pi_1\pi \to \pi$ четных перестановок на нечетные является взаимно однозначным.

Ясно, что множество всех перестановок n символов (включая, конечно, тождественную перестановку, в которой каждый символ отображается на себя) представляет собой группу порядка $n!$ относительно обычного закона композиции отображений (справа налево); эта группа называется *симметрической* группой n символов и обозначается через $\mathcal{S}_n$. Подгруппа всех $n!/2$ четных перестановок называется *знакопеременной* группой n символов и обозначается через $\mathcal{A}_n$.

18.5. ГОМОМОРФИЗМЫ. НОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ

Напомним, что гомоморфизмом является отображение $\varphi: G \to G'$ группы G в группу G', такое, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для всех a и b из G. (Если φ к тому же взаимно однозначное отображение на всю группу G', то мы имеем изоморфизм.) Определим некоторые подмножества групп G и G' (мы увидим, что на самом деле эти подмножества представляют собой подгруппы):

$$\begin{aligned} G_0 &= \{x\colon\ \varphi(x) = e' \text{ (единица группы } G')\} = \\ &= \textit{ядро} \text{ отображения} = \ker(\varphi); \\ G_1' &= \{\varphi(x)\colon\ x \in G\} = \\ &= \textit{образ } G \text{ при } \varphi = \varphi(G) \end{aligned}$$

(см. рис. 18.2). Наибольший интерес представляет случай, когда образ $G_1' = \varphi(G)$ является более простой группой, чем G (в таком

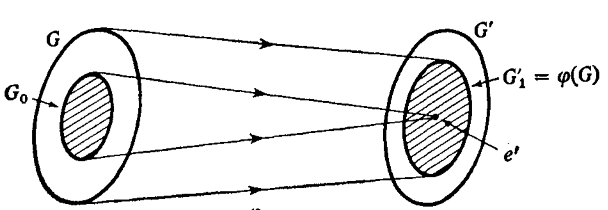

Рис. 18.2. Гомоморфизм группы G в группу G'.

случае φ не может быть взаимно однозначным), однако все же $\varphi(G)$ не сводится к тривиальной группе $\{e'\}$. Тогда можно считать, что этот образ обладает основными свойствами группы G, но без некоторых тонкостей. В этом смысле $\varphi(G)$ аппроксимирует G настолько точно, что образ произведения двух элементов из G всегда является произведением их образов.

Теорема. *Подмножества* G_0 *и* G_1' *являются подгруппами групп* G *и* G' *соответственно; кроме того,* $yxy^{-1} \in G_0$ *для любого* x *из* G_0 *и любого* y из G.

Мы проведем детальное доказательство этой теоремы для того, чтобы продемонстрировать образец подобных доказательств. Доказательство большинства других теорем этой главы предоставляется читателю.

(1) Доказательство (того, что $G_0 < G$). Нужно доказать, что в G_0 выполняются аксиомы группы. Во-первых, допустим, что x и y принадлежат G_0, т. е. $\varphi(x) = e'$ и $\varphi(y) = e'$. Нужно показать, что $xy \in G_0$. Так как $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ (в силу того, что отображение φ является гомоморфизмом), то $\varphi(xy) = e'e' = e'$ (в силу свойства единицы в любой группе). А поскольку G_0 определялось как множество *всех* элементов группы G, которые отображаются в элемент e', то xy принадлежит G_0. Во-вторых, закон ассоциативности выполняется в G_0 автоматически, так как он выполняется во всей группе G [если x, y и z принадлежат группе G_0, то $(xy)z = x(yz)$, поскольку x, y, z принадлежат также группе G]. Третью аксиому рассмотрим в альтернативной форме, приведенной в замечании в § 18.1. *Существование единицы:* G_0 содержит единицу e, ибо если a — произвольный элемент G, то $\varphi(a)\varphi(e) = \varphi(ae) = \varphi(a)$; следовательно, $\varphi(e) = e'$. *Существование обратного элемента:* допустим, что a принадлежит G_0 (значит, $\varphi(a) = e'$); тогда $e' = \varphi(e) = \varphi(aa^{-1}) = \varphi(a)\varphi(a^{-1}) = e'\varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1})$, т. е. a^{-1} принадлежит G_0.

(2) Доказательство (того, что $G_1' < G'$). Совершенно аналогично доказывается выполнение аксиом группы в G_1'. Во-первых, если x' и y' принадлежат G_1', то $x' = \varphi(x)$ и $y' = \varphi(y)$ для некоторых x и y из G, но $x'y' = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$ и так как G_1' было определено как множество всех таких элементов группы G', которые равны $\varphi(z)$ для некоторого $z \in G$, то $x'y'$ принадлежит G_1'. Во-вторых, умножение ассоциативно в G_1' в силу того, что это свойство имеет место во всей группе G'. В-третьих, ранее было показано, что $\varphi(e) = e'$; следовательно, $e' \in G_1'$. Наконец, если $x' \in G_1'$, то $x' = \varphi(x)$ для некоторого $x \in G$. Но $x'\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = e'$, откуда следует, что $\varphi(x^{-1})$ является обратным элементом $(x')^{-1}$ для элемента x'; следовательно, $(x')^{-1} \in G_1'$.

(3) Доказательство (того, что yxy^{-1} принадлежит G_0, если $x \in G_0$, а y — произвольный элемент G).

$$\varphi(yxy^{-1}) = \varphi(y)\varphi(x)\varphi(y^{-1}) = \varphi(y)e'\varphi(y^{-1}) = \varphi(y)\varphi(y^{-1}) = \varphi(y)(\varphi(y))^{-1} = e';$$

следовательно, $yxy^{-1} \in G_0$.

Замечание. Все эти заключения справедливы даже в том случае, когда G' не является группой, а представляет собой лишь множество, на котором определено произведение $x'y'$. В частности, тогда следует, что подмножество G_1' обязательно является группой, даже если G' может не быть таковой. Все рассуждения остаются в силе, за исключением второго этапа части (2) приведенного доказательства. Для доказательства закона ассоциативности в G_1' возьмем в G_1' элементы x', y', z', т. е. элементы вида $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, $\varphi(z)$. Тогда $(x'y')z' = (\varphi(x)\varphi(y))\varphi(z) = \varphi(xy)\varphi(z) =$

$= \varphi((xy)z) = \varphi(x(yz))$ (последнее равенство благодаря ассоциативности умножения в $G) = \varphi(x)\varphi(yz) = \varphi(x)(\varphi(y)\varphi(z)) = x'(y'z')$.

Любая подгруппа G_0 группы G, такая, что $yxy^{-1} \in G_0$ для любого $x \in G_0$ и для любого $y \in G$, называется *нормальной подгруппой* (или *нормальным делителем*) или *инвариантной* или *самосопряженной* подгруппой группы G; символически $G_0 \lhd G$. Ясно, что гомоморфизм интересующего нас вида может существовать только в том случае, когда G содержит нетривиальную (отличную от $\{e\}$) собственную (т. е. не совпадающую со всей группой G) нормальную подгруппу G_0. Если G не содержит такой подгруппы, то группа G называется *простой*, поскольку она не может быть гомоморфно отображена на какую-либо еще более простую нетривиальную группу. В § 18.8 будет доказано обратное утверждение: если G содержит нормальную подгруппу, то можно построить гомоморфизм, для которого G_0 является ядром, и при помощи этого построения получаются все (в смысле изоморфизма) гомоморфные образы группы G.

