Глава 20

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП I. ВРАЩЕНИЯ И СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

Представление; точное представление; размерность; приводимость; неприводимое представление; законы преобразования тензоров; представления групп $SO(2)$ и $SO(3)$; инфинитезимальные операторы; операторы поднятия и опускания; эффективное и транзитивное действие группы; однородное пространство; регулярное представление; тессеральные гармоники; многочлены Лежандра и присоединенные функции Лежандра; рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для P_l^m; формула Родрига для P_l^m; ортонормированность и полнота тессеральных гармоник; теорема сложеиия.

Предварительные сведения: гл. 18 и 19; элементарная теория матриц; знакомство со специальными функциями математической физики.

В этой и в двух следующих главах будет показано, что имеются существенные связи между тремя столь, казалось бы, разными дисциплинами, как представления групп, классические специальные функции и квантовая механика.

Представления групп тесно связаны с различными специальными функциями математической физики. В определенном смысле первостепенная роль этих функций заключается в демонстрации отношений симметрии. Например, функции Лежандра появляются (через сферические гармоники) в задачах со сферической симметрией в таких разных областях, как электростатика, акустика, теплопроводность, перенос нейтронов, квантовая механика водородоподобного атома. Функции Бесселя (с целыми и полуцелыми индексами) возникают большей частью в задачах распространения волн, но более глубокое исследование показывает, что эти функции связаны скорее с некоторыми типами симметрии, чем с механизмом волновых процессов. Действительно, волновой процесс в непостоянном (даже сферически симметричном) потенциальном поле, вообще говоря, включает другие функции, например функции Лагерра в случае водородоподобных атомов, тогда как функции Бесселя появляются в случае, когда система инвариантна относительно полной группы движений, а не только относительно подгруппы вращений; см. следующую главу. В § 20.5 будет показано, что тригонометрические функции (в виде $e^{im\varphi}$) возникают в представлениях двумерной группы вращений и, следовательно, связаны с симметрией относительно некоторой оси.

20.1. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ

Пусть G — произвольная группа, а X — некоторое n-мерное (часто комплексное) векторное пространство. Гомоморфизм $\rho\colon g \to \rho(g)$ группы G на группу линейных преобразований в пространстве X [1]) называется *n-мерным представлением группы G (на X)*. Линейные преобразования обычно описываются матрицами, и матрицу, описывающую преобразование $\rho(g)$, также обозначают через $\rho(g)$. Поэтому мы можем также рассматривать представление группы G как гомоморфизм группы G на группу матриц; тогда единица в G, обратный элемент в G и групповая операция представляются единичной матрицей, обратной матрицей и умножением матриц. Если гомоморфизм является изоморфизмом, то представление ρ называется *точным*. Если сама группа G есть группа линейных преобразований в некотором векторном пространстве Y, то тождественное (единичное) отображение $g \to g$ группы G на себя является точным представлением. Однако по многим соображениям и в этом случае имеет смысл рассматривать также другие представления.

Замечание. Используемые здесь формулировки несколько отличаются от приведенных в § 18.10, где представление группы G было гомоморфизмом группы G на любую группу (не обязательно линейных) преобразований.

Если X содержит собственное подпространство X_1, которое инвариантно относительно всех преобразований $\rho(g)$, $g \in G$, то представление называется *приводимым*, а сужение преобразований $\rho(g)$ на X_1 дает представление меньшей размерности, называемое *подпредставлением*. Если таких собственных подпространств X_1 не существует, то представление ρ называется *неприводимым*.

Если G — непрерывная группа (группа Ли), то и от элементов матрицы $\rho(g)$ требуется непрерывная зависимость от g. Единственными непрерывными группами, которые мы будем здесь рассматривать, являются группы матриц, подобные унитарным, ортогональным и лоренцевым группам. В таком случае данное требование заключается в том, что элементы матрицы $\rho(g)$ должны быть непрерывными функциями элементов матрицы g, и это будет сразу видно во всех приведенных далее примерах.

20.2. ЗАКОНЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕКТОРОВ И ТЕНЗОРОВ

Теперь мы опишем некоторые представления групп, естественным образом возникающие в физике. Согласно гл. 19, преобразования в трехмерном пространстве, которые получаются путем вращений

[1]) X часто называют представляющим пространством или пространством представления.— *Прим. перев.*

декартовых осей вокруг начала координат, составляют групп: $SO(3)$. Различные представления этой группы даются законами преобразования для компонент тензоров. Если декартовы координаты преобразуются посредством $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$, где

$$x_i' = \sum_{k=1}^{3} g_{ik} x_k, \tag{20.2.1}$$

а (g_{ik}) — матрица вращения [элемент группы $SO(3)$], то компоненты T_{ij} тензора второго ранга преобразуются по закону

$$T_{ij}' = \sum_k \sum_l g_{ik} g_{jl} T_{kl}. \tag{20.2.2}$$

Если девять величин T_{ij} обозначить через $X_1, \ldots, X_9$ и рассматривать их как координаты точки $\mathbf{X}$ в пространстве $\mathbb{R}^9$, то каждое преобразование $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$ индуцирует преобразование $\mathbf{X} \to \mathbf{X}'$, и эти последние преобразования дают представление группы $SO(3)$ на $\mathbb{R}^9$. Преобразования компонент тензора третьего ранга дают представление группы $SO(3)$ на $\mathbb{R}^{27}$ и т. д.

Более специфичные представления могут иметь место в том случае, когда компоненты тензора связаны некоторыми отношениями симметрии. Допустим, что T_{ij} — компоненты тензора скоростей деформации в некоторой точке жидкости:

$$T_{ij} = \partial v_i / \partial x_j,$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$—векторное поле скоростей. Если течение безвихревое, то

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 3). \tag{20.2.3}$$

Нетрудно проверить, что эти соотношения инвариантны относительно вращений, т. е. если $T_{ij} = T_{ji}$ для всех i и j, то $T_{ij}' = T_{ji}'$ (см. ниже упражнение 2). Следовательно, в этом случае только шесть компонент T_{ij} являются независимыми, скажем величины Y_i, определяемые как

$$\begin{aligned} &Y_1 = T_{12}, \quad Y_2 = T_{23}, \quad Y_3 = T_{31}, \\ &Y_4 = T_{11}, \quad Y_5 = T_{22}, \quad Y_6 = T_{33}. \end{aligned}$$

Тогда вращение $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$ индуцирует линейное преобразование $\mathbf{Y} \to \mathbf{Y}'$ и получается 6-мерное представление группы $SO(3)$.

Пусть, кроме того, жидкость несжимаема; тогда имеется дополнительное соотношение

$$T_{11} + T_{22} + T_{33} = 0, \tag{20.2.4}$$

которое также инвариантно относительно вращений (см. ниже упражнение 3). В этом случае Y_6 можно опустить (т. е. его всегда можно вычислить как $-Y_4 - Y_5$), и преобразования компонент $Y_1, \ldots, Y_5$ дают 5-мерное представление группы $SO(3)$.

Соотношения (20.2.3) и (20.2.4) определяют подпространства пространства $\mathbb{R}^9$, которые инвариантны относительно преобразований (20.2.2); инвариантность этих подпространств позволяет привести 9-мерное представление к 6-мерному и 5-мерному представлениям. [Можно получить 8-мерное представление, используя лишь (20.2.4).] В дальнейшем выяснится, что 5-мерное подпространство нельзя далее разложить на инвариантные подпространства меньшей размерности; поэтому 5-мерное представление неприводимо. Окажется, что для любого нечетного целого m существует неприводимое m-мерное представление группы $SO(3)$; в случае $m>1$ такое представление является точным.

