Глава 19

НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ

Общие линейные, специальные линейные, ортогональные и унитарные группы; группа вращений и группа Лоренца; теорема Эйлера, четыре компоненты полной группы Лоренца, прецессия Томаса; многообразия группы; внутренние координаты; двусвязность группы вращений; гомоморфизм группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$ и гомоморфизм группы $SL(2)$ на $\mathscr{L}_p$; простота группы вращений и группы Лоренца.

Предварительные сведения: гл. 18 и некоторые алгебраические факты.

Непрерывными группами (формальное определение будет дано в гл. 25) называются группы матриц (или соответствующих линейных преобразований), в которых элементы группы непрерывно зависят от некоторых параметров, подобных углам Эйлера в случае группы вращений. Здесь мы опишем свойства некоторых известных непрерывных групп.

Группа всех невырожденных (в общем случае комплексных) матриц размера $n \times n$ называется *общей линейной группой* и обозначается через $GL(n, \mathbb{C})$. Группа вещественных матриц обозначается через $GL(n, \mathbb{R})$. Подгруппы групп $GL(n, \mathbb{C})$ и $GL(n, \mathbb{R})$, состоящие из матриц с $\det = 1$, называются *специальными* (или *унимодулярными*) линейными группами и обозначаются через $SL(n, \mathbb{C})$ и $SL(n, \mathbb{R})$. Обозначения других подгрупп группы $GL(n, \mathbb{C})$ будут приведены в ходе обсуждения.

19.1. ОРТОГОНАЛЬНАЯ ГРУППА И ГРУППА ВРАЩЕНИЙ

В матрично-векторных обозначениях плоское вращение (18.1.1) представляется в виде

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}' = R\mathbf{x}, \tag{19.1.1}$$

где

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad R = R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{19.1.2}$$

При преобразовании (19.1.1) длина любого вектора и угол между любыми двумя векторами сохраняются, так что если $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$ и $\mathbf{w}' = R\mathbf{w}$, то $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{w}' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{w}$ для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{w}$.

Найдем теперь преобразования, обладающие таким свойством, в n-мерном случае, т. е. задав

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{и т. д.} \quad \text{и} \quad R=\begin{pmatrix} R_{11} & \dots & R_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ R_{n1} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix},$$

будем искать такие матрицы R, что $(R\mathbf{x})\cdot(R\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Пусть $\xi(j)$ обозначает вектор, j-я компонента которого равна единице, а остальные компоненты равны нулю. Тогда, в частности, матрица R должна быть такой, что

$$R\xi(j)\cdot R\xi(k)=\xi(j)\cdot\xi(k)=\begin{cases} 1, & \text{если } j=k, \\ 0, & \text{если } j\neq k. \end{cases}$$

Так как вектор

$$R\xi(j)=\begin{pmatrix} R_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_{nj} \end{pmatrix}$$

представляет собой j-й столбец матрицы R, ясно, что столбцами матрицы R являются попарно ортогональные единичные векторы. Такая матрица называется *ортогональной.* Обратно, если R обладает указанным свойством, то $R\mathbf{x}\cdot R\mathbf{y}=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Если через R^T обозначить матрицу, полученную транспонированием матрицы R, то строки матрицы R^T будут столбцами матрицы R и, по правилу умножения матриц, имеем

$$R^TR=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=I, \qquad (19.1.3)$$

и мы получили другую характеристику ортогональной матрицы. Поскольку $R^T=R^{-1}$—матрица обратного преобразования, также сохраняющего скалярное произведение, отсюда следует, что R^T— тоже ортогональная матрица; следовательно, столбцы R^T (т. е. строки матрицы R) образуют другую систему n попарно ортональных единичных векторов. Так как $\det R^T = \det R$, из (19.1.3) следует, что $\det R = \pm 1$. Теперь мы определим

$$O(n) = \{R\colon R \text{ — вещественная ортогональная матрица размера } n \times n\}$$

в качестве *ортогональной группы* в n-мерном случае, в которой групповой операцией является матричное умножение. Тогда подгруппа

$$SO(n) = \{R \in O(n)\colon \det R = 1\}$$

есть *специальная* (или *унимодулярная*) ортогональная группа в n-мерном случае. Мы можем рассматривать эти группы и как группы матриц, и как группы соответствующих преобразований $\mathbf{x} \to R\mathbf{x}$ в n-мерном пространстве.

19.2. ГРУППА ВРАЩЕНИЙ SO (3). ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА

Сейчас мы покажем, что если R — ортогональная (вещественная) матрица размера 3×3 с $\det R = 1$, то преобразование $\mathbf{x} \to R\mathbf{x}$ может быть получено следующим образом: сначала выбирается некоторое направление в пространстве, проходящее через начало координат, а затем осуществляется поворот системы координат на нужный угол вокруг этого направления как вокруг оси. В этом заключается *теорема Эйлера*. Пусть λ_i и $\mathbf{v}_i$ $(i=1, 2, 3)$ — собственные значения и собственные векторы матрицы R (они могут быть комплексными даже в том случае, когда R вещественна); они удовлетворяют уравнениям

$$R\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{19.2.1}$$

Так как R также и унитарная матрица, мы имеем $\|R\mathbf{v}_i\| = \|\mathbf{v}_i\|$, где $\|\mathbf{v}\|$ для любого (вообще говоря, комплексного) вектора $\mathbf{v}$ обозначает $(|v_x|^2 + |v_y|^2 + |v_z|^2)^{1/2}$; следовательно,

$$|\lambda_i| = 1 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{19.2.2}$$