Для любого элемента x элементы вида yxy^{-1} $(y \in G)$ называются *сопряженными* с элементом x. Подгруппа является нормальной тогда и только тогда, когда она содержит все сопряженные со всеми ее элементами. В абелевой группе $yxy^{-1} = x$, и поэтому любая подгруппа является нормальной.

18.6. СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ

Пусть G_0 — подгруппа группы G, а y — произвольный фиксированный элемент из G. Подмножества

$$S_y^{(l)} = \{y \circ x\colon\ x \in G_0\}, \qquad S_y^{(r)} = \{x \circ y\colon\ x \in G_0\}$$

называются соответственно *левым и правым смежными классами* в группе G по подгруппе G_0. Элемент y называется *представителем* смежного класса $S_y^{(l)}$ (или класса $S_y^{(r)}$). Любой элемент смежного класса можно рассматривать в качестве его представителя. Сама подгруппа G_0 является как левым, так и правым смежным классом; в качестве представителя этого класса можно взять единичный элемент e данной группы. Соответствие $x \longrightarrow y \circ x$ для данного y и всех $x \in G_0$ есть взаимно однозначное отображение G_0 на $S_y^{(l)}$ (аналогично для правых смежных классов); следовательно, каждый смежный класс содержит то же число (конечное или бесконечное) элементов, что и подгруппа G_0. Кроме того, легко доказывается, что любые два левых смежных класса по подгруппе G_0 (любые два правых) или совпадают, или же не имеют ни одного общего элемента, так что число элементов в G (если оно конечно) равно числу элементов G_0, умноженному на число смежных классов (скажем, левых), включающих и саму подгруппу G_0. *Теорема Лагранжа* для конечных групп гласит: *порядок подгруппы является делителем порядка самой группы.* Из этого следует, например, что если количество элементов в группе G представляет собой простое число, то G не имеет никаких подгрупп кроме $\{e\}$ и самой G. Смежные классы $S_y^{(l)}$ и $S_y^{(r)}$ обозначаются также через yG_0 и G_0y. Отметим, что эти смежные классы, исключая саму группу G, *не* являются подгруппами.

18.7. ФАКТОРГРУППЫ

Теорема 1. *Подгруппа G_0 группы G является нормальной тогда и только тогда, когда каждый левый смежный класс в группе G по подгруппе G_0 совпадает с соответствующим правым; тогда смежный класс, содержащий y, можно обозначить через S_y.* (Доказательство элементарно и предлагается в качестве упражнения.)

Определение. Если S_1 и S_2—любые два подмножества (причем не обязательно подгруппы или смежные классы) элементов группы, то их *произведение* определяется как подмножество

$$S_1S_2 \overset{\text{def}}{=} \{z_1 \circ z_2\colon\ z_1 \in S_1,\ z_2 \in S_2\}; \tag{18.7.1}$$

отметим, что в общем случае $S_1S_2 \neq S_2S_1$.

Если S_1 и S_2—смежные классы (левые или правые), то их произведение в общем случае не является смежным классом (обычно это множество больше, чем любой смежный класс). Исключение составляет случай, когда $G_0 \lhd G$.

Теорема 2. *Если G_0—нормальная подгруппа группы G ($G_0 \lhd G$),* то $S_{y_1}S_{y_2} = S_{y_1y_2}$ *для всех y_1* и y_2 *в G. Обратно, если G_0—подгруппа причем такая, что произведение любых двух (скажем, левых) смежных классов всегда представляет собой (левый) смежный класс, то $G_0 \lhd G$ (в этом случае различие между левым и правым смежными классами исчезает). При этих условиях множество смежных классов $\{S_y\colon\ y \in G\}$ образует группу по отношению к операции умножения, определенной в* (18.7.1). *Эта группа называется* факторгруппой *группы G по нормальной подгруппе G_0 и обозначается через G/G_0. Далее, отображение $\varphi_n\colon G \to G/G_0$, определяемое как $\varphi_n(y) = S_y$ (каждый элемент группы G отображается на смежный класс, в котором он находится), представляет собой гомоморфизм, называемый* естественным гомоморфизмом *группы G на G/G_0.*

Согласно этой теореме, доказательство которой также предоставляется читателю, всегда можно построить гомоморфный образ и гомоморфизм, соответствующий любой нормальной подгруппе G_0. Из теоремы следующего параграфа вытекает, что такие гомоморфизмы, в сущности, являются единственными гомоморфизмами данной группы G.

18.8. ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМАХ

Теорема. *Пусть* $\psi\colon G \to G'$ — *произвольный гомоморфизм, и пусть* G_0 — *его ядро, а* $\psi(G)$ — *образ группы* G *в* G' *при отображении* ψ. *Обозначим через* S_y *смежный класс в* G *по подгруппе* G_0, *в котором содержится элемент* y. *Тогда* $\psi(G)$ *и факторгруппа* G/G_0 *изоморфны. Точнее, отображение* $\Psi\colon G/G_0 \to \psi(G)$, *задаваемое формулой*

$$\Psi(S_y) = \psi(y), \tag{18.8.1}$$

во-первых, вполне определено (в смысле независимости от частного выбора представителя y *смежного класса* S_y*), а во-вторых, является изоморфизмом. Схематически это можно изобразить так:*

$$\begin{tikzcd}
\psi(G) & G \arrow[l, "\psi"', "(\mathrm{hom})"] \arrow[r, "\varphi_n", "(\mathrm{hom})"'] & G/G_0 \arrow[ll, bend left, "\Psi(\mathrm{iso})"]
\end{tikzcd}$$

Читателю настоятельно рекомендуется провести подробное доказательство теоремы; подчеркнем лишь, что́, собственно, должно быть доказано. Чтобы доказать, что Ψ вполне определено, нужно показать, что из $S_{y_1} = S_{y_2}$ следует $\psi(y_1) = \psi(y_2)$. Для доказательства взаимной однозначности отображения Ψ мы должны показать, что из $\psi(y_1) = \psi(y_2)$ следует $S_{y_1} = S_{y_2}$. Далее следует показать, что Ψ обладает свойством гомоморфизма, т. е.

$$\Psi(S_{y_1}S_{y_2}) = \Psi(S_{y_1})\,\Psi(S_{y_2}).$$

Наконец, совершенно очевидно, что Ψ является отображением факторгруппы на весь образ $\psi(G)$, ибо любой элемент из $\psi(G)$ есть $\psi(y)$ для некоторого y из G.

18.9. СТРУКТУРА ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

Как было указано в § 18.6, группа, порядок которой есть простое число p, не имеет никаких нетривиальных собственных подгрупп, следовательно, она является обязательно циклической (а потому абелевой) и может быть порождена любым из своих элементов (исключая единицу), поскольку, по теореме Лагранжа, порядок любого элемента (т. е. порядок подгруппы, порожденной этим элементом) должен быть или 1, или p. (Единственным элементом порядка 1 в группе является единица e, ибо из $a^l=e$, где $l=1$, следует, что $a=e$.) Если $G=\{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ — циклическая группа порядка n, а m — делитель n, то элементы e, a^m, a^{2m}, ... составляют циклическую подгруппу порядка n/m и такие подгруппы являются единственными подгруппами группы G. В бесконечной циклической группе любой элемент, отличный от единицы, порождает бесконечную циклическую подгруппу, причем такие подгруппы являются единственными нетривиальными подгруппами; все они различны, но изоморфны.