Исходный закон преобразования (20.2.1) для компонент вектора x обеспечивает, разумеется, трехмерное представление. (Если вращения рассматривать как элементы некой абстрактной группы, то такое представление не более тривиально, чем любые другие.) Более того, ради полноты (в том смысле, который будет уточнен позднее) мы включаем в рассмотрение и одномерное представление, даваемое законом преобразования скаляров, согласно которому они вообще не преобразуются. Любой скаляр есть вещественное число x, и каждый элемент группы (вращение) отображается на тождественное преобразование $x \to x$ в $\mathbb{R}$. [Отсюда не следует делать вывод, что одномерное представление группы всегда состоит только из тождественного преобразования. Одномерное представление группы $GL(n, \mathbb{R})$ или группы $GL(n, \mathbb{C})$ дается отображением элемента M группы [матрица размера $n \times n$] на преобразование $x \to (\det M)\, x$ в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$.]

Представления групп Лоренца (см. в § 19.4) аналогично даются законами преобразования скаляров, векторов (т. е. 4-мерных векторов) и тензоров при преобразованиях Лоренца в пространстве-времени; эти представления имеют размерности 1, 4, 16, ...

Шестимерное представление (ограниченной) группы Лоренца $\mathscr{L}_p$ задается законом преобразования для компонент электрического и магнитного полей **E** и **H** в свободном пространстве. (Интерпретация этого закона при помощи тензоров будет объяснена ниже в упражнении 5.) Согласно частному преобразованию Лоренца (19.4.1), компоненты электрического и магнитного полей преобразуются по закону

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & E'_y &= \gamma[E_y - (v/c) H_z], & E'_z &= \gamma[E_z + (v/c) H_y], \\ H'_x &= H_x, & H'_y &= \gamma[H_y + (v/c) E_z], & H'_z &= \gamma[H_z - (v/c) E_y], \end{aligned} \tag{20.2.5}$$

где

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

(См. любой хороший курс электромагнетизма.) При вращении компоненты поля **E** и компоненты поля **H** преобразуются независимо по обычному закону (20.2.1) для векторов. В соответствии с § 19.4

любой элемент группы $\mathscr{L}_p$ можно записать в виде R_1PR_2, где R_1 и R_2—вращения в пространстве, а P—преобразование вида (19.4.1), и поэтому общее преобразование для **E** и **H** можно получить комбинацией (20.2.1) и (20.2.5).

Одна из целей теории представлений групп заключается в том, чтобы найти все возможные законы преобразования физических величин, т. е. найти все возможные представления физических групп симметрии. Как видно из приведенных выше примеров, существуют две основные процедуры: *построение* некоторых представлений из более простых при помощи тензоров и *расщепление* представлений на подпредставления (приведение). Однако начиная с § 20.5 описывается еще одна процедура, которая основана на действии некоторой группы на пространствах функций.

Упражнения

1. Покажите, что представление вращений (20.2.1) при помощи преобразований (20.2.2) является гомоморфизмом. Иначе говоря, покажите, что если $\rho(g)$—преобразование, индуцированное вращением g в пространстве $\mathbb{R}^9$, то $\rho(g)\,\rho(g')=\rho(gg')$.

2. Покажите, что симметрия или антисимметрия тензора второго ранга сохраняется при вращениях, если использовать закон преобразования (20.2.2), т. е. покажите, что из $T_{ij}=T_{ji}$ (или $T_{ij}=-T_{ji}$) для всех i, j следует $T'_{ij}=T'_{ji}$ (или $T'_{ij}=-T'_{ji}$) для всех i, j.

3. Покажите, что след тензора второго ранга сохраняется при вращениях, т. е. что

$$T'_{11}+T'_{22}+T'_{33}=T_{11}+T_{22}+T_{33}.$$

4. Рассмотрим общее линейное преобразование в $\mathbb{R}^n$ вида (20.2.1), где (g_{ij})—невырожденная матрица размера $n\times n$. Покажите, что это преобразование ортогонально ($g^Tg=gg^T=I$) в том и только в том случае, когда след любого тензора второго ранга инвариантен относительно (20.2.2).

5. Покажите, что можно получить закон преобразования (20.2.5) для электромагнитного поля при преобразовании Лоренца (19.4.1), преобразуя антисимметрический тензор второго ранга

$$T^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}$$

по закону

$$T'^{\mu\nu}=\sum_{\sigma=1}^{4}\sum_{\tau=1}^{4} q^{\mu}_{\sigma}q^{\nu}_{\tau}T^{\sigma\tau},$$

если координаты преобразуются по правилу

$$x'^{\mu}=\sum_{\sigma=1}^{4} q^{\mu}_{\sigma}x^{\sigma}.$$

20.3. ДРУГИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП В ФИЗИКЕ

Теория Паули спина электрона (1927 г.) и релятивистское волновое уравнение Дирака (1928 г.) привели к отличным от законов преобразования векторов и тензоров законам преобразования при вращениях и лоренцевых преобразованиях. В свою очередь это обстоятельство привело к теории новых объектов, названных спинорами, которые таким образом заняли свое место в релятивистской квантовой механике наряду со скалярами, векторами и тензорами; спиноры будут рассмотрены в гл. 22. Законы преобразования для спиноров дают так называемые двузначные представления групп $SO(3)$ и $\mathscr{L}_p$, которые, однако, являются истинными представлениями накрывающих групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$, рассмотренных нами в § 19.7 и 19.8. Кажется парадоксальным тот факт, что эти накрывающие группы вообще появляются в физических задачах, и, к сожалению, в большинстве книг по квантовой механике этот вопрос как следует не выясняется. Разрешение этого парадокса, связанное с именем Г. Вейля, будет описано в гл. 22. В этом случае имеют место так называемые лучевые представления, которые, не являясь истинными представлениями (в смысле, определенном в данной главе), тем не менее вполне пригодны для описания квантовомеханических явлений. В книге Вейля [1928] показано, что лучевые представления какой-либо группы полностью определяются истинными представлениями соответствующих накрывающих групп; следовательно, представления групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ играют определенную роль.

Далее из теории следует, что, поскольку многообразия групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ односвязны, эти группы представляют собой так называемые универсальные накрывающие группы для групп $SO(3)$ и $\mathscr{L}_p$ соответственно (см. гл. 24 и 27), и отсюда как следствие вытекает тот факт, что не существует многозначных представлений групп $SO(3)$ и $\mathscr{L}_p$ с кратностью, большей двух. Таким образом, основываясь на теории групп, можно заключить, что векторы, тензоры и спиноры обеспечивают все возможные законы преобразования величин в квантовомеханических явлениях.

В классической физике делается различие между полярными векторами (такими, как импульс и электрическое поле) и аксиальными векторами (такими, как момент импульса и магнитное поле). Полярные векторы меняют знак при инверсии $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$, тогда как аксиальные не меняют знака. Следовательно, существуют два (и только два) пути расширения законов преобразования для векторов относительно полной ортогональной группы $O(3)$.

Симметрия или антисимметрия многочастичной волновой функции при взаимной перестановке (или более общей перестановке) тождественных частиц дает простое представление соответствующей группы перестановок. Более сложные представления групп перестановок появляются в теории парастатистики.

20.4. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В таких физических дисциплинах, как квантовая теория поля встречаются бесконечномерные представления, например, групп Лоренца и Пуанкаре. Естественно, такое представление является гомоморфизмом группы G на группу ограниченных линейных преобразований $\rho(g)$ в банаховом или гильбертовом пространстве X. Если G — непрерывная группа матриц, то необходимо, чтобы $\rho(g)$ было сильно непрерывной функцией g, т. е. требуется, чтобы для любой точки u в X

$$\|\rho(g)u-\rho(g_0)u\|\to 0,$$

когда матричные элементы g сходятся к матричным элементам g_0.