Числа λ_i являются корнями кубического уравнения с вещественными коэффициентами

$$\det(\lambda I - R) = 0; \tag{19.2.3}$$

произведение этих корней равно единице:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \det R = 1. \tag{19.2.4}$$

По меньшей мере один из этих корней является вещественным; если два других (скажем, λ_2 и λ_3) комплексны, то $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$ и в силу (19.2.2) $\lambda_2\lambda_3 = 1$; следовательно, $\lambda_1 = 1$. Если все три корня являются вещественными, то они равны либо 1, 1, 1, либо 1, -1, -1. В любом случае всегда имеется один корень, скажем λ_1, равный $+1$; следовательно,

$$R\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1,$$

откуда видно, что прямая, проведенная через начало координат в направлении вектора $\mathbf{v}_1$ ($\mathbf{v}_1$ может быть выбран вещественным), остается инвариантной относительно преобразования $\mathbf{x} \to R\mathbf{x}$; очевидно, эта прямая является осью вращения.

[**Напоминание**. Если M — нормальная матрица, т. е. матрица, которая коммутирует со своей эрмитово сопряженной, т. е. если $MM^* = M^*M$ (в частности, эрмитовы матрицы и унитарные матрицы являются нормальными), то из собственных векторов матрицы M можно построить полную ортонормированную (относительно эрмитова скалярного произведения) систему векторов в n-мерном пространстве. Если все собственные значения различны, то собственные векторы автоматически ортогональны; если же λ является r-кратным собственным значением, то соответствующее собственное подпространство r-мерно и в нем можно выбрать ортонормированный базис; сделав так для каждого собственного подпространства, можно получить полную ортонормированную систему векторов.]

Пусть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = e^{i\theta}$, $\lambda_3 = e^{-i\theta}$ и векторы $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ образуют ортонормированную систему (они являются собственными векторами). Возьмем новые векторы

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{u}_2 = (1/\sqrt{2})(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3), \quad \mathbf{u}_3 = (i/\sqrt{2})(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3); \tag{19.2.5}$$

они также образуют ортонормированную систему (причем все эти векторы можно считать вещественными, поскольку $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$ могли быть выбраны комплексно сопряженными); отсюда

$$R\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1, \qquad R\mathbf{u}_2 = \cos\theta\,\mathbf{u}_2 + \sin\theta\,\mathbf{u}_3, \qquad R\mathbf{u}_3 = -\sin\theta\,\mathbf{u}_2 + \cos\theta\,\mathbf{u}_3. \tag{19.2.6}$$

Мы видим, что преобразование, описываемое матрицей R, является вращением в плоскостях, перпендикулярных вектору $\mathbf{u}_1$.

Если задана матрица R, то угол и ось вращения практически находятся следующим образом. Так как сумма собственных значений матрицы равна ее следу, угол θ задается уравнением

$$1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = R_{11} + R_{22} + R_{33},$$

или

$$\cos\theta = {}^1/_2\,(R_{11} + R_{22} + R_{33} - 1). \tag{19.2.7}$$

Далее, ось вращения совпадает с направлением вектора $\mathbf{v}$ (выше он обозначался через $\mathbf{v}_1$), который соответствует собственному значению $\lambda = 1$; следовательно, $R\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Но в силу ортогональности матрицы R $R^TR = I$, откуда $\mathbf{v} = R^T\mathbf{v}$. Поэтому $(R - R^T)\mathbf{v} = 0$, так что компоненты v_1, v_2, v_3 вектора $\mathbf{v}$ находятся в отношении

$$v_1 : v_2 : v_3 = (R_{23} - R_{32}) : (R_{31} - R_{13}) : (R_{12} - R_{21}). \tag{19.2.8}$$

Упражнение

Проведите аналогичный анализ группы $SO(n)$ для произвольного n.

19.3. УНИТАРНЫЕ ГРУППЫ

Обобщение ортогональных групп на комплексный случай можно реализовать двумя способами. Первый путь основывается на том, что комплексная ортогональная матрица есть любая комплексная матрица M, которая удовлетворяет соотношению $M^TM=I$ точно так же, как и в вещественном случае. Но, видимо, полученные так группы не будут представлять большой интерес.

Второй путь: назовем *унитарной* матрицу U, такую, что $U^*U=I$ (тогда и $UU^*=I$). При унитарном преобразовании $\mathbf{x}\to U\mathbf{x}$ n-мерного комплексного пространства C^n эрмитово скалярное произведение

$$\mathbf{x}^*\mathbf{y}=\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_j y_j$$

любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ остается инвариантным. Обратно, если это произведение инвариантно для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, то матрица U является унитарной. *Унитарной группой* $U(n)$ называется группа всех унитарных матриц размера $n\times n$ (или унитарных преобразований в C^r).

Поскольку $\det U^*$ комплексно сопряжен с $\det U$, из равенства $U^*U=I$ следует, что $|\det U|=1$, т. е. $\det U$ есть число на единичной окружности в комплексной плоскости. Подгруппа группы $U(n)$, состоящая из унитарных матриц с $\det U=1$, называется *специальной* (или *унимодулярной*) унитарной группой и обозначается через $SU(n)$.