18.10. ТРАНСЛЯЦИИ [1]. ВНУТРЕННИЕ АВТОМОРФИЗМЫ

Взяв произвольный элемент a группы G, обозначим через T_a отображение группы G на себя, заданное соответствием $x \longrightarrow ax$ $(x \in G)$; это отображение называется *левой трансляцией* в группе G; отображение вида $x \longrightarrow xa$ для фиксированного a называется *правой трансляцией*.

Упражнение

1. Покажите, что множество $\mathcal{T}$ всех левых трансляций в G представляет собой группу относительно обычного закона композиции отображений. Покажите, что группа $\mathcal{T}$ изоморфна G.

Примечание 1. Любой гомоморфизм группы G (абстрактной или иной) на группу отображений называется *представлением* группы G. Изоморфизм $G \cong \mathcal{T}$ называется *регулярным представлением* группы G. Если представление является изоморфизмом (а не только гомоморфизмом), то оно называется *точным*. Регулярное представление является точным.

Примечание 2. Если G — конечная группа, то отображение T_a представляет собой перестановку элементов группы G; следовательно, $\mathcal{T}$ является некоторой подгруппой группы $\mathcal{S}_n$ (см. конец § 18.4), где n — порядок группы G, т. е. *любая конечная группа изоморфна некоторой группе перестановок* (*теорема Кэли*).

Обозначим через A_a отображение группы G на себя, задаваемое соответствием $x \longrightarrow axa^{-1}$, где x — любой элемент группы G, а a — фиксированный элемент группы G.

Упражнение

2(а). Покажите, что множество $\mathfrak{J}$ всех отображений A_a в G является группой относительно обычного закона композиции отображений. (б). Найдите $\mathfrak{J}$, если $G=\mathcal{A}_3$. (в). Найдите $\mathfrak{J}$, если $G=\mathcal{A}_4$.

Примечание 3. В любом случае $\mathfrak{J}$ представляет собой некоторую подгруппу группы $\mathcal{S}_{6/2}=\mathcal{S}_3$ для упражнения 2 (б) и некоторую подгруппу группы $\mathcal{S}_{12}$ для упражнения 2 (в).

[1] Можно было бы использовать термин «сдвиги», но в физических приложениях чаще встречается термин «трансляции».— *Прим. перев.*

Примечание 4. Выражение «найдите $\mathfrak{J}$» означает, что нужно отождествить $\mathfrak{J}$ с группой, изоморфной некоторой известной группе.

Примечание 5. Каждое из отображений A_a есть автоморфизм, называемый *внутренним автоморфизмом группы* G, ибо, во-первых, оно взаимно однозначно и является отображением на всю группу, поскольку уравнение $axa^{-1}=y$ всегда имеет единственное решение x $(x=a^{-1}ya)$; во-вторых, это отображение обладает свойством гомоморфизма, т. е. произведения отображаются в произведения, поскольку $axwa^{-1}=axa^{-1}awa^{-1}$. Группа $\mathfrak{J}$ называется *группой внутренних автоморфизмов* группы G.

Внутренние изоморфизмы группы $\mathscr{S}_n$ обладают особым свойством. Пусть элемент π принадлежит $\mathscr{S}_n$; запишем π в виде произведения независимых циклов, как в (18.4.2) [два цикла являются *независимыми*, если они не содержат общих символов; (173) и (24) независимы, а (173) и (34) нет], причем более длинные циклы записываются первыми, а также включаются циклы длины 1. Тогда длины этих циклов составляют *разбиение* числа n, т. е. последовательность целых чисел, сумма которых равна n. Особое свойство, о котором мы упомянули, заключается в том, что образ элемента π при внутреннем автоморфизме группы $\mathscr{S}_n$ ($\pi \longrightarrow \sigma\pi\sigma^{-1}$, где σ—некоторый заданный элемент $\mathscr{S}_n$) всегда соответствует тому же разбиению числа n, что и сам π, поскольку если $(a, b, \ldots, f)$—любой цикл, то $\sigma(a, b, \ldots, f)\sigma^{-1}$ является циклом $(\sigma(a), \sigma(b), \ldots, \sigma(f))$.

Если a и x принадлежат группе G, то элемент axa^{-1} называется *сопряженным* с x. Внутренний автоморфизм A_a: $x \longrightarrow axa^{-1}$ (a фиксирован) отображает каждый элемент группы x на один из сопряженных с ним элементов. Если G_0—подгруппа группы G, то множество

$$G_0=\{axa^{-1}; \ x\in G_0\}$$

есть тоже подгруппа, часто обозначаемая через aG_0a^{-1} и называемая *сопряженной* с G_0 *подгруппой*. Если $aG_0a^{-1}=G_0$ для всех a из G, то $G_0 \lhd G$. Поэтому нормальные подгруппы иногда называют самосопряженными подгруппами. В группе $\mathscr{S}_n$ сопряженными элементами являются элементы, имеющие одинаковую структуру записи в виде произведений независимых циклов, например (1732)(56)(4) и (4531)(76)(2).

18.11. ПОДГРУППЫ ГРУППЫ $\mathscr{S}_4$

Симметрическая группа $\mathscr{S}_4$ помимо тривиальной подгруппы $\{e\}$ и самой G имеет 22 подгруппы. Разбивая их по классам сопряженных подгрупп, мы имеем:

1) $\{e, (12)\}$ и т. д.— шесть подгрупп;
2) $\{e, (123), (132)\}$ и т. д.— четыре подгруппы;
3) $\{e, (1234), (13)(24), (1432)\}$ и т. д.— три подгруппы;
4) $\{e, (12)(34)\}$ и т. д.— три подгруппы;
5) $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}=V_4$— одна подгруппа;
6) $\{e, (123), (124), (134), (234), (321), (421), (431), (432), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}=\mathcal{A}_4$— одна подгруппа;
7) $\{e, (12), (13), (23), (123), (321)\}$ — четыре подгруппы.

Любая подгруппа из определенного класса (определенной строки приведенной таблицы) может быть получена из любой другой подгруппы того же класса при помощи внутреннего автоморфизма всей группы $\mathcal{S}_4$. Например, при отображении $\pi \to (12)\pi(12)$ элементы группы $\{e, (134), (431)\}$ переходят в элементы группы $\{e, (234), (432)\}$. Мы видим, что единственными нормальными (или инвариантными, или самосопряженными) подгруппами являются V_4 и $\mathcal{A}_4$, каждая из которых единственная в своем классе. Однако каждая из подгрупп в классе 4 является нормальной подгруппой группы V_4 (откуда следует, между прочим, что из $G_1 \lhd G_2 \lhd G_3$ отнюдь не вытекает $G_1 \lhd G_3$). Полным так называемым композиционным рядом (см. ниже) группы $\mathcal{S}_4$ является ряд

$$\{e\} \lhd \{e, (12)(34)\} \lhd V_4 \lhd \mathcal{A}_4 \lhd \mathcal{S}_4. \tag{18.11.1}$$

Для $n \geqslant 5$ $\mathcal{A}_n$ является простой группой (она не имеет никаких нетривиальных собственных нормальных подгрупп), так что композиционный ряд сводится к ряду

$$\{e\} \lhd \mathcal{A}_n \lhd \mathcal{S}_n.$$

Упражнение

1. Покажите, что $\mathcal{A}_5$—простая группа (схема доказательства приводится ниже). Допустите, что $G_0 \lhd \mathcal{A}_5$, причем $G_0 \neq \{e\}$; затем нужно доказать, что $G_0=\mathcal{A}_5$. Покажите, что G_0 должна содержать элемент π одного из следующих типов:

(а) $(a\ b\ c)$, (б) $(a\ b)(c\ d)$, (в) $(a\ b\ c\ d\ e)$.