В то время как все неприводимые представления компактных групп, подобных $SO(3)$, конечномерны, существуют бесконечномерные представления групп Лоренца, Пуанкаре и группы движений, такие, что нет конечномерных подпространств банахова или гильбертова пространства X, которые были бы инвариантны относительно всех преобразований $\rho(g)$, $g \in G$, и, следовательно, эти представления не могут быть разложены на конечномерные подпредставления. В следующей главе мы опишем бесконечномерные представления двумерной группы движений M_2; эти представления довольно типичны и включают функции Бесселя. За дальнейшим материалом по данному вопросу, в частности по представлениям групп Лоренца и Пуанкаре, мы отсылаем читателя к книгам Бёрнера [1955], Гельфанда, Минлоса и Шапиро [1958], Гельфанда, Граева и Виленкина [1962], Виленкина [1965], Уорнера [1972], Барута и Рончки [1977]; сколь обширен этот материал, можно судить по объему указанных книг.

В гл. 27 мы приведем пример непрерывной группы (группы Ли), которая не имеет точного конечномерного представления и поэтому вообще не может быть реализована в виде группы матриц.

20.5. ПРОСТОЙ СЛУЧАЙ: ГРУППА $SO(2)$

Общий метод отыскания представлений можно проиллюстрировать на довольно тривиальном примере группы $SO(2)$, элементами которой являются вращения в плоскости вокруг начала координат. Любая окружность с центром в начале координат инвариантна относительно этой группы. Пусть X^∞—бесконечномерное пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(\varphi)$, определенных на единичной окружности. (Поскольку наши рассуждения носят качественный характер, мы не будем вводить в этом пространстве норму или топологию.) Вращению g_α на угол α [элементу группы $SO(2)$] мы ставим в соответствие линейное преобразование

$$\rho_\alpha\colon f(\varphi)\to f(\varphi-\alpha) \qquad (20.5.1)$$

в пространстве X^∞. Соответствие $g_\alpha \to \rho_\alpha$ есть представление группы $SO(2)$ на пространстве X^∞. (В этом примере равно допустимо и преобразование $f(\varphi) \to f(\varphi+\alpha)$; см. замечание в следующем параграфе.)

Важный метод нахождения подпредставлений заключается в использовании так называемых инфинитезимальных операторов представления, таких, как оператор T, получаемый в данном случае путем дифференцирования оператора ρ_α по α при $\alpha=0$, а именно

$$(Tf)(\varphi) = -f'(\varphi), \tag{20.5.2}$$

так что T можно рассматривать как предел отношения $(1/\alpha)(\rho_\alpha - \rho_0)$ при $\alpha \to 0$. Очевидно, что любое подпространство пространства X^∞, инвариантное относительно всех преобразований ρ_α, будет инвариантно и относительно T. Мы ищем инвариантные подпространства как можно меньшей размерности. Следовательно, мы ищем такую функцию $f(\varphi)$, чтобы минимальное подпространство, содержащее $f(\varphi)$ и инвариантное относительно оператора T, не содержало никаких других функций, а если бы и содержало, то столь мало таких функций, сколь это возможно. В случае одномерного подпространства Tf должна быть кратна f, скажем $Tf=\lambda f$; это приводит к задаче на собственные значения

$$-f'(\varphi) = \lambda f(\varphi). \tag{20.5.3}$$

В нашем случае, поскольку функции из X^∞ должны быть однозначными на единичной окружности, собственные значения и собственные функции суть

$$\lambda = im \quad (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots), \quad f(\varphi) = f_m(\varphi) = e^{-im\varphi}. \tag{20.5.4}$$

Для любого α действие преобразования ρ_α, заданного в (20.5.1), также сводится к умножению каждой собственной функции f_m оператора T на константу, а именно

$$(\rho_\alpha f_m)(\varphi) = e^{im\alpha} f_m(\varphi).$$

Таким образом, для любого m одномерное (комплексное) подпространство

$$X_m = \{Ae^{-im\varphi};\ A \in \mathbb{C}\} \tag{20.5.5}$$

инвариантно не только относительно T, но и относительно всех преобразований ρ_α. По теореме Фурье, любую функцию из X^∞ можно разложить по данным функциям, а, значит, X^∞ есть линейная оболочка подпространства X_m.

Теперь будет показано, что *единственными* конечномерными представлениями группы $SO(2)$ на X^∞ являются представления, которые могут быть построены из полученных выше, ибо будет установлено, что любое конечномерное инвариантное подпространство X' пространства X^∞ есть прямая сумма конечного числа подпространств вида (20.5.5). В самом деле, пусть $f(\varphi)$—любая функция из X', записанная в виде ряда Фурье

$$f(\varphi)=\sum_m c_m e^{im\varphi}. \qquad (20.5.6)$$

Докажем, что подпространство X' содержит не только эту сумму, но и каждый ее член $c_m e^{im\varphi}$ в отдельности; отсюда будет следовать, что X' содержит подпространство X_{-m} для каждого m, такого, что $c_m \neq 0$. Действительно, так как X' инвариантно относительно всех преобразований (20.5.1), оно содержит все образы $f(\varphi-\alpha)$ данной функции $f(\varphi)$ и поэтому содержит любую функцию вида

$$\sum_{k=1}^{K} h_k f(\varphi-\alpha_k),$$

где h_k и α_k — константы. Взяв эту сумму в качестве суммы Римана, которая аппроксимирует некий интеграл, и затем переходя к пределу, мы видим, что X' содержит любую функцию вида

$$\int h(\alpha) f(\varphi-\alpha)\,d\alpha,$$

а значит, в частности, и функцию

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{im\alpha} f(\varphi-\alpha)\,d\alpha = c_m e^{im\varphi}.$$

Таким образом, X' содержит X_{-m}, если $c_m \neq 0$, что и требовалось доказать. (Поскольку предполагалось, что X' конечномерно, теперь ясно, что c_m отличны от нуля лишь для конечного числа m.)

Для неабелевых групп размерность минимальных инвариантных подпространств может быть, вообще говоря, больше единицы.

20.6. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП МАТРИЦ НА X^∞

Идеи предыдущего параграфа можно обобщить. Если G—группа матриц размера $n\times n$, то ее элементы g определяют линейные преобразования в n-мерном пространстве V^n (совпадающем с $\mathbb{R}^n$ или с $\mathbb{C}^n$). Допустим, что X^∞ обозначает пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $f(\mathrm{x})$, заданных на V^n или на любой поверхности в V^n, которая инвариантна относительно G, и поставим в соответствие каждому элементу g из G линейное преобразование

$$\rho(g)\colon f(\mathrm{x}) \to f'(\mathrm{x}) = f(g^{-1}\mathrm{x}) \qquad (20.6.1)$$

пространства X^∞ на себя (здесь штрих не обозначает дифференцирование). Если за преобразованием $\rho(g)=\rho(g_1)$ следует новое преобразование $\rho(g_2)$, а именно

$$\rho(g_2):\quad f'(\mathrm{x}) \to f''(\mathrm{x}) = f'(g_2^{-1}\mathrm{x}),$$

то результатом будет преобразование

$$\rho(g_2)\,\rho(g_1):\ f(\mathrm{x}) \to f''(\mathrm{x}) = f'(g_2^{-1}\mathrm{x}) = f(g_1^{-1}(g_2^{-1}\mathrm{x})) = f((g_2g_1)^{-1}\mathrm{x}),$$

так что

$$\rho(g_2)\,\rho(g_1) = \rho(g_2g_1). \qquad (20.6.2)$$

Следовательно, соответствие $g \to \rho(g)$ есть представление группы G на пространстве X^∞.

Замечание. Появление в (20.6.1) g^{-1} (а не самого элемента g) необходимо для того, чтобы в (20.6.2) получить правильный порядок множителей. Поэтому же в (20.5.1) стоит знак минус, но, поскольку для абелевой группы указанный порядок не существен, в (20.5.1) равно допустимо и $f(\varphi+\alpha)$.