19.4. ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Если x, y, z, t и x', y', z', t' — декартовы координаты в двух инерциальных системах отсчета, оси которых параллельны, но вторая система движется относительно первой со скоростью V в направлении $+x$ и если в момент $t=t'=0$ обе системы совпадали, то, согласно специальной теории относительности,

$$x'=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t=\frac{t'-(V/c^2)\,x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \qquad (19.4.1)$$

Другие инерциальные системы могут быть получены путем относительного движения в направлениях других осей координат, вращений в пространстве, смещения начала отсчета пространства-времени, пространственных отражений, обращения времени. Если учитываются отражения и обращение времени, то мы имеем полную группу Лоренца, в противном случае — собственную группу Лоренца. Смещение начала координат здесь не обсуждается, так что рассматриваемые преобразования однородны, т. е. уравнения не содержат постоянных членов.

Если ввести обозначения (обычные для теории относительности)

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct$$

(иногда ct обозначают через x^0) и определить φ формулой

$$\operatorname{sh} \varphi = -\frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \tag{19.4.2}$$

то (19.4.1) можно записать в виде

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} p^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \tag{19.4.3}$$

где коэффициенты p^{μ}_{ν} образуют матрицу

$$[p^{\mu}_{\nu}] = P(\varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \varphi & 0 & 0 & \operatorname{sh} \varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} \varphi & 0 & 0 & \operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix}. \tag{19.4.4}$$

В оставшейся части данного параграфа будет использоваться *соглашение о суммировании*, по которому предполагается, что любой член, содержащий повторяющийся индекс [например, ν в (19.4.3)], уже просуммирован по этому индексу (по $\nu = 1, 2, 3, 4$); таким образом, (19.4.3) можно записать просто как $x'^{\mu} = p^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$. В теории относительности индексы, обозначенные греческими буквами, пробегают обычно значения от 1 до 4, а индексы, обозначенные латинскими буквами,— значения от 1 до 3.

Множество $\{P(\varphi)\}$ матриц (или преобразований) указанного выше вида, получаемое, когда φ принимает все вещественные значения, представляет собой группу, которая будет обозначена через $\mathscr{L}_x$,— эта группа является подгруппой группы Лоренца. Заметим, что

$$P(\varphi_1) P(\varphi_2) = P(\varphi_1 + \varphi_2); \tag{19.4.5}$$

из этого уравнения можно получить *закон композиции* (коллинеарных) *скоростей*, иначе говоря, получить формулу для скорости, с которой третья инерциальная система отсчета движется относительно первой системы, через скорость второй системы относительно первой и скорость третьей системы относительно второй; вывод формулы оставляем в качестве упражнения.

Если вторая система отсчета получается лишь путем вращения первой системы в пространстве, то преобразование задается матрицей вида

$$R=\begin{pmatrix} & & & 0\\ & (R') & & 0\\ & & & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{19.4.6}$$

где через R' обозначена матрица размера 3×3 собственного вращения, т. е. элемент группы $SO(3)$. Множество всех таких матриц (или преобразований) является *подгруппой вращений* группы Лоренца и обозначается через $\mathcal{R}$.

Группа, порождаемая элементами групп $\mathscr{L}_x$ и $\mathcal{R}$, т. е. группа, состоящая из всех конечных произведений $Q_1Q_2\ldots Q_j$, где каждый множитель Q_i имеет вид либо (19.4.4), либо (19.4.6), называется *собственной* (или *ограниченной*) *группой Лоренца* и обозначается через $\mathscr{L}_p$. Собственная группа Лоренца является *связной* в следующем смысле.

Лемма. *Если Q_0 — произвольный элемент группы $\mathscr{L}_p$, то существует однопараметрическое семейство $Q(\lambda)$ элементов группы $\mathscr{L}_p$, таких, что все матричные элементы непрерывно зависят от λ для $0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_0$, причем $Q(0)=I$, $Q(\lambda_0)=Q_0$.*

Доказательство. Во-первых, любой элемент $P(\varphi)$ из группы $\mathscr{L}_x$ можно перевести в единицу группы, меняя φ непрерывно от нуля до его конечного значения; во-вторых, любой элемент R из группы $\mathcal{R}$ можно перевести в единицу, меняя непрерывно угол вращения от нуля до его конечного значения; поэтому если $Q_0=Q_1Q_2\ldots Q_j$, где каждый Q_i принадлежит либо $\mathscr{L}_x$, либо $\mathcal{R}$, то в качестве интервала $[0, \lambda_0]$ можно принять $[0, j]$, а $Q(\lambda)$ можно выбрать так, что $Q(0)=I$, $Q(1)=Q_1$, $Q(2)=Q_1Q_2$ и т. д. и, наконец, $Q(j)=Q_1Q_2\ldots Q_j$, причем для нецелых значений параметров используется интерполяция.

Проверка показывает, что *фундаментальная* (*квадратичная*) *форма* $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-(x^4)^2$ инвариантна относительно всех преобразований групп $\mathscr{L}_x$ и $\mathcal{R}$, а значит, и относительно всех преобразований группы $\mathscr{L}_p$. Эту форму можно записать в виде $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$, где

$$[g_{\mu\nu}]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=G, \tag{19.4.7}$$

причем соглашение о суммировании применено как к μ, так и к ν. Если 4-мерный вектор x^μ в квадратичной форме $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ заменить сначала на $x^\mu+y^\mu$, а затем на $x^\mu-y^\mu$ и из первого результата вычесть второй, то видно, что инвариантность квадратичной формы $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ эквивалентна инвариантности симметрической билинейной формы $g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu=x^1y^1+x^2y^2+x^3y^3-x^4y^4$.