Тогда группа G_0 содержит все элементы $\sigma\pi\sigma^{-1}$, где $\sigma \in \mathcal{A}_5$; покажите, что она содержит все элементы того же типа, что и π. Покажите, что если G_0 включает все элементы одного из вышеуказанных типов, то она включает элементы (а следовательно, вообще все элементы) обоих других типов; например, если группе G_0 принадлежат элементы типа (а), то ей принадлежит и элемент $(123)(234)=(21)(34)$. Почему это доказательство не проходит для $\mathcal{A}_4$? Простота $\mathcal{A}_5$ является ключевым моментом в доказательстве Галуа невозможности разрешить уравнение пятой степени в радикалах.

Композиционный ряд группы G представляет собой последовательность подгрупп $\{G_i\}$, такую, что

$$\{e\}=G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_k=G, \tag{18.11.2}$$

где $G_i \neq G_{i+1}$ и где уже невозможно никакое уплотнение, т. е. если $G_i \lhd H \lhd G_{i+1}$, то или $H = G_i$, или $H = G_{i+1}$. Конечная группа всегда имеет композиционный ряд. Если G — некоторая бесконечная группа, то может случиться (см. упражнение 3 ниже), что любой ряд вышеуказанного типа имеет уплотнение. Знаменитая *теорема Жордана — Гёльдера* гласит, что если G имеет композиционный ряд (18.11.2) и если

$$\{e\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_l = G$$

представляет собой любой другой композиционный ряд группы G, то (1) $l=k$, (2) хотя подгруппы $H_1, \ldots, H_{k-1}$ могут отличаться от $G_1, \ldots, G_{k-1}$, но по меньшей мере факторгруппы

$$H_1/H_0,\ H_2/H_1,\ \ldots,\ H_k/H_{k-1} \tag{18.11.3}$$

будут теми же (с точностью до порядка), что и

$$G_1/G_0,\ G_2/G_1,\ \ldots,\ G_k/G_{k-1}; \tag{18.11.4}$$

иначе говоря, последовательность (18.11.3) можно упорядочить таким образом, что каждая группа в ней будет изоморфна соответствующей группе в последовательности (18.11.4).

Упражнения

2. Как применить теорему Жордана — Гёльдера к композиционному ряду (18.11.1) для группы $\mathcal{S}_4$?

3. Покажите, что бесконечная циклическая группа не имеет композиционного ряда.

4. Обозначим через $\mathcal{S}_\infty$ множество всех конечных перестановок положительных целых чисел $\{1, 2, \ldots\}$. (При каждой перестановке из $\mathcal{S}_\infty$ все элементы, кроме конечного их числа, переходят сами в себя.) Покажите, что $\mathcal{S}_\infty$ имеет композиционный ряд $\{e\} \lhd \mathcal{A}_\infty \lhd \mathcal{S}_\infty$.

18.12. ОБРАЗУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ. СВОБОДНЫЕ ГРУППЫ

Пусть G — некоторая группа. Говорят, что подмножество $S = \{a, b, \ldots\}$ элементов группы G *порождает* G, если любой элемент из G может быть представлен в виде (конечного) произведения элементов, каждый из которых либо сам принадлежит S, либо является обратным некоторому элементу из S. (Эквивалентно: любой элемент g из G является произведением степеней элементов из S; степени элемента были определены в § 18.2 [1]).) Для полного описания группы, вообще говоря, необходимо указать не только систему образующих этой группы (множество S), но и некоторые определяющие соотношения между образующими. Например, цикли-

[1]) Элементы множества S в таком случае называются образующими элементами (образующими), а само это множество — системой образующих группы.— *Прим. перев.*

ческую группу порядка n можно описать одним образующим элементом a и одним определяющим соотношением $a^n=e$.

Группа, для которой не требуется никаких определяющих соотношений, называется *свободной группой*; она строится следующим образом. Пусть S — (конечное или бесконечное) множество букв, $S=\{a, b, \ldots\}$, называемых *образующими*. Назовем *словом* конечную упорядоченную систему символов $x_1\, x_2 \ldots\, x_k$, где x_i является либо буквой из множества S, либо символом вида α^{-1}, причем $\alpha \in S$. Два слова *равны*, если одно из них можно получить из другого включением или вычеркиванием (сокращением) пар символов вида $\alpha\alpha^{-1}$ или $\alpha^{-1}\alpha$ $(\alpha \in S)$. Очевидно, желательно сократить максимально возможное количество пар; это может привести к пустому слову, т. е. слову, не содержащему никаких букв; обозначим такое слово через e, полагая при этом, что e не является буквой из S. (Например, $abc^{-1}cb^{-1}a^{-1}=e$.) Чтобы получить *произведение* двух слов, нужно просто одно слово написать непосредственно за другим словом: если $w=x_1x_2\ldots x_k$, $u=y_1y_2\ldots y_l$, то

$$w \circ u = x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_l, \qquad u \circ w = y_1 \ldots y_l x_1 \ldots x_k.$$

Нетрудно проверить, что множество всех слов, состоящих из элементов заданной системы образующих S, представляет собой группу G относительно указанного произведения. Она называется *свободной группой*, порожденной множеством S. Единицей является пустое слово e, а обратным слову $x_1x_2\ldots x_k$ будет слово $y_ky_{k-1}\ldots y_1$, где $y_i=\alpha^{-1}$, если $x_i=\alpha$, и $y_i=\alpha$, если $x=\alpha^{-1}$.

Определяющие соотношения между элементами группы можно устанавливать (в таком случае группа уже не будет свободной) при помощи уравнений $w_1=e$, $w_2=e$ и т. д., где $w_1, w_2, \ldots$ — некоторые слова. Эти соотношения определяют структуру группы.

Если среди соотношений мы имеем $aba^{-1}b^{-1}=e$ (что эквивалентно $ab=ba$) для каждой пары a, b элементов из S, то эта группа является абелевой. Если кроме этих соотношений других *нет*, то G называется *свободной абелевой группой*. Свободные группы и свободные абелевы группы будут использоваться в § 23.7 при изучении видов многосвязностей, которыми может обладать многообразие. Структура свободной группы или свободной абелевой группы определяется исключительно числом образующих.

Любая конечная группа G эквивалентна (т. е. изоморфна) некоторой группе, определенной при помощи образующих элементов и определяющих соотношений: в качестве S можно взять множество всех элементов группы G, а определяющие соотношения брать так, чтобы получить всю информацию, обеспечиваемую таблицей умножения группы; например, если из таблицы следует, что $ab=c$, то одним из определяющих соотношений будет $abc^{-1}=e$.