Замена функции $f(\mathrm{x})$ на $f(g^{-1}\mathrm{x})$ эквивалентна осуществлению отображения $\mathrm{x} \to g\mathrm{x}$ в V^n и переносу значений функции f по ходу данного отображения в точности так, как подстановка $f(t) \to f(t-a)$ переносит значения f на $\mathbb{R}$ (вправо при $a > 0$) на расстояние a.

Если G—непрерывная группа и элементы группы зависят от параметров $\alpha, \beta, \ldots$, т. е. $g = g_{\alpha, \beta, \ldots}$, где $g_{0, 0, \ldots}$—единичный элемент группы G, то инфинитезимальные операторы, соответствующие оператору T предыдущего параграфа, получаются дифференцированием $\rho(g_{\alpha, \beta, \ldots})$ по каждому из параметров $\alpha, \beta, \ldots$ и затем приравниванием $\alpha = \beta = \ldots = 0$. Для группы $SO(3)$ эти инфинитезимальные операторы будут приведены в § 20.9.

20.7. ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Если пространство V^n содержит некоторую гладкую поверхность S меньшей размерности, инвариантную относительно всех преобразований группы G, подобно единичной окружности в случае группы $SO(2)$, то вместо X^∞ можно рассматривать пространство функций, определенных на S, а не на всем V^n. В упомянутом выше примере в качестве S можно было взять любую окружность с центром в начале координат. Если G совпадает с $SO(3)$, то в качестве S можно взять любую сферу в V^3 с центром в начале координат. В каждом из этих случаев действие группы на S обладает следующими свойствами.

а) Действие группы G *эффективно* по отношению к S; это означает, что лишь единица e группы G дает тождественное отображение на S; иначе говоря, если $g \neq e$, то существует хотя бы одна точка x на S, такая, что $g\mathrm{x} \neq \mathrm{x}$.

б) Действие группы G *транзитивно* по отношению к S; это означает, что если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — две произвольные точки на S, то существует такой элемент g из G, который переводит $\mathbf{x}$ в $\mathbf{y}$, т. е. $\mathbf{y}=g\mathbf{x}$.

Если S инвариантна относительно группы G и, кроме того, имеют место свойства а) и б), то S называется *однородным пространством* для G.

Допустим, например, что G состоит из всех преобразований вещественного трехмерного пространства, имеющих следующий вид:

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

где $ad - bc \neq 0$. Любая плоскость $x_3 = \text{const}$ инвариантна относительно G, и для нее имеет место свойство б), но для плоскости $x_3=0$ свойство а) не имеет места, потому что любая точка плоскости $x_3=0$ отображается на себя при преобразованиях вида

$$\mathbf{x} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Следовательно, только плоскости $x_3 = \text{const} \neq 0$ представляют собой однородные пространства для данной группы.

Общая процедура отыскания неприводимых представлений непрерывной группы G линейных преобразований в V^n состоит из следующих шагов: находится однородное пространство S для G в пространстве V^n; вводится ρ как представление $f(\mathbf{x}) \longrightarrow f(g^{-1}\mathbf{x})$ группы G на пространстве X^∞ функций на S [обычно это $L^2(S)$]; определяется полная система инфинитезимальных операторов; при помощи этих инфинитезимальных операторов находятся минимальные инвариантные подпространства пространства X^∞. Специальные функции, связанные со свойствами симметрии, описываемыми группой G, являются элементами инвариантных подпространств пространства X^∞.

Данная процедура будет более подробно описана в § 20.9 для группы вращений $SO(3)$. В этом случае все инвариантные подпространства, которые будут найдены, являются конечномерными. Как будет показано в следующей главе, это справедливо для любой компактной группы. В той же главе для компактных групп будет получен ответ на вопрос о том, можно ли таким образом найти все неприводимые представления.

Теория представлений некомпактных групп, где могут появиться бесконечномерные неприводимые представления, в значительной степени выходит за рамки настоящей книги, и в следующей главе мы удовлетворимся обсуждением лишь некоторых основных свойств трех примеров: группы движений M_2, где возникают функции Бесселя, группы Лоренца и группы $SL(2, \mathbb{C})$, где появляются спиноры.

20.8. РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Для групп Ли однородным пространством может служить само многообразие группы. Рассмотрим, например, группу $G = SO(3)$. Вспомним, что многообразием группы $SO(3)$ является некоторая алгебраическая трехмерная поверхность S в пространстве девяти вещественных измерений; каждая точка S представляет некоторый элемент g из G. Для фиксированного h из G *левая трансляция* $g \to hg$ отображает S на себя. Пусть X^∞ — пространство всех функций $f(g)$ класса C^∞ на S или гильбертово пространство $L^2(S)$. Для любого $h \in G$ отображение

$$\rho(h)\colon\ f(g) \to f(h^{-1}g)$$

есть линейное преобразование в X^∞, а соответствие $h \to \rho(h)$ является представлением группы G. Аналогично связь отображения $f(g) \to f(gh)$ с элементом h также дает представление группы G (отметим, что в отображение входит сам элемент h, а не его обратный). Представления этого типа, называемые *левым* и *правым регулярными представлениями*, обсуждаются в следующей главе.

Упражнение

Покажите, что множество левых трансляций эффективно и транзитивно по отношению к многообразию группы.

20.9. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ $SO(3)$

Методы, описанные в общих чертах в § 20.6 и 20.7, мы применим здесь к группе вращений. Наш подход несколько отличается от традиционного в том, что мы заранее не предполагаем ничего о сферических гармонических функциях $Y_l^m(\theta, \varphi)$ и получаем эти функции и их свойства из теории групп.

Пусть $g_\omega = g_{\omega_x, \omega_y, \omega_z}$ — матрица вращения на угол $\|\boldsymbol{\omega}\|$ вокруг оси, направленной по вектору $\boldsymbol{\omega}$. Иначе говоря, $g_\omega = R(\boldsymbol{\omega})$, где $R(\cdot)$ определена при помощи (19.6.1). Пусть X^∞ — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $f(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^3$. Для каждой матрицы $g = g_\omega$ оператор $\rho(g)$ на X^∞ определен [согласно (20.6.1)] равенством

$$(\rho(g) f)(\mathbf{x}) = f(g^{-1}\mathbf{x}). \qquad (20.9.1)$$

Эти операторы $\rho(g)$ составляют представление группы $SO(3)$.

Инфинитезимальные операторы этого представления получаютс следующим образом. В силу дифференцируемости функций из X при $\omega \to 0$ оператор

$$(1/\omega)[\rho(g_{\omega,0,0}) - \rho(g_{0,0,0})]$$

на X^∞ имеет предел, скажем L_1. [Напомним, что $\rho(g_{0,0,0})$—тож дественный оператор $f \to f$ на X^∞.] Любое конечномерное под пространство X_1 пространства X^∞, инвариантное относительн всех $\rho(g)$, также инвариантно и относительно L_1 (т. е. под дей ствием оператора L_1 это подпространство преобразуется на себя) Если $g = g_{\omega,0,0}$ и $f(\mathrm{x}) = f(x, y, z)$, то

$$f(g^{-1}\mathrm{x}) = f(x,\ y\cos\omega + z\sin\omega,\ -y\sin\omega + z\cos\omega),$$

и из этого следует, что

$$L_1 \overset{\mathrm{def}}{=} d\rho(g_{\omega,0,0})/d\omega\,|_{\omega=0} = z\partial/\partial y - y\partial/\partial z. \tag{20.9.2}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} L_2 &\overset{\mathrm{def}}{=} d\rho(g_{0,\omega,0})/d\omega\,|_{\omega=0} = x\partial/\partial z - z\partial/\partial x, \\ L_3 &\overset{\mathrm{def}}{=} d\rho(g_{0,0,\omega})/d\omega\,|_{\omega=0} = y\partial/\partial x - x\partial/\partial y. \end{aligned} \tag{20.9.3}$$

Это (с точностью до множителя $i\hbar$) квантовомеханические операторы компонент момента импульса (см. книгу Шиффа [1955, гл. IV]. Они удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[L_i, L_j] = L_k \quad (i\,j\,k = 1\,2\,3,\ 2\,3\,1,\ 3\,1\,2). \tag{20.9.4}$$

Замечание. Инфинитезимальные операторы *любого* представления группы $SO(3)$ удовлетворяют этим соотношениям, потому что сами инфинитезимальные элементы группы удовлетворяют им; а именно если

$$T_i = \partial g_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}/\partial\omega_i\,|_{\omega=0} \quad (i = 1, 2, 3),$$

то в соответствии с (19.9.1)

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

следовательно, $[T_i, T_j] = T_k$, где $i\,j\,k = 1\ 2\ 3,\ 2\ 3\ 1,\ 3\ 1\ 2$. Так как в представлении $g \to \rho(g)$ произведения отображаются на произведения, соотношения (20.9.4) имеют силу для любого представления.