Теперь можно определить *полную (однородную) группу Лоренца* как группу всех однородных линейных преобразований $x^1, \ldots$ $\ldots, x^4$, относительно которых $g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ инвариантна для всех 4-мерных векторов x^μ; эта группа обозначается через $\mathscr{L}_f$. Пусть преобразование $x^\mu \longrightarrow x'^\mu = q^\mu_\nu x^\nu$ — произвольный элемент группы $\mathscr{L}_f$. Тогда из инвариантности билинейной формы следует, что $g_{\mu\nu}q^\mu_\varkappa q^\nu_\lambda = g_{\varkappa\lambda}$ или, в матричных обозначениях, что

$$Q^T G Q = G; \tag{19.4.8}$$

иначе говоря, столбцы Q являются псевдоортогональными псевдоединичными векторами в том смысле, что

$$(q^1_\nu)^2 + (q^2_\nu)^2 + (q^3_\nu)^2 - (q^4_\nu)^2 = \begin{cases} +1 & \text{для } \nu = 1, 2, 3, \\ -1 & \text{для } \nu = 4, \end{cases} \tag{19.4.9}$$

$$q^1_\nu q^1_\lambda + q^2_\nu q^2_\lambda + q^3_\nu q^3_\lambda - q^4_\nu q^4_\lambda = 0 \quad \text{для } \nu \neq \lambda. \tag{19.4.10}$$

Отсюда следует, что матрица, обратная матрице Q, может быть получена из матрицы Q^T изменением знаков по следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} + & + & + & - \\ + & + & + & - \\ + & + & + & - \\ - & - & - & + \end{pmatrix}.$$

Поскольку Q^{-1} также является лоренцевым преобразованием, *строки* матрицы Q также являются псевдоортогональными псевдоединичными векторами.

Из (19.4.8) следует, что детерминант матрицы Q равен ± 1. Если в качестве $\{x^1, \ldots, x^4\}$ взять $\{0, 0, 0, 1\}$, то инвариантность фундаментальной формы показывает, что

$$\sum_{j=1}^{3} (x'^j)^2 - (x'^4)^2 = \sum_{j=1}^{3} (q^j_4)^2 - (q^4_4)^2 = -1.$$

Следовательно, q^4_4 или $\geqslant 1$, или $\leqslant -1$.

Теорема. *Собственная группа Лоренца $\mathscr{L}_p$, определенная выше как группа, порожденная группами $\mathscr{L}_x$ и $\mathscr{R}$, состоит из всех преобразований Q, которые принадлежат $\mathscr{L}_f$ и для которых* $\det Q = +1$, *а* $q^4_4 \geqslant +1$.

Доказательство. Сначала показывается, что из связности группы $\mathscr{L}_p$ следует, что $\det Q = +1$ и $q^4_4 \geqslant 1$ для любого элемента Q из $\mathscr{L}_p$. Пусть Q переводится в единицу I, как в доказательстве леммы; поскольку $Q(0) = I$, имеем $\det Q(0) = 1$ и $q^4_4(0) = 1$; в силу непрерывности $\det Q(\lambda)$ и $q^4_4(\lambda)$ при изменении λ не могут стать отрицательными. (То, что $\det Q = 1$, можно установить и непосредственно из разложения $Q = Q_1 Q_2 \ldots Q_j$, где каждое Q_i принадлежит либо $\mathscr{L}_x$, либо $\mathscr{R}$). Обратно, допустим, что Q — любое преобразование из $\mathscr{L}_f$, такое, что $\det Q = 1$ и $q^4_4 \geqslant 1$. Покажем, что Q можно представить в виде произведения R_1PR_2, где R_1 и R_2 принадлежат $\mathcal{R}$, а P принадлежит $\mathcal{L}_x$; следовательно, $Q\in\mathcal{L}_p$. (Кстати, отсюда следует, что в разложении $Q_1Q_2\ldots Q_j$ всегда достаточно трех множителей.) Прежде всего, пусть R_3 и R_4 — вращения, которые соответственно переводят трехмерные векторы (q_4^1, q_4^2, q_4^3) и (q_1^4, q_2^4, q_3^4) в положительное направление оси x^1. Тогда

$$R_3QR_4=\begin{pmatrix} & & & q_4'^1\\ & (X') & & 0\\ & & & 0\\ q_1'^4 & 0 & 0 & q_4'^4\end{pmatrix}=Q', \qquad (19.4.11)$$

где X' — некоторая матрица размера 3×3, $q_4'^1$ и $q_1'^4$ неотрицательны и $q_4'^4=q_4^4\geqslant 1$. Поскольку $(q_4'^1)^2-(q_4'^4)^2=-1$, $(q_1'^4)^2-(q_4'^4)^2=-1$, параметр φ можно выбрать так, что

$$q_4'^1=q_1'^4=\operatorname{sh}\varphi,\quad q_4'^4=\operatorname{ch}\varphi.$$