Если группа определяется конечным числом образующих и конечной системой соотношений, она называется *конечно определенной*;

однако эта группа может быть бесконечного порядка, и такие группы создают многие сложные и трудные задачи для современного исследования. Так называемая проблема тождества, хотя и не совсем новая, дает представление об этих трудностях. Помимо определяющих соотношений $w_1=e, \ldots, w_n=e$ всегда возможны другие уравнения вида $w=e$; например, w может быть равно w_1w_2 или $w_0w_1w_0^{-1}$, где w_0— произвольное слово. *Проблема тождества*, впервые сформулированная в 1912 г., состоит в следующем: дана конечно определенная группа, найти процедуру (т. е. алгоритм), такую, что если дано произвольное слово w, выраженное через образующие группы, то процедура за конечное число шагов должна решить, является ли равенство $w=e$ истинным или ложным. В. Магнус в 1932 г. показал, как получить такой алгоритм для любой группы с одним определяющим соотношением. В 1955 г. П. С. Новиков дал (весьма длинное) доказательство алгоритмической неразрешимости проблемы тождества в общем случае. В настоящее время известны группы, которые определяются малым числом образующих и определяющих соотношений и для которых может быть доказано, что никакой алгоритм требуемого вида не существует.

18.13. КРАТНО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И КРИСТАЛЛЫ

Идеализированный кристалл состоит из очень большого числа идентичных элементарных структур, называемых элементарными ячейками и размещенных в виде трижды периодического массива или решетки в пространстве. Если $f(\mathbf{x})$ описывает плотность массы или заряда или аналогичную величину на этой структуре, то $f(\mathbf{x})$ является трижды периодической функцией. В общем случае функция $f(x_1, \ldots, x_n)=f(\mathbf{x})$ n вещественных переменных называется *n-кратно периодической*, если существует n линейно независимых векторов $\mathbf{v}(1), \ldots, \mathbf{v}(n)$, т. е. векторов, таких, что

$$\det\begin{pmatrix} v_1(1) & \ldots & v_1(n) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ v_n(1) & \ldots & v_n(n) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{18.13.1}$$

и что $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} &f(\mathbf{x}+\mathbf{v}(1))=f(\mathbf{x}), \\ &f(\mathbf{x}+\mathbf{v}(2))=f(\mathbf{x}), \\ &\quad\cdot \\ &\quad\cdot \\ &\quad\cdot \\ &f(\mathbf{x}+\mathbf{v}(n))=f(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{18.13.2}$$

для всех $\mathbf{x}$. Векторы $\mathbf{v}(i)$ называются *периодами функции* $f(\mathbf{x})$ если вектор $\mathbf{w}$ — любой вектор вида

$$\mathbf{w}=m_1\mathbf{v}(1)+\ldots+m_n\mathbf{v}(n), \tag{18.13.3}$$

где m_i — целые числа (положительные, отрицательные или нуль), то $f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}+\mathbf{w})$ для всех $\mathbf{x}$; поэтому $\mathbf{w}$ является тоже периодом функции $f(\mathbf{x})$. Кроме того, предполагается, что любой период $f(\mathbf{x})$ имеет вид (18.13.3) с целыми коэффициентами; тогда говорят, что векторы $\mathbf{v}(1), \ldots, \mathbf{v}(n)$ образуют *фундаментальную систему* периодов. Некоторые функции могут не обладать фундаментальной системой периодов даже в том случае, когда они являются периодическими в строгом смысле, например постоянные функции и функции, периодические по некоторым переменным и не зависящие от других переменных. Такие функции будут называться *вырожденными* и исключаться из рассмотрения на основании следующих физических соображений: каждый атом занимает некоторый объем, и функции, подобные потенциалу и плотности заряда, изменяются от центра атома к периферии, так что в любом данном направлении в пространстве неизбежны некоторые изменения. Кратно периодическая функция называется *невырожденной*, если она имеет фундаментальную систему периодов.

Множество точек $\mathbf{x}$ в $\mathbb{R}^n$, определяемое как

$$\mathbf{x}=m_1\mathbf{v}(1)+\ldots+m_n\mathbf{v}(n), \tag{18.13.4}$$

где m_i — целые числа, называется *решеткой функции* $f(\mathbf{x})$.

Если задать новые векторы $\mathbf{v}'(1), \ldots, \mathbf{v}'(n)$ в виде

$$\mathbf{v}'(j)=m_{j1}\mathbf{v}(1)+\ldots+m_{jn}\mathbf{v}(n), \tag{18.13.5}$$

где m_{jk} — целые числа, такие, что

$$\det\begin{pmatrix} m_{11} & \ldots & m_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \vdots & & \vdots \\ \cdot & & \cdot \\ m_{n1} & \ldots & m_{nn} \end{pmatrix}=\pm 1, \tag{18.13.6}$$

то $\mathbf{v}'(1), \ldots, \mathbf{v}'(n)$ также образуют фундаментальную систему периодов, поскольку, если разрешить систему уравнений (18.13.5) относительно $\mathbf{v}(j)$, то мы увидим, что $\mathbf{v}(j)$ являются линейными комбинациями векторов $\mathbf{v}'(j)$ с целыми коэффициентами. Обе эти фундаментальные системы порождают одну и ту же решетку.

18.14. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ И ТОЧЕЧНЫЕ ГРУППЫ

Пусть для любого фиксированного вектора $\mathbf{w}$ $T_\mathbf{w}$ обозначает трансляцию

$$T_\mathbf{w}: \mathbf{x}\to\mathbf{x}+\mathbf{w} \text{ (для всех } \mathbf{x}) \tag{18.14.1}$$

пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда кратно периодическая функция $f(\mathbf{x})$ инвариантна относительно всех преобразований из абелевой группы

$$\mathcal{T}=\{T_{\mathbf{w}}\colon \mathbf{w}\text{—период функции } f(\mathbf{x})\}, \qquad (18.14.2)$$

которая называется *группой трансляций* для функции $f(\mathbf{x})$. Функция $f(\mathbf{x})$ может быть, конечно, инвариантной и относительно других преобразований, таких, как некоторые повороты вокруг определенных осей, отражения в некоторых плоскостях и т. п. Группа G_s всех (однородных и неоднородных) линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, относительно которых $f(\mathbf{x})$ инвариантна, называется *пространственной группой функции* $f(\mathbf{x})$ или для $f(\mathbf{x})$, представляющей кристалл,— *пространственной группой кристалла.*

Элемент группы G_s есть преобразование вида

$$\mathbf{x}\longrightarrow\mathbf{x}'=M\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}, \qquad (18.14.3)$$

где M — невырожденная матрица, а $\boldsymbol{\xi}$ — вектор; это преобразование обозначается через $(\boldsymbol{\xi}, M)$. Произведение двух преобразований в группе G_s состоит в последовательном применении этих преобразований:

$$\mathbf{x}''=M_1\mathbf{x}'+\boldsymbol{\xi}_1=M_1(M_2\mathbf{x}+\boldsymbol{\xi}_2)+\boldsymbol{\xi}_1,$$

т. е.

$$(\boldsymbol{\xi}_1, M_1)\circ(\boldsymbol{\xi}_2, M_2)=(M_1\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\xi}_1, M_1M_2). \qquad (18.14.4)$$

Преобразование (18.14.3), при котором функция $f(\mathbf{x})$ инвариантна, называется *операцией симметрии функции* $f(\mathbf{x})$.