Допустим теперь, что S — единичная сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (однородное пространство для группы вращений) и что $X^\infty(S)$ — пространство всех функций из класса C^∞ на S.

Начиная с операторов L_i можно получить инвариантные подпространства, используя так называемые операторы поднятия и опускания, введенные Дираком [1958, гл. 6] для квантования гармонического осциллятора и момента импульса. (См. также книгу Миллера [1973].) В сферических координатах

$$\begin{aligned} L_1 &= \sin\varphi\partial/\partial\theta + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\partial/\partial\varphi, \\ L_2 &= -\cos\varphi\partial/\partial\theta + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\partial/\partial\varphi, \\ L_3 &= -\partial/\partial\varphi. \end{aligned} \tag{20.9.5}$$

Определяя операторы $L^{\pm}$ как $L_1 \pm iL_2$, имеем

$$L^{\pm} = e^{\pm i\varphi}(\mp i\partial/\partial\theta + \operatorname{ctg}\theta\partial/\partial\varphi) \tag{20.9.6}$$

и видим, что

$$[L^+, L^-] = -2iL_3 = 2i\partial/\partial\varphi. \tag{20.9.7}$$

Допустим, что $f(\theta, \varphi)$—некоторая функция из пространства $X^\infty(S)$, не обращающаяся тождественно в нуль. Мы хотим найти минимальное инвариантное подпространство X_1, содержащее $f(\theta, \varphi)$, и выбрать эту функцию $f(\theta, \varphi)$ так, чтобы такое подпространство было столь мало в некотором смысле, сколь это возможно. Если $f(\theta, \varphi) = \sum\limits_m g_m(\theta)e^{im\varphi}$ и если для некоторого m^* $g_{m^*}(\theta) \not\equiv 0$, то из рассуждений § 20.5 следует, что подпространство X_1 содержит все функции, кратные единственному члену суммы, а именно $g_{m^*}(\theta)e^{im^*\varphi}$. Применение операторов L^+ и L^- к функции вида $f(\theta)e^{im\varphi}$ дает функции $f_1(\theta)e^{i(m+1)\varphi}$ и $f_2(\theta)e^{i(m-1)\varphi}$ (по этой причине L^+ и L^- называют *операторами поднятия* и *опускания*), и в силу инвариантности X_1 эти функции должны принадлежать X_1; следовательно, X_1 содержит функции вида

$$\psi_m(\theta, \varphi) = g_m(\theta)e^{im\varphi} \tag{20.9.8}$$

для $m = m^* + 1,\ m^* + 2,\ \ldots$ и для $m = m^* - 1,\ m^* - 2,\ \ldots$.

Далее окажется, что функции $g_m(\theta)$ можно выбрать так, что X_1 будет конечномерным; для этого $L^+\psi_m$ должна обратиться в нуль для некоторого m, скажем для $m = l$, а $L^-\psi_m$ должна обратиться в нуль для некоторого $m \leqslant l$, скажем для $m = l'$; ниже мы покажем, что $l' = -l$. Первое из указанных условий сводится к уравнению $g_l'(\theta) - l\operatorname{ctg}\theta g_l(\theta) = 0$, что следует из формулы (20.9.6) для L^+. Решением данного дифференциального уравнения является функция $g_l(\theta) = \mathrm{const}\cdot(\sin\theta)^l$, и, поскольку функции из X^∞ не имеют никаких особенностей на единичной сфере, отсюда следует, что $l \geqslant 0$; поэтому

$$\psi_l(\theta, \varphi) = C(e^{i\varphi}\sin\theta)^l, \tag{20.9.9}$$

где C—константа, которая будет определена позднее. Начиная с этой функции можно получить последовательность функций ψ_{l-1},

ψ_{l-2}, ... повторным использованием оператора L^-, который преобразует функцию $g(\theta)e^{im\varphi}$ в функцию вида $h(\theta)e^{i(m-1)\varphi}$. Все эти функции принадлежат X_1. Теперь мы, во-первых, покажем, что применяя оператор поднятия, нельзя получить никаких новых функций из уже полученных, т. е. что $L^+\psi_{m-1}$ — та же функция, что и ψ_m, с точностью до нормировки, а, во-вторых, установим, что $L^-\psi_{-l}=0$, иначе говоря, что последовательность функций обрывается при $m=-l$. Мы используем индукцию для убывающего m начиная с $m=l$. Допустим, что для некоторого m функция $L^+\psi_m$ пропорциональна функции ψ_{m+1}, т. е. что $L^-L^+\psi_m$ пропорциональна функции ψ_m, и заметим, что это последнее утверждение заведомо верно для $m=l$, поскольку $L^+\psi_l=0$. Согласно (20.9.7),

$$(L^+L^- - L^-L^+)\psi_m = -2iL_3\psi_m = -2m\psi_m, \qquad (20.9.10)$$

откуда следует, что и $L^+L^-\psi_m$ также пропорциональна ψ_m; следовательно, $L^+\psi_{m-1}$ пропорциональна ψ_m и индукцию можно продолжать.

Теперь определим функции ψ_m в явном виде. Пусть пропорциональность, о которой говорилось выше, записана следующим образом:

$$L^+\psi_m = -i\alpha_m\psi_{m+1}, \quad L^-\psi_{m+1} = -i\beta_m\psi_m. \qquad (20.9.11)$$

Так как любая функция ψ_m содержит произвольный множитель, эти уравнения определяют лишь произведение $\alpha_m\beta_m$ посредством уравнения $L^-L^+\psi_m = -\alpha_m\beta_m\psi_m$. Поэтому можно положить $\beta_m=\alpha_m$ для всех m. Тогда из (20.9.10) будет следовать, что $-\alpha_{m-1}^2+\alpha_m^2=$ $=-2m$ для всех $m<l$, причем это уравнение справедливо и для $m=l$, если α_l положить равным нулю. При помощи индукции для убывающего m получим

$$\alpha_m^2 = (l+m+1)(l-m) \quad (m=l,\ l-1,\ \ldots,\ -l);$$

следовательно, можно взять

$$\alpha_m = \sqrt{(l+m+1)(l-m)} \quad (m=l,\ l-1,\ \ldots), \qquad (20.9.12)$$

где имеется в виду положительное значение корня. В частности, $\alpha_{-l-1}=0$; поэтому $L^{-1}\psi_{-l}=0$, что и требовалось доказать.

Итак, уравнения (20.9.9), (20.9.11) и (20.9.12) определяют все функции ψ_m $(-l\leqslant m\leqslant l)$ с точностью до постоянной C. Линейная оболочка этих функций образует $(2l+1)$-мерное подпространство X^{2l+1} пространства $X^\infty(S)$, инвариантное относительно L_1, L_2, L_3, а также, как будет показано в конце § 20.14, и относительно преобразований $\rho(g)$ для всех g из группы $SO(3)$; существует лишь одно такое подпространство для каждого $l=0$, 1, 2, ... Преобразования $\rho(g)$, действие которых ограничивается подпространством X^{2l+1}, обозначаются через $\rho^l(g)$; они составляют конечномерное неприводимое представление группы G, и, как будет показано в § 21.13, только такие представления являются с точностью до эквивалентности единственно возможными неприводимыми представлениями.