Таким образом, если Q' умножим на $P(-\varphi)$, то последняя строка и последний столбец этого произведения будут теми же, что и соответствующие строка и столбец матрицы $P(-\varphi)P(\varphi)=I$; отсюда

$$P(-\varphi)Q'=\begin{pmatrix} & & & 0\\ & (X'') & & 0\\ & & & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=Q''.$$

Эта матрица, подобно Q и Q', описывает преобразование, которое принадлежит $\mathcal{L}_p$, и, значит, оставляет инвариантной фундаментальную квадратичную форму. Поэтому X'' оставляет инвариантной квадратичную форму $(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2$ и, следовательно, принадлежит группе $O(3)$, но $\det X''=+1$, откуда следует, что X'' — элемент $SO(3)$, т. е. Q'' — элемент группы $\mathcal{R}$, скажем R_5. Итак, мы имеем

$$P(-\varphi)R_3QR_4=R_5,$$

что приводит к искомому виду элемента Q:

$$Q=R_1P(\varphi)R_2,$$

где $R_1=R_3^{-1}$ и $R_2=R_5R_4^{-1}$.

Замечание. Элементы вида $L=R^{-1}PR$, где R принадлежит $\mathcal{R}$, а P принадлежит $\mathcal{L}_x$, называются *чистыми преобразованиями Лоренца*. В этом случае оси новой и старой систем координат все еще параллельны (так же, как для $P(\varphi)$), но направление относительной скорости может быть произвольным. Матрица L симметрическая, но если L_1 и L_2 — два чистых преобразования Лоренца, то легко видеть, что матрица L_1L_2 не является симметрической, если только относительные скорости не параллельны; следовательно, чистые преобразования Лоренца не образуют подгруппу группы $\mathcal{L}_p$. Более того, если L_1L_2 — несимметрическая матрица, то можно найти такое чистое преобразование L_3, что $L_1L_2L_3$ представляет собой чистое вращение (элемент группы $\mathcal{R}$), причем $L_1L_2L_3\neq I$. Это обстоятельство приводит к псевдопарадоксальному результату, заключающемуся в том, что можно повернуть некоторое тело, последовательно сообщив ему три чисто линейных ускорения в трех различных направлениях таким образом, что в результате комбинации этих трех движений тело останавливается. Такое явление, описанное в несколько иных формулировках, было открыто на заре квантовой механики Л. Томасом в связи с релятивистскими поправками к энергетическим уровням атома. [Электрон, двигаясь по орбите вокруг ядра, подвергается (непрерывной) последовательности лоренцевых трансляций, подобных описанным преобразованиям, и возникает эффект, аналогичный тому, к которому приводит существование спина электрона.]

Группа $\mathscr{L}_t$, порожденная элементами группы $\mathscr{L}_p$ и преобразованием обращения времени, которое задается матрицей

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

является подгруппой группы $\mathscr{L}_f$, поскольку ясно, что T сохраняет фундаментальную форму. Аналогично группа $\mathscr{L}_s$, порожденная элементами группы $\mathscr{L}_p$ и пространственной инверсией, задаваемой матрицей

$$S=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

является подгруппой группы $\mathscr{L}_f$. Наконец, вся $\mathscr{L}_f$ порождается элементами группы $\mathscr{L}_p$ и преобразованиями T и S.

Упражнения

Докажите или опровергните следующие утверждения.

1. Любое собственное преобразование Лоренца с симметрической матрицей есть чистое преобразование Лоренца.

2. Если P_1 и P_2 — два чистых преобразования Лоренца, то $P_1P_2P_1^{-1}P_2^{-1}$ есть чистое вращение.

3. Подгруппа вращений представляет собой нормальную подгруппу группы $\mathscr{L}_p$.

Очевидным обобщением групп Лоренца могут быть группы преобразований, которые сохраняют значение фундаментальной формы

$$(x^1)^2+\ldots+(x^r)^2-(x^{r+1})^2-\ldots-(x^{r+l})^2;$$

возможность пространственных отражений появляется, когда r нечетно, а возможность обращения времени — когда l нечетно.

19.5. МНОГООБРАЗИЕ ГРУППЫ

Если любой элемент

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$$

ортогональной группы $O(3)$ представляется точкой 9-мерного (вещественного) пространства V^9 с координатами $R_{11}, R_{12}, \ldots, R_{33}$ (заданными, скажем, в том порядке, в котором они появляются в матрице), то данная группа представляется множеством точек в пространстве V^9, которые удовлетворяют шести алгебраическим уравнениям

$$R_{1j}^2 + R_{2j}^2 + R_{3j}^2 = 1, \quad j = 1, 2, 3, \tag{19.5.1}$$

$$R_{1j}R_{1k} + R_{2j}R_{2k} + R_{3j}R_{3k} = 0, \quad (j\ k) = (1\ 2),\ (1\ 3),\ (2\ 3), \tag{19.5.2}$$

которые означают, что столбцы матрицы R суть попарно ортогональные единичные векторы в соответствии с § 19.2. Полученная трехмерная алгебраическая поверхность в пространстве V^9 называется *многообразием* группы $O(3)$. Точные размеры, форма и кривизна этой поверхности не представляют интереса, но ее общие топологические свойства тесно связаны со структурой группы.