Вообще говоря, преобразования (18.14.3) включают трансляции, вращения, растяжения и сдвиги. Однако нетрудно видеть, что если $f(\mathbf{x})$ — непрерывная и невырожденная функция (в частности, если она представляет реальный кристалл), то растяжения и сдвиги можно исключить. Чтобы показать общий характер этого рассуждения, рассмотрим сдвиг в плоскости: квадратная решетка из точек с целочисленными координатами на плоскости x, y инвариантна относительно группы трансляций $\mathcal{T}$, состоящей из трансляций вида $x\to x+k$, $y\to y+l$ (k, l целые), а также относительно различных преобразований, включающих сдвиги типа

$$S_n\colon\ x\longrightarrow x+ny,\quad y\longrightarrow y\quad (n\text{—целое число}). \qquad (18.14.5)$$

Если взять в качестве $f(x, y)$ функцию, равную 1 в точках решетки (x, y целые) и равную 0 в остальных точках, то f будет инвариантна и относительно преобразования (18.14.5). Однако *непрерывная* невырожденная дважды периодическая функция $f(x, y)$ не может быть инвариантной относительно (18.14.5). Если бы она была инвариантной, то было бы справедливо тождество

$$f(x+ny-k, y)\equiv f(x, y)$$

для всех n и k; для иррационального y числа $ny-k$ всюду плотны на $\mathbb{R}$; таким образом, по непрерывности $f(x, y)$ должна бы не зависеть от x для всех иррациональных y, а значит, и для всех y (снова по непрерывности), и, следовательно, $f(x, y)$ должна бы быть вырожденной. Поэтому сдвиги нужно исключить. Рассуждая аналогичным образом, можно заключить, что матрица M в (18.14.3) должна быть ортогональной.

Множество всех ортогональных матриц M, таких, что (ξ, M) содержится в G_s для некоторого ξ, также представляет собой группу; она называется *точечной группой функции* $f(\mathbf{x})$ и обозначается через G_p. Ясно, что отображение

$$\varphi\colon\ G_s \longrightarrow G_p; \ (\xi,\ M) \longrightarrow M \qquad (18.14.6)$$

есть гомоморфизм, ядром которого является $\mathcal{T}$; следовательно, по теореме о гомоморфизмах для групп оказывается, что $\mathcal{T}$ — нормальная подгруппа группы G_s, а G_p изоморфна фактор-группе $G_s/\mathcal{T}$.

Упражнение

1. Используя (18.14.4), найдите формулу для $(\xi, M)^{-1}$. Затем непосредственно проверьте, что $\mathcal{T}$ является нормальной подгруппой группы G_s, для чего покажите, что если (ξ, I) — любая чистая трансляция (здесь I — единичная матрица), то любой групповой элемент вида $(\eta, M)(\xi, I)(\eta, M)^{-1}$ также представляет собой чистую трансляцию.

В кристаллографии можно получить обширную информацию о кристаллической структуре путем определения G_p и $\mathcal{T}$ (причем последнюю группу при помощи решетки, которую она порождает). Однако, вообще говоря, это дает меньше информации, чем можно было бы получить, задавая пространственную группу G_s. В частности, G_s может содержать, а может и не содержать G_p в качестве подгруппы, так как G_s может включать (ξ, M) для некоторого $\xi \neq \mathbf{0}$, но не включать $(\mathbf{0}, M)$.

Замечание. $\mathcal{T}$ как абстрактная группа изоморфна свободной абелевой группе с n образующими, и, следовательно, не дает никакой информации. Однако решетка, порожденная при помощи $\mathcal{T}$, в случае заданной фундаментальной системы периодов несет информацию о $f(\mathbf{x})$. Пространственная группа, относительно которой решетка преобразуется сама в себя, содержит пространственную группу функции $f(\mathbf{x})$ в качестве подгруппы.

Для $n=3$ подробное описание возможных операций симметрии, а также описание пространственных и точечных групп содержатся в книге Генри и Лонсдейла [1965]. Операциями симметрии являются: чистая трансляция, чистое вращение, отражение в плоскости, отражение совместно с поворотом вокруг оси, перпендикулярной плоскости отражения, отражение совместно с трансляцией параллельно плоскости отражения и вращение совместно с трансляцией параллельно оси вращения. Для любого вращения единственно возможными углами поворота будут $\pm 2\pi/n$, где $n=1, 2, 3, 4, 6$, как это показано для случая чистых вращений в упражнениях 2 и 3 (см. ниже). Всего существуют 32 точечные группы, 14 типов решеток и 230 пространственных групп.

Упражнения

2. (Цель этого упражнения — показать, что единственно возможными чисто вращательными симметриями двумерного кристалла являются повороты вокруг осей симметрии n-го порядка, где $n=1, 2, 3, 4$ или 6.) Рассмотрим невырожденную дважды периодическую функцию $f(x, y)$ и запишем ее в виде $f(z)$, т. е. как (неаналитическую) вещественную функцию комплексной переменной $z=x+iy$. Пусть α и β — фундаментальная пара периодов; тогда $Re(\alpha/\beta) \neq 0$ и $f(z+n\alpha+m\beta) \equiv f(z)$, где n и m — целые числа. Выбирая подходящую ориентацию и масштаб по осям x и y, примем для простоты $\beta=1$. Допустим, что $f(z)$ также инвариантна относительно вращения $z \longrightarrow e^{i\theta}z$. Из уравнений

$$f(z)=f(ze^{i\theta}),$$
$$f(z+1)=f(ze^{i\theta}+e^{i\theta}),$$
$$f(z+\alpha)=f(ze^{i\theta}+\alpha e^{i\theta})$$

заключаем, что $e^{i\theta}$ и $\alpha e^{i\theta}$ являются периодами функции $f(z)$. Исходя из этого, покажите, что α удовлетворяет уравнению

$$r\alpha^2+(s-p)\alpha-q=0,$$

где p, q, r, s — целые числа, такие, что

$$ps-rq=1,$$

откуда следует, что

$$e^{i\theta}=(l \pm \sqrt{l^2-4})/2, \quad l=p+s.$$

Для того чтобы θ было вещественным, l должно принадлежать $[-2, 2]$. Получите отсюда заключение, что для θ возможны лишь следующие значения: 0, $\pm\pi/3$, $\pm\pi/2$, $\pm 2\pi/3$, $\pm\pi$.

3. Обобщите заключение упражнения 2 на трехмерный случай следующим образом: допустите, что функция $f(x, y, z)=f(\mathbf{x})$ трижды периодична и что $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ — фундаментальная система периодов. Предположите далее, что $f(\mathbf{x})$ инвариантна относительно поворота на угол θ вокруг некоторой оси в пространстве. Выбирая начало координат на этой оси, запишите вращение в виде $\mathbf{x} \longrightarrow R\mathbf{x}$, где R — ортогональная матрица размера 3×3 с детерминантом, равным 1. Покажите, что векторы

$$\mathbf{u}'=R\mathbf{u}-\mathbf{u}, \quad \mathbf{v}'=R\mathbf{v}-\mathbf{v}, \quad \mathbf{w}'=R\mathbf{w}-\mathbf{w}$$

являются периодами функции $f(\mathbf{x})$, перпендикулярны оси вращения и не коллинеарны. Отсюда последует, что $f(\mathbf{x})$ дважды периодична в любой плоскости, перпендикулярной оси вращения, а значит, применим метод упражнения 2.