20.10. ТЕССЕРАЛЬНЫЕ ГАРМОНИКИ. ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

В этом параграфе будет показано, что свойства сферических гармоник получаются из теории представлений группы вращений и что тессеральные гармоники образуют базис для представления группы $SO(3)$.

Если функции $\psi_m(\theta, \varphi)$, полученные в предыдущем параграфе, взять в качестве базиса в X^{2l+1}, то преобразования $\rho(g)$, действие которых ограничено подпространством X^{2l+1}, задаются матрицами размера $(2l+1)\times(2l+1)$. Но, прежде чем вычислить эти матрицы, следует подробнее рассмотреть функции ψ_m; в дальнейшем они будут обозначаться через $Y_l^m(\theta, \varphi)$ для того, чтобы указать зависимость от l. Эти функции называются *тессеральными (поверхностными) гармониками. Поверхностная гармоника* есть функция $f(\theta, \varphi)$, такая, что функция $r^p f(\theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа для некоторого целого числа p, и, как будет показано, функция $r^p Y_l^m(\theta, \varphi)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. *Тессера* (это слово произошло от греческого слова, означающего «четырехугольный») есть криволинейный прямоугольник, такой, как прямоугольники, на которые разбивается сферическая поверхность узловыми линиями функций $\operatorname{Re} Y_l^m$ или $\operatorname{Im} Y_l^m$, причем эти линии совпадают с определенными параллелями $\theta=\text{const}$ и определенными меридианами $\varphi=\text{const}$.

Скалярное произведение в пространстве $X^\infty(S)$ функций на единичной сфере S определяется следующим образом:

$$(f_1, f_2)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\overline{f_1(\theta, \varphi)}\, f_2(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \qquad (20.10.1)$$

Пополнение пространства $X^\infty(S)$ относительно нормы $\|f\|=(f, f)^{1/2}$ есть гильбертово пространство $L^2(S)$. Операторы $\rho(g)$, $g\in SO(3)$, унитарны в $L^2(S)$, так как, во-первых, они определены во всем $L^2(S)$ и обратимы, а, во-вторых [в силу инвариантности интеграла (20.10.1) относительно вращений],

$$(\rho(g) f_1, \rho(g) f_2)=(f_1, f_2) \qquad (20.10.2)$$

для всех f_1 и f_2. Будет показано, что функции Y_l^m ортогональны в смысле скалярного произведения (20.10.1). Если выбрать надлежащим образом константу C в (20.9.9) (она может зависеть от l), то функции Y_l^m будут также нормированными. Мы покажем, что эти функции образуют полную ортонормированную систему функций на сфере.

Если проинтегрировать только по φ, то сразу будет видно, что $Y_{l_1}^{m_1}$ и $Y_{l_2}^{m_2}$ ортогональны при $m_1 \neq m_2$, поскольку произведение $\overline{Y_{l_1}^{m_1}} Y_{l_2}^{m_2}$ содержит множитель $e^{i(m_2-m_1)\varphi}$. Из (20.9.5) следует антисимметрия операторов L_i, т. е. $(L_i f, g) = -(f, L_i g)$, откуда в свою очередь следует, что $L^- L^+$ — симметрический оператор. Кроме того, из (20.9.11) вытекает, что

$$L^- L^+ Y_l^m = -(\alpha_l^m)^2 Y_l^m, \tag{20.10.3}$$

где, согласно (20.9.12),

$$(\alpha_l^m)^2 = (l+m+1)(l-m) \tag{20.10.4}$$

[здесь несколько изменены обозначения по сравнению с (20.9.12)]. Поэтому соотношение

$$(L^- L^+ Y_{l_1}^m, Y_{l_2}^m) = (Y_{l_1}^m, L^- L^+ Y_{l_2}^m)$$

эквивалентно тому, что

$$(\alpha_{l_1}^m)^2 (Y_{l_1}^m, Y_{l_2}^m) = (\alpha_{l_2}^m)^2 (Y_{l_1}^m, Y_{l_2}^m);$$

следовательно, поскольку $\alpha_{l_1}^m \neq \alpha_{l_2}^m$ для $l_1 \neq l_2$, функции Y_l^m ортогональны.

Теперь покажем, как нужно выбрать константу C в (20.9.9), чтобы нормировать функции Y_l^m. Оператором, сопряженным к L^+, является оператор $-L^-$; поэтому

$$(L^+ Y_l^m, Y_l^{m+1}) = (Y_l^m, -L^- Y_l^{m+1}).$$

Поскольку $\beta_m = \alpha_m = \alpha_l^m$, из (20.9.11) следует, что

$$(-i\alpha_l^m Y_l^{m+1}, Y_l^{m+1}) = (Y_l^m, i\alpha_l^m Y_l^m),$$

откуда видно, что для данного l $\|Y_l^m\|^2$ не зависит от m. Полагая $\psi_l = Y_l^l$ и используя (20.9.9), получаем

$$\|Y_l^l\|^2 = 2\pi |C|^2 \int_0^\pi \sin^{2l+1}\theta\, d\theta =$$
$$= 4\pi |C|^2 \frac{2 \cdot 4 \ldots (2l)}{1 \cdot 3 \ldots (2l+1)} = 4\pi |C|^2 \frac{(2^l l!)^2}{(2l+1)!}. \tag{20.10.5}$$

Итак, все функции Y_l^m будут нормированы, если взять константу C в виде

$$C = C_l = [(-1)^l/(2^l l!)] \sqrt{(2l+1)!/(4\pi)}. \tag{20.10.6}$$

Используя Y_l^l, заданную формулами (20.9.9) и (20.10.6), а также остальные Y_l^m, получаемые из Y_l^l при помощи рекуррентных соотношений (20.9.11), а именно $L^- Y_l^{m+1} = -i\alpha_l^m Y_l^m$, мы определим новые функции $P_l^m(w)$, называемые *присоединенными функциями Лежандра*, для $-1 \leqslant w \leqslant 1$ следующим образом:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{[(2l+1)/(4\pi)](l-m)!/(l+m)!}\, P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$$
$$(-l \leqslant m \leqslant l). \qquad (20.10.7)$$

Замечания. (1) Множители $(-1)^l$ в (20.10.6) и $(-1)^m$ в (20.10.7) не являются обязательными, но общеприняты. (2) Исторически $P_l^m(w)$ впервые определялись при помощи формул (20.11.6) (см. следующий параграф), а затем определялись $Y_l^m(\theta, \varphi)$ посредством формулы (20.10.7). (3) Символ $P_l^m(w)$ используется различными авторами для обозначения несколько отличающихся функций. Здесь принято то же, что у Толмена [1968] и у других авторов для всех m (т. е. $-l \leqslant m \leqslant l$); оно совпадает с первоначальным определением Феррерса (см. книгу Уиттекера и Ватсона [1927]) для $m \geqslant 0$.

20.11. ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

В этом параграфе свойства функций $P_l^m(w)$ выводятся из теории представлений групп.