С каждой непрерывной группой линейных преобразований аналогично ассоциируется некая алгебраическая поверхность в некотором пространстве V^m. Однако требуется определенное внимание, когда делаются выводы из числа уравнений. Для группы $SO(3)$ кроме выписанных выше шести уравнений (19.5.1) и (19.5.2) имеется седьмое алгебраическое уравнение

$$\det R = 1. \tag{19.5.3}$$

Как будет показано в дальнейшем, поверхность, определенная первыми шестью уравнениями, состоит из двух частей, или компонент (наподобие двух ветвей гиперболы) и уравнение (19.5.3) лишь исключает одну из этих частей, но не уменьшает размерность поверхности. Для общей линейной группы $GL(n, \mathbb{R})$ имеется лишь алгебраическое *неравенство* $\det M \neq 0$; для $GL(n, \mathbb{C})$—алгебраическое неравенство $(\operatorname{Re}\det M)^2 + (\operatorname{Im}\det M)^2 \neq 0$.

Упражнение

Найдите алгебраическое уравнение $F(x, y, z) = 0$, которое определяет поверхность тора в пространстве V^3 так же, как $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ определяет поверхность шара. Найдите группу, для которой тор служит многообразием в смысле приведенного выше определения.

19.6. ВНУТРЕННИЕ КООРДИНАТЫ В МНОГООБРАЗИИ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

Хотя в принципе любое многообразие можно рассматривать как n-мерную поверхность, вложенную в пространство V^m большей размерности, как это делалось в приведенных выше примерах, такое вложение не всегда просто найти или описать, и поэтому более естественно описывать многообразие при помощи внутренних координат, подобных полярным углам θ и φ на поверхности сферы, или в общем случае при помощи двух или более перекрывающихся систем внутренних координат.

Каждое преобразование группы $SO(3)$ может быть получено путем выбора фиксированной оси, а затем поворота вокруг этой оси (§ 19.2). Если R — матрица вращения на угол $\theta \geqslant 0$ (по часовой стрелке, если смотреть вдоль положительного направления вектора $\mathbf{k}$) вокруг оси, задаваемой единичным вектором $\mathbf{k}$, то числа θk_x, θk_y, θk_z, обозначаемые соответственно через θ_x, θ_y, θ_z, можно взять в качестве внутренних координат в группе $SO(3)$; в таком случае мы запишем $R = R(\boldsymbol{\theta})$, где $\boldsymbol{\theta}$ — вектор $\mathbf{k}\theta$. Для того чтобы такая система координат была единственной, $\boldsymbol{\theta}$ следует ограничить шаром $K = \{\boldsymbol{\theta}: \|\boldsymbol{\theta}\| \leqslant \pi\}$ в координатном пространстве $\mathbb{R}^3$, в котором θ_x, θ_y, θ_z — декартовы координаты, и кроме того, нужно соблюдать следующее условие: противоположные концы любого диаметра шара K соответствуют одному и тому же элементу группы $SO(3)$, а во всех других случаях каждой точке K соответствует единственный элемент группы $SO(3)$ и обратно.

Матрица $R = R(\boldsymbol{\theta})$ задается в явном виде через внутренние координаты при помощи выражения

$$R(\boldsymbol{\theta}) = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (19.6.1)$$

Чтобы это увидеть, заметим сначала, что поскольку R — невырожденная нормальная матрица, то ее логарифм Λ вполне определен (хотя и многозначен):

$$R = e^{\Lambda}, \quad R^{-1} = e^{-\Lambda} = R^T = e^{\Lambda^T};$$

следовательно, Λ — антисимметрическая матрица и должна иметь вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

То, что a, b, c можно взять именно такими, как в (19.6.1), следует из того, что в таком случае: (1) собственные значения матрицы Λ равны 0 и $\pm i\theta$, где $\theta = \sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2}$, а, значит, собственные значения матрицы $\exp \Lambda$ равны 1 и $e^{\pm i\theta}$; (2) первый собственный вектор матрицы Λ (так же, как и $\exp \Lambda$) пропорционален вектору θ; (3) так как Λ — нормальная матрица, ее собственные векторы можно взять в качестве ортонормированной системы; (4) из этого следует, как и в § 19.2, что R представляет вращение на угол θ вокруг оси с направлением вектора θ. Остается (в виде упражнения) проверить, что в правой системе координат (19.6.1) определяет $R(\theta)$, а не $R(-\theta)$.

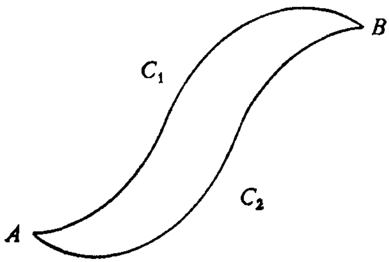

Рис. 19.1.

При помощи внутренних координат θ_x, θ_y, θ_z можно выяснить свойства поверхности $\mathscr{S}$ в пространстве V^9, определенной алгебраическими уравнениями (19.5.1)—(19.5.3). Каждая точка шара K соответствует единственной точке на поверхности $\mathscr{S}$, исключая противоположные концы любого диаметра K, которые соответствуют одной и той же точке поверхности $\mathscr{S}$, и девять координат точки поверхности $\mathscr{S}$ являются непрерывными функциями внутренних координат в шаре K согласно (19.6.1). Поэтому $\mathscr{S}$ — связная поверхность, поскольку любая точка шара K может быть связана с любой другой точкой K некой кривой (на самом деле прямолинейным отрезком), лежащей в K. Однако $\mathscr{S}$ не является *односвязной*.