В некоторых книгах ограничение возможных осей симметрии в кристалле осями симметрии только 1-го, 2-го, 3-го, 4-го и 6-го порядков выводят из несколько таинственного «принципа рациональных индексов», который, как говорят, должен иметь эмпирическое происхождение. Мы видели, однако, что это ограничение является непосредственным следствием наличия трижды периодической структуры; поэтому «принцип рациональных индексов» не нужен.

18.15. ПРЯМОЕ И ПОЛУПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП. СИММОРФНЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГРУППЫ

Если G_0 — нормальная подгруппа группы G, то в общем случае нельзя полагать, что G является произведением групп G_0 и G/G_0; в самом деле, G в общем случае даже не содержит подгруппу, изоморфную G/G_0. Далее мы рассмотрим два исключения из этого общего правила.

Рассмотрим простейший случай. Пусть H и K — подгруппы группы G, такие, что любой элемент g из G может быть единственным образом представлен в виде hk, где h содержится в H, а k — в K; кроме того, каждый элемент h из H коммутирует с каждым элементом k из K. В таком случае говорят, что G представляет собой *прямое произведение* групп H и K; символически $G = H \times K$ или $G = K \times H$. Единица e является единственным элементом из $H \cap K$ (если бы в $H \cap K$ существовал какой-либо другой элемент a, то существовали бы два представления в виде hk, а именно ae и ea). Далее, H и K — нормальные подгруппы группы G, ибо если $a = hk_1$ — любой элемент из G, а k_2 — любой элемент из K, то $ak_2a^{-1} = hk_1k_2k_1^{-1}h^{-1}$, но он равен $k_1k_2k_1^{-1}$, поскольку h коммутирует с любым элементом из K; отсюда ak_2a^{-1} принадлежит K и $K \lhd G$; аналогично $H \lhd G$. Кроме того, факторгруппа G/H изоморфна подгруппе K, а G/K изоморфна подгруппе H, так как любой элемент из G/H является смежным классом $aH = \{ah: h \in H\}$ и может быть однозначно представлен как смежный класс kH (где $a = kh$, $k \in K$, $h \in H$); ясно, что отображение $k \to kH$ есть изоморфизм групп K и G/H, ибо $k_1Hk_2H = k_1k_2H$.

Другая точка зрения состоит в допущении, что H_0 и K_0 — произвольные заданные группы, и в построении группы G, называемой их *прямым произведением*, следующим образом: элементами группы G являются пары (h, k), где $h \in H_0$ и $k \in K_0$, а операция (закон композиции) определяется так:

$$(h_1, k_1) \circ (h_2, k_2) \overset{\text{def}}{=} (h_1h_2, k_1k_2). \tag{18.15.1}$$

Единичным элементом G является пара (e, e'), где e и e' — единицы групп H_0 и K_0 соответственно; обратный элемент $(h, k)^{-1} = (h^{-1}, k^{-1})$. Пусть теперь H и K — подмножества элементов G, а именно

$$H = \{(h, e'): h \in H_0\}, \quad K = \{(e, k): k \in K_0\}.$$

Легко проверить, что G, H и K — группы, что H и K — нормальные подгруппы группы G, что $H \cong H_0$, а $K \cong K_0$ и, наконец, что $G = H \times K$.

Упражнение

1. Проверьте сформулированные в последнем абзаце утверждения.

В силу изоморфизма $H \cong H_0$ и $K \cong K_0$ группа G также называется прямым произведением H_0 и K_0; обычно практически H_0 и K_0 *отождествляют* с подгруппами H и K и вообще опускают индекс 0.

Упражнение

2. Допустим, что единица e является единственным общим элементом двух подгрупп H и K группы G. Покажите, что h из H коммутирует с любым k из K тогда и только тогда, когда $H \triangleleft G$ и $K \triangleleft G$.

В следующем простом случае (полупрямое произведение) все еще допускают, что любой элемент g из G может быть выражен единственным образом в виде hk, где $h \in H$ и $k \in K$, но при этом предполагается, что $H \triangleleft G$, тогда как K не обязательно нормальный делитель группы G. Тогда G называется *полупрямым произведением* H и K. Любой смежный класс подгруппы H в G (т. е. любой элемент факторгруппы G/H) имеет однозначное представление $kH = Hk$, где k принадлежит K; более того, $Hk_1Hk_2 = Hk_1k_2$, и, значит, факторгруппа G/H изоморфна K. Если g_1 и g_2, принадлежащие G, единственным образом представляются в виде $g_1 = h_1k_1$ и $g_2 = h_2k_2$, то произведение $g_3 = g_1g_2$ единственным образом представляется в виде h_3k_3, где

$$h_3 = h_1k_1h_2k_1^{-1}, \quad k_3 = k_1k_2.$$

(Заметим, что элемент $k_1h_2k_1^{-1}$ принадлежит H, поскольку H — нормальная подгруппа, но этот элемент не обязательно равен h_2, если только K не является тоже нормальной подгруппой.)

Группа G всех движений в плоскости (или в n-мерном пространстве) представляет собой пример полупрямого произведения. Движением является преобразование

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}' = M\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, \tag{18.15.2}$$

где M — вещественная ортогональная матрица размером 2×2 (или $n \times n$) с детерминантом, равным 1, а $\boldsymbol{\xi}$ — произвольный вектор. Группа G порождается группой трансляций $\mathcal{T}$

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$$

и группой $\mathcal{R}$ вращений вокруг начала координат

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}' = M\mathbf{x}.$$

[Операцией (законом композиции) в $\mathcal{T}$ является векторное сложение $\xi_1+\xi_2$, а в группе $\mathcal{R}$ — матричное умножение M_1M_2. Здесь $\mathcal{T}$ обозначает группу *всех* трансляций, а не только трансляций решетки.] Комбинированное преобразование (18.15.2) обозначается через (ξ, M), как и в предыдущем параграфе, где было показано, что операция в G задается правилом

$$(\xi_1, M_1)\circ(\xi_2, M_2)=(\xi_1+M_1\xi_2, M_1M_2). \qquad (18.15.3)$$

Если бы правая часть этого равенства имела вид $(\xi_1+\xi_2, M_1M_2)$, то группа G была бы прямым произведением групп $\mathcal{T}$ и $\mathcal{R}$. Значение члена $M_1\xi_2$ для данных двух групп состоит в следующем. Во-первых, для фиксированной матрицы M отображение

$$\xi\longrightarrow M\xi \text{ для всех } \xi$$

группы $\mathcal{T}$ на себя есть автоморфизм [поскольку оно взаимно однозначно и является отображением на всю группу (M обратима)] и отображает $\xi+\eta$ на $M\xi+M\eta$; этот автоморфизм обозначается через $\tau(M)$. Во-вторых, когда M пробегает по всем элементам $\mathcal{R}$, построенные автоморфизмы образуют группу $\mathcal{A}$, которая является подгруппой группы всех автоморфизмов группы трансляций $\mathcal{T}$. В-третьих, отображение

$$M\longrightarrow\tau(M) \text{ для всех } M\in\mathcal{R}$$

есть гомоморфизм группы $\mathcal{R}$ на $\mathcal{A}$, так как если к произвольному элементу ξ из $\mathcal{T}$ применить автоморфизм $\tau(M)$: $\xi\longrightarrow\xi'=M\xi$, а к полученному образу применить автоморфизм $\tau(N)$: $\xi'\longrightarrow\xi''=N\xi'$, то результатом будет отображение $\xi\longrightarrow NM\xi$, а это значит, что $\tau(N)\,\tau(M)=\tau(NM)$.