Из рекуррентных соотношений для Y_l^m, используя формулу (20.9.6) для операторов $L^{\pm}$, легко вывести рекуррентные соотношения для P_l^m:

$$\sqrt{1-w^2}\, P_l^{m\prime}(w) + \frac{mw}{\sqrt{1-w^2}} P_l^m(w) = P_l^{m+1}(w) \quad (-l \leqslant m \leqslant l), \qquad (20.11.1)$$

$$\sqrt{1-w^2}\, P_l^{m\prime}(w) - \frac{mw}{\sqrt{1-w^2}} P_l^m(w) = -(l+m)(l-m+1) P_l^{m-1}(w)$$
$$(-l \leqslant m \leqslant l), \qquad (20.11.2)$$

где штрих означает дифференцирование по w. Если первое из этих уравнений продифференцировать еще раз, а затем при помощи второго уравнения исключить P_l^{m+1} и $P_l^{m+1\prime}$, то получится дифференциальное уравнение Лежандра

$$(1-w^2) P_l^{m\prime\prime} - 2w P_l^{m\prime} + [l^2 + l - m^2/(1-w^2)] P_l^m = 0 \qquad (20.11.3)$$

для $P_l^m(w)$. Рекуррентное соотношение (20.11.1) можно записать в виде

$$(1-w^2)^{-(m+1)/2} P_l^{m+1}(w) = d[(1-w^2)^{-m/2} P_l^m(w)]/dw,$$

откуда путем очевидной индукции можно получить

$$(1-w^2)^{-m/2} P_l^m(w) = \left(\frac{d}{dw}\right)^{l+m} [(1-w^2)^{l/2} P_l^{-l}(w)]. \qquad (20.11.4)$$

Далее будет показано, что

$$P_l^{-l}(w) = [(-1)^l/(2^l l!)](1-w^2)^{l/2}, \qquad (20.11.5)$$

и мы приходим к так называемой формуле Родрига

$$P_l^m(w)=\frac{1}{2^l l!}(1-w^2)^{m/2}\left(\frac{d}{dw}\right)^{l+m}(w^2-1)^l$$
$$(m=-l,\ -l+1,\ \ldots,\ l). \tag{20.11.6}$$

[Для этой цели можно было бы сначала взять Y_l^{-l}, а не Y_l^l и определять остальные Y_l^m при помощи оператора поднятия L^+, а не оператора опускания L^-. Тем не менее общая связь между Y_l^m и Y_l^{-m}, которая сейчас потребуется, представляет и самостоятельный интерес.] Поскольку L^+ и L^- комплексно сопряжены, уравнения, комплексно сопряженные уравнениям (20.9.11), имеют вид

$$L^-\overline{\psi_m}=i\alpha_m\overline{\psi_{m+1}},\qquad L^+\overline{\psi_{m+1}}=i\alpha_m\overline{\psi_m};$$

отсюда видно, что функции $(-1)^m\overline{\psi_m}$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и функции ψ_{-m}; следовательно,

$$Y_l^{-m}=k(-1)^m\overline{Y_l^m},$$

где k — постоянная, которая равна 1, в чем мы скоро убедимся. Поскольку постоянная C в (20.10.6) вещественна, формулы (20.9.9) и (20.10.7) показывают, что $P_l^l(w)$ — вещественная функция; далее из (20.11.1) следует, что и все $P_l^m(w)$ тоже вещественны; значит, согласно (20.10.7), Y_l^0 вещественна. Положив в приведенном выше уравнении $m=0$, мы видим, что $k=1$. Итак,

$$Y_l^{-m}(\theta,\ \varphi)=(-1)^m\overline{Y_l^m(\theta,\ \varphi)}. \tag{20.11.7}$$

Так как $Y_l^l=C(e^{i\varphi}\sin\theta)^l$, причем C задана в (20.10.6), из (20.11.7) следует явное выражение для Y_l^{-l}, и благодаря (20.10.7) мы получим искомый вид (20.11.5) для P_l^{-l}. (Некоторые авторы определяют Y_l^{-m} как функцию, комплексно сопряженную к Y_l^m, определив последнюю для $m\geqslant 0$. Предложенная здесь процедура имеет некоторые преимущества; например, матрицы $\rho_{m'm}^l$ неприводимых представлений группы вращений, которые приводятся ниже, являются симметричными.)

Ясно, что для четного m $P_l^m(w)$ является многочленом. $P_l^0(w)$ обычно обозначается как $P_l(w)$ и называется *многочленом Лежандра степени l*.

Упражнения

1. Покажите, что $\int\limits_0^1(1-w^2)^l\,dw=[2l/(2l+1)]\int\limits_0^1(1-w^2)^{l-1}\,dw$, и используйте этот результат, чтобы при помощи индукции показать правильность вычисления интеграла в (20.10.5).

2. Выразите операторы $L^{\pm}$ через переменные w и φ, где $w=\cos\theta$, и выведите рекуррентные соотношения (20.11.1), (20.11.2) из (20.9.11).

3. Для случая $m=0$ проверьте, что формула Родрига (20.11.6) дает решение дифференциального уравнения Лежандра, т. е. уравнения (20.11.3) с $m=0$. [Это решение есть $P_l(w)$.] Вы можете сделать то же самое для $m \neq 0$, но это несколько сложнее.

4. Так как P_l^m и P_l^{-m} удовлетворяют одному и тому же уравнению (20.11.3) (это уравнение не меняется при замене m на $-m$), причем оно имеет самое большее одно решение, регулярное при $w=\pm 1$, то эти функции пропорциональны. Найдите коэффициент пропорциональности. *Предостережение на будущее*: некоторые авторы полагают функцию P_l^{-m} равной P_l^m.

5. Покажите, что справедливо отличное от (20.11.6) выражение функции $P_l^m(w)$, а именно

$$P_l^m(w)=(-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{1}{2^l l!}(1-w^2)^{-m/2}\left(\frac{d}{dw}\right)^{l-m}(w^2-1)^l \qquad (20.11.8)$$

для $-l \leqslant m \leqslant l$.

20.12. МАТРИЦЫ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SO(3)$. УГЛЫ ЭЙЛЕРА

При заданном l функции Y_l^m $(m=l,\ l-1,\ \ldots,\ -l)$ берутся в качестве базисных векторов в пространстве X^{2l+1} $(2l+1)$-мерного представления группы $SO(3)$, которое мы нашли в предыдущих параграфах. Для любой функции $f=f(\theta, \varphi)$ $\rho(g)f$ является функцией, полученной путем перенесения значений функции $f(\theta,\varphi)$ при движении по сфере согласно вращению g. Следовательно, матрица $\rho^l(g)$ преобразования $\rho(g)$, действие которого ограничено подпространством X^{2l+1}, имеет элементы $\rho^l_{m'm}$, задаваемые посредством разложения

$$(\rho(g)Y_l^m)(\theta,\varphi)=\sum_{m'=-l}^{l}\rho^l_{m'm}(g)\,Y_l^{m'}(\theta,\varphi) \quad (m=l,\ l-1,\ \ldots,\ -l). \qquad (20.12.1)$$

Удобно выражать вращение при помощи углов Эйлера α, β, γ и писать $\rho(\alpha,\beta,\gamma)$ вместо $\rho(g)$. Тогда g является результатом следующих последовательных вращений:

1) вращения вокруг оси z на угол γ,
2) вращения вокруг оси x на угол β,
3) вращения вокруг оси z на угол α.