Пусть на связной поверхности заданы две произвольные точки A и B и две любые кривые (пути) C_1 и C_2, лежащие на этой поверхности и соединяющие A с B (рис. 19.1). Если C_1, не оставляя поверхности, может быть преобразована в C_2 непрерывной деформацией, то такая поверхность называется *односвязной*. Плоскость и сфера односвязны, тогда как поверхность тора, поверхность цилиндра, круговое кольцо $R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2$ не являются односвязными. Среди трехмерных тел шар, куб, сферический слой $R_1^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2^2$ односвязны, тогда как тор и крендель не являются односвязными.

Покажем, что многообразие $\mathscr{S}$ группы $SO(3)$ не является односвязным. Пусть A — точка в $\mathscr{S}$, соответствующая центру шара K, а B — точка в $\mathscr{S}$, соответствующая двум концам некоторого диаметра шара K (рис. 19.2). Тогда два радиуса, составляющие данный диаметр, соответствуют в $\mathscr{S}$ двум кривым, или путям, которые соединяют A с B, и очевидно, что один такой путь

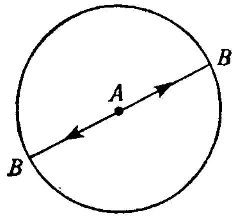

Рис. 19.2.

нельзя непрерывно деформировать в другой. Однако любой другой путь из A в B можно непрерывно деформировать в один из указанных путей.

19.7. ГОМОМОРФИЗМ ГРУППЫ SU (2) НА ГРУППУ SO (3)

Пусть x, y, z — декартовы координаты в евклидовом пространстве E^3. Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix}, \tag{19.7.1}$$

которая является эрмитовой матрицей и имеет след, равный нулю. (След матрицы есть сумма ее собственных значений и равен сумме ее диагональных элементов.) Пусть U — любая унитарная матрица размера 2×2 с детерминантом, равным 1 [т. е. $U \in SU(2)$], а

$$A' = UAU^*. \tag{19.7.2}$$

Поскольку собственные значения матрицы A' совпадают с собственными значениями матрицы A, след матрицы A' также равен нулю; A' тоже эрмитова матрица ($A'^* = A'$), и ее можно записать в виде

$$A'=\begin{pmatrix} z' & x'-iy' \\ x'+iy' & -z' \end{pmatrix}, \tag{19.7.3}$$

где x', y', z' — вещественные числа. Кроме того, $\det A' = \det A$, что следует из (19.7.2), и, значит,

$$x^2+y^2+z^2 = x'^2+y'^2+z'^2. \tag{19.7.4}$$

Очевидно, что связь между x, y, z и x', y', z' линейна при заданной матрице U; следовательно, если мы определим вещественную матрицу $R=R(U)$ размера 3×3 посредством

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

то R — ортогональная матрица.

Общее замечание об ортогональных унитарных и лоренцевых преобразованиях. Допустим, что однородное линейное преобразование $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$ в вещественном n-мерном пространстве таково, что оно оставляет инвариантной квадратичную форму $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=x_1^2+\ldots+x_n^2$, т. е. $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'$ для всех $\mathbf{x}$. Тогда инвариантной является и билинейная форма $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, так как

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = {}^1/_4\,(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - {}^1/_4\,(\mathbf{x}-\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Иначе говоря, если сохраняются все длины, то сохраняются и все углы. Аналогично, если $(\cdot\,,\,\cdot)$ обозначает эрмитово симметрическое (т. е. полубилинейное) скалярное произведение в комплексном n-мерном пространстве, то $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является инвариантным для любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ в том и только том случае, когда $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ инвариантно для всех $\mathbf{x}$. Таким образом, ортогональную и унитарную группы можно характеризовать инвариантностью либо квадратичной, либо соответствующей билинейной формы.

Упражнение

Сформулируйте аналогичный результат для группы Лоренца.

Детерминант матрицы R равен 1 по непрерывности, поскольку единственно возможными значениями $\det R$ являются ±1, $\det R$ непрерывно зависит от U и $SU(2)$ — связная группа. [Если U — единичная матрица размера 2×2, то $R(U)$ есть единичная матрица размера 3×3 с детерминантом, равным 1.] Произведение $R(U_1)\,R(U_2)$ равно $R(U_1U_2)$, потому что $R(U_1)R(U_2)$ представляет собой результат последовательного преобразования A сначала в $U_2AU_2^*$, а затем в $U_1U_2AU_2^*U_1^*$. Следовательно, отображение

$$\Phi\colon\ U \to R(U)$$

есть гомоморфизм. Мы утверждаем без доказательства, что это — отображение на всю группу $SO(3)$ [1]).

Легко видеть, что ядром этого гомоморфизма будет $\{I, -I\}$, и поэтому с каждым $R\in SO(3)$ связаны два элемента U и $-U$ группы $SU(2)$. В § 19.9 будет доказано, что группа $SO(3)$ является простой и, значит, никакие другие нетривиальные гомоморфизмы группы $SO(3)$ невозможны.