Определение. Пусть H и K — две произвольные группы (в обеих группах операцию будем записывать в виде умножения), и пусть задан гомоморфизм $k\longrightarrow\tau(k)$, отображающий группу K в группу автоморфизмов группы H [для заданного k $\tau(k)$ отображает h на $\tau(k)h$ для всех h из H]. Тогда множество всех пар (h, k), где $h\in H$ и $k\in K$, с операцией над такими парами, задаваемой в виде

$$(h_1, k_1)\circ(h_2, k_2)=(h_1\tau(k_1)h_2, k_1k_2), \qquad (18.15.4)$$

представляет собой группу, называемую *полупрямым произведением* групп H и K (или группы H по группе K), и обозначается через $H\times_\tau K$.

Основные свойства полупрямого произведения кратко рассмотрены в приведенных ниже упражнениях. Читателю настоятельно рекомендуется выполнить эти упражнения, поскольку в них устанавливается, что данное выше определение, несмотря на кажущуюся достаточно произвольной формулировку, содержит все необходимое, чтобы придать этому полупрямому произведению все желательные свойства.

Упражнения

3. Покажите, что единицей группы $G = H \times_\tau K$ является пара (e, e'), где e и e' — единичные элементы H и K.

4. Покажите, что элемент $(\tau(k^{-1})\, h^{-1},\ k^{-1})$ является обратным (т. е. и левым, и правым обратным) элементу (h, k).

5. Покажите, что в группе G справедлив закон ассоциативности. *Предостережение*: $\tau(k)[h_1 h_2]$ — это не то же самое, что $[\tau(k) h_1] h_2$, потому что $\tau(k)$ — отображение, а не элемент группы. Упражнения 3, 4 и 5 показывают, что G является группой, как и утверждалось в определении полупрямого произведения.

6. Теперь отождествите H и K с подгруппами $\{(h, e')$: все h принадлежат $H\}$ и $\{(e, k)$: все k принадлежат $K\}$ соответственно и покажите, что H — нормальная подгруппа группы G.

7. Постройте факторгруппу G/H и покажите, что она изоморфна подгруппе K.

8. Наоборот, допустим, что группа G содержит подгруппы H и K, одна из которых (H) является нормальной, причем $H \cap K = \{e\}$ и факторгруппа G/H изоморфна подгруппе K; покажите, что в этом случае G есть полупрямое произведение, т. е. $H \times_\tau K$, где для любого $k \in K$ $\tau(k)$ является отображением $h \longrightarrow khk^{-1}$ для всех h из H.

9. Покажите, что полупрямое произведение равно прямому произведению $H \times K$ в том и только том случае, когда $\tau(k) \equiv I$ [т. е. гомоморфизм $k \longrightarrow \tau(k)$ группы K в группу автоморфизмов группы H отображает все элементы группы K в единичный элемент (тождественное отображение группы H на себя)].

10. Покажите, что подгруппа K, также как и H, является нормальной подгруппой группы G тогда и только тогда, когда $\tau(k) \equiv I$, т. е. в том и только том случае, когда произведение является прямым.

Упражнение 8 показывает, что автоморфизмы $\tau(k)$, которые фигурируют в прямом произведении двух заданных групп H и K, суть внутренние автоморфизмы группы $H \times_\tau K$. Этот факт не совсем понятен в случае группы движений G при использовании аддитивных обозначений для группы трансляций $\mathcal{T}$. Если же трансляцию $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \xi$ обозначить через T_ξ и использовать мультипликативные обозначения, так что (ξ, M) будет просто результирующей операцией $T_\xi M$, то $T_{M\xi} = MT_\xi M^{-1}$. Таким образом, автоморфизм $\tau(M)$: $\xi \longrightarrow M\xi \in \mathcal{T}$ имеет вид

$$\tau(M):\ T_\xi \longrightarrow MT_\xi M^{-1},$$

и, значит, является внутренним автоморфизмом группы G.

В соответствии с предыдущим параграфом группа трансляций некоторой кристаллической структуры, заданная при помощи (18.14.2), является нормальной подгруппой пространственной группы G_s и точечная группа G_p изоморфна факторгруппе $G_s/\mathcal{T}$ [напомним, что точечная группа есть группа всех вращений и отражений $\mathbf{x} \longrightarrow M\mathbf{x}$, таких, что (ξ, M) принадлежит G_s для некоторого ξ]. Группа G_s может как содержать, так и не содержать, подгруппу (скажем, G_p'), изоморфную G_p; если G_s содержит такую подгруппу, то $\mathcal{T}$ и G_p' могут иметь единственный общий элемент — единицу группы e, поскольку все другие элементы группы $\mathcal{T}$ имеют бесконечный порядок (если $T \in \mathcal{T}$, то $T^m \neq I$ для всех $m \neq 0$), тогда как элементы группы G_p имеют конечный порядок. Следовательно, согласно упражнениям 5 и 6, G_s содержит такую подгруппу тогда и только тогда, когда она сама является полупрямым произведением $\mathcal{T} \times_\tau G_p$. В таком случае кристаллографы называют пространственную группу *симморфной.*

Кристаллограф, приступающий к анализу множества данных по отражению рентгеновских лучей для определения кристаллической структуры, часто заранее знает точечную группу (исходя из

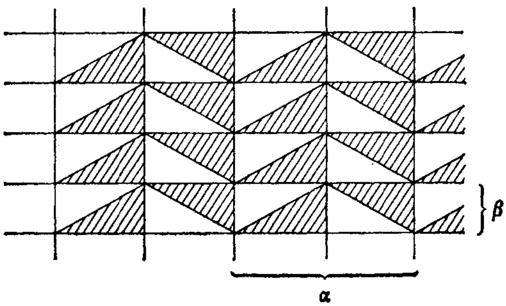

Рис. 18.3.

результатов измерения углов между гранями кристалла и плоскостями спайности, а также из других макроскопических свойств кристаллов). Однако он не может допускать, что рассматриваемая пространственная группа содержит экземпляр этой точечной группы, т. е. допускать, что пространственная группа симморфна.

Простой пример несимморфной пространственной группы в двух измерениях дает функция $f(x, y)$, равная 1 в заштрихованных треугольниках на рис. 18.3 и равная 0 в остальной части плоскости. Используя комплексные обозначения, видим, что пространственная группа порождается трансляциями $z \to z+\alpha$, $z \to z+i\beta$ и так называемыми скользящими отражениями $z \to \bar{z}+\alpha/2$. Следовательно, точечные группы содержат отражения $z \to \bar{z}$, тогда как пространственная группа не имеет этих элементов.

Полупрямое произведение $H \times_\tau K$ является примером так называемого *расширения группы* H при помощи группы K. Более полное обсуждение расширений групп см. в книге Куроша [1967, гл. 12] или в книге Редеи [1959, § 50].