[1]) То есть каждый элемент из $SO(3)$ является образом хотя бы одного элемента из $SU(2)$.— *Прим. перев.*

19.8. ГОМОМОРФИЗМ ГРУППЫ $SL(2, \mathbb{C})$ НА СОБСТВЕННУЮ ГРУППУ ЛОРЕНЦА $\mathscr{L}_p$

Гомоморфизм, полученный в предыдущем параграфе, весьма легко расширяется. Пусть x, y, z, t — координаты в пространстве-времени (при этом система единиц выбрана так, чтобы $c=1$). Тогда матрица

$$A=\begin{pmatrix} t+z & x-iy \\ x+iy & t-z \end{pmatrix}$$

эрмитова и $\det A=t^2-x^2-y^2-z^2$. Если P — произвольная (комплексная) матрица размера 2×2 с детерминантом, равным 1, то матрица $A'=PAP^*$ также эрмитова и, значит, может быть записана в виде

$$A'=\begin{pmatrix} t'+z' & x'-iy' \\ x'+iy' & t'-z' \end{pmatrix}.$$

Но $\det A'=\det A$, и поэтому

$$t^2-x^2-y^2-z^2=t'^2-x'^2-y'^2-z'^2.$$

Иначе говоря, матрица P из $SL(2, \mathbb{C})$ индуцирует некоторое преобразование Лоренца T. Ясно, что отображение $P\to T$ обладает свойством гомоморфизма, именно если $P_1\to T_1$ и $P_2\to T_2$, то $P_1P_2\to T_1T_2$. Фактически это $(2\to 1)$-гомоморфизм группы $SL(2, \mathbb{C})$ на группу $\mathscr{L}_p$, т. е. гомоморфизм, отображающий два элемента $SL(2, \mathbb{C})$ в один элемент $\mathscr{L}_p$.

19.9. ПРОСТОТА ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ И ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

Теорема. *Группа вращений $SO(3)$ является простой.*

Доказательство. Допустим, что G_0 — нетривиальная нормальная подгруппа: $G_0 \lhd SO(3)$. Нужно доказать, что $G_0=SO(3)$. Пусть $R_0\in G_0$, причем $R_0\neq I$. В § 19.2 было доказано, что для любого R из $SO(3)$ преобразование $\mathbf{x}\to R\mathbf{x}$ можно описать как вращение на некоторый угол θ вокруг некоторой фиксированной оси. Обозначим через $\boldsymbol{\theta}$ вектор, взятый в положительном направлении этой оси и имеющий длину $\|\boldsymbol{\theta}\|=\theta$, и выразим R в виде $R=R(\boldsymbol{\theta})$, как в § 19.6. Тогда $R_0=R(\boldsymbol{\theta}_0)$ для некоторого вектора $\boldsymbol{\theta}_0\neq 0$.

Предположим теперь, что $\boldsymbol{\theta}_1$ — любой другой вектор с той же длиной, что и $\boldsymbol{\theta}_0$ ($\|\boldsymbol{\theta}_1\|=\|\boldsymbol{\theta}_0\|$), а R_1 — вращение, переводящее $\boldsymbol{\theta}_1$ в $\boldsymbol{\theta}_0$. Тогда $R_1^{-1}R(\boldsymbol{\theta}_0)R_1$ принадлежит подгруппе G_0, поскольку она нормальна; но $R_1^{-1}R(\boldsymbol{\theta}_0)R_1=R(\boldsymbol{\theta}_1)$, и, следовательно, подгруппа G_0 содержит любой элемент $R(\boldsymbol{\theta})$ с $\|\boldsymbol{\theta}\|=\|\boldsymbol{\theta}_0\|$. Далее, G_0 также содержит каждый элемент $R(\boldsymbol{\theta})R(\boldsymbol{\theta}_0)$ для $\|\boldsymbol{\theta}\|=\|\boldsymbol{\theta}_0\|$; он является элементом $R(\boldsymbol{\theta}')$ для некоторого $\boldsymbol{\theta}'=\boldsymbol{\theta}'(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_0)$. Очевидно, что $\|\boldsymbol{\theta}'\|$ — непрерывная функция компонент вектора $\boldsymbol{\theta}$. [Напомним, что явное выражение $R(\boldsymbol{\theta})$ через компоненты θ_x, θ_y, θ_z приведено в § 19.6.] Для $\boldsymbol{\theta}=-\boldsymbol{\theta}_0$ и $\boldsymbol{\theta}=+\boldsymbol{\theta}_0$ длина $\|\boldsymbol{\theta}'\|$ равна 0 и $2\|\boldsymbol{\theta}_0\|$ соответственно. Следовательно, для любого угла θ из интервала $[0, 2\|\boldsymbol{\theta}_0\|]$ G_0 содержит хотя бы один элемент $R(\boldsymbol{\theta})$, такой, что $\|\boldsymbol{\theta}\|=\theta$. Снова используя то, что G_0 — нормальная подгруппа, устанавливаем, что G_0 содержит любой $R(\boldsymbol{\theta})$, такой, что

$0 \leqslant \|\theta\| \leqslant 2\|\theta_0\|$; но если $R(\theta)$ принадлежит G_0, то и $R(\theta)\,R(\theta) = R(2\theta)$ принадлежит G_0, и $R(3\theta)$ принадлежит G_0 и т. д.; следовательно, подгруппа G_0 содержит любой элемент $R(\theta)$ для $0 \leqslant \|\theta\| \leqslant \pi$ т. е. $G_0 = SO(3)$.

Собственная группа Лоренца также является простой, но доказать это сложнее.