(См. упражнения 3—5 § 21.5.) Соответственно матрица ρ^l разлагается следующим образом:

$$\rho^l(\alpha,\beta,\gamma)=\rho^l(\alpha,0,0)\,\rho^l(0,\beta,0)\,\rho^l(0,0,\gamma).$$

Первый и третий множители в этом произведении представляют собой диагональные матрицы; преобразование $\rho(\alpha, 0, 0)$ лишь заменяет в функции φ на $\varphi-\alpha$, и, значит, при этом преобразовании Y_l^m умножается на $e^{-i\alpha m}$, т. е.

$$\rho^l_{m'm}(\alpha,0,0)=e^{-i\alpha m'}\delta_{m'm}.$$

Таким образом, $\rho^l_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)$ можно представить в следующем виде:

$$\rho^l_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha m'} P^l_{m'm}(\cos\beta)\, e^{-i\gamma m}. \qquad (20.12.2)$$

Функции $P^l_{m'm}(w)$ тесно связаны с многочленами Якоби; подробно их свойства рассматриваются в книгах Гельфанда, Минлоса и Шапиро [1958] и Виленкина [1965], к которым и отсылается читатель за деталями. (Определение функций $P^l_{m'm}$, данное ниже, совпадает с определением Гельфанда и др. и отличается комплексным сопряжением от определения Виленкина.) Функции $P^l_{m'm}$ имеют вид

$$P^l_{m'm}(w) = C\,(1+w)^{-(m+m')/2}(1-w)^{(m-m')/2} \times \times \left(\frac{d}{dw}\right)^{l-m'} \left[(w-1)^{l-m}(w+1)^{l+m}\right], \qquad (20.12.3)$$

где

$$C = i^{m'-m}2^{-l}\left(\frac{(l+m')!}{(l-m)!\,(l+m)!\,(l-m')!}\right)^{1/2}. \qquad (20.12.4)$$

(Возможно, логичнее было бы вынести явно множитель $i^{m'-m}$ в определение $\rho^l_{m'm}$ (20.12.2), а не оставлять его в формуле для функции $P^l_{m'm}$, которая была бы тогда вещественной для $-1 \leqslant w \leqslant 1$, но так делать не принято.)

При $m=0$ (и при $m'=0$) эти функции пропорциональны присоединенным функциям Лежандра. Сравнение (20.12.3) с (20.11.8) показывает, что

$$P^l_{m'0}(w) = (-i)^{m'}\sqrt{(l-m')!/(l+m')!}\,P^{m'}_l(w) \qquad (20.12.5)$$

[в частности, $P^l_{00}(w) = P_l(w)$]; следовательно,

$$\rho^l_{m'0}(\alpha, \beta, 0) = \sqrt{4\pi/(2l+1)}\;\overline{Y^{m'}_l(\beta, \alpha-\pi/2)}. \qquad (20.12.6)$$

[То же самое получается и для $\rho^l_{m'0}(\alpha, \beta, \gamma)$, ибо $\rho^l_{m'0}$ не зависит от γ.]

Упражнения

1. Проверьте (20.12.1), когда g — вращение вокруг оси z.
2. Проверьте (20,12.1), когда g — вращение на угол π вокруг оси x.
3. Покажите, что для $l=1$ функции $P^l_{m'm}$ суть элементы матрицы

$$(P^l_{m'm}) = \begin{pmatrix} (1+w)/2 & -i\sqrt{(1-w^2)/2} & (w-1)/2 \\ -i\sqrt{(1-w^2)/2} & w & -i\sqrt{(1-w^2)/2} \\ (w-1)/2 & -i\sqrt{(1-w^2)/2} & (1+w)/2 \end{pmatrix},$$

где строки нумеруются сверху вниз, соответствуя $m'=-1, 0, 1$, а столбцы — слева направо, соответствуя $m=-1, 0, 1$. Отметим, что эта матрица унитарна.

4. Отождествляя левую часть (20.12.1) с $Y^m_l(\theta', \varphi')$, умножим это равенство на r, перейдем к декартовым координатам, полагая $z'=r\cos\theta'$, $x'\pm iy' = r\sin\theta' e^{\pm i\varphi'}$ (и аналогично для x, y, z), и возьмем $l=1$. Используя результат упражнения 3, покажите, что в случае, когда g — вращение на угол β

вокруг оси x (т. е. $\alpha=\gamma=0$), преобразование, описываемое в (20.12.1), имеет вид

$$x'=x, \quad y'=y\cos\beta+z\sin\beta, \quad z'=-y\sin\beta+z\cos\beta.$$

5. Покажите, что $P^l_{m'm}=P^l_{mm'}$.

6. Покажите, что в (20.12.6) можно избежать появления угла $\alpha-\pi/2$ вместо α, если вторым шагом в определении углов Эйлера принять вращение на угол β вокруг оси y, а не вокруг оси x.

20.13. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ТЕССЕРАЛЬНЫХ ГАРМОНИК

В формуле (20.12.1), которая показывает, как для заданного l функции Y_l^m при вращении g преобразуются в комбинации этих же функций, положим $m=0$ и допустим, что g — вращение с углами Эйлера α, β, 0, так что

$$(\rho(\alpha, \beta, 0)\, Y_l^0)(\theta, \varphi)=\sum_{m'=-l}^{l}\rho^l_{m'0}(\alpha, \beta, 0)\, Y_l^{m'}(\theta, \varphi). \qquad (20.13.1)$$

Оператор $\rho(\alpha, \beta, 0)$ переносит значения функции при движении по сфере согласно вращению g, которое переводит полярную ось в направление, заданное углами β, $\alpha-\pi/2$. Следовательно, левая часть в (20.13.1) равна функции

$$Y_l^0(\theta_{12}, 0),$$

где θ_{12} — угол между направлениями $(\beta, \alpha-\pi/2)$ и (θ, φ) [напомним, что $Y_l^0(\theta, \varphi)$ не зависит от φ]. Переобозначим эти направления: пусть первое будет (θ_1, φ_1), а второе — (θ_2, φ_2), и используем тригонометрическое тождество

$$\cos\theta_{12}=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2). \qquad (20.13.2)$$

Наконец, подставляя (20.12.6) в (20.13.1), получаем

$$Y_l^0(\theta_{12}, 0)=\sqrt{4\pi/(2l+1)}\sum_{m=-l}^{l}\overline{Y_l^m(\theta_1, \varphi_1)}\, Y_l^m(\theta_2, \varphi_2), \qquad (20.13.3)$$

что и представляет собой искомую теорему сложения. Ее можно записать также в виде

$$P_l(\cos\theta_{12})=P_l(\cos\theta_1)\,P_l(\cos\theta_2)+$$
$$+2\sum_{m=1}^{l}[(l-m)!/(l+m)!]\,P_l^m(\cos\theta_1)\,P_l^m(\cos\theta_2)\cos m(\varphi_1-\varphi_2). \qquad (20.13.4)$$

Мимоходом отметим, что в частном случае $l=1$ мы снова получаем тригонометрическую формулу (20.13.2), ибо $P_1(w)=w$, $P_1^1(w)=\sqrt{1-w^2}$.

20.14. ПОЛНОТА СИСТЕМЫ ТЕССЕРАЛЬНЫХ ГАРМОНИК

В этом параграфе будет показано, что тессеральные гармоники образуют полную систему для разложения функций, определенных на сфере. Так как (20.11.3) является дифференциальным уравнением типа Штурма — Лиувилля в интервале (—1, 1) (с особыми концевыми точками типа предельной точки на каждом конце), требуемую полноту можно установить при помощи методов § 10.6 тома 1 настоящей книги. Здесь предлагается другой подход, основанный на теории потенциала.

Формула Родрига (20.11.6) показывает, что функция $P_l^m(w)$ содержит только четные степени w, когда $l+m$ четно, или только нечетные степени w, когда $l+m$ нечетно, и, кроме того, имеется множитель $\sqrt{1-w^2}$ для нечетного m. Из (20.10.7), переходя к декартовым координатам

$$r\cos\theta = z, \quad r\sin\theta e^{i\varphi} = x+iy, \quad r^2 = x^2+y^2+z^2,$$

можно установить, что $r^l Y_l^m(\theta, \varphi)$ является однородным многочленом степени l по x, y, z, т. е. что каждый член имеет вид $\mathrm{const}\cdot x^i y^j z^k$, где $i+j+k=l$.

Теперь покажем, что эти многочлены удовлетворяют уравнению Лапласа. Записанный в сферических координатах лапласиан можно выразить через операторы L_i, используя (20.9.5) и (20.9.6):

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = \\ &= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + L^-L^+ + L_3^2 - iL_3\right]. \qquad (20.14.1)\end{aligned}$$

Функция Y_l^m есть собственная функция оператора L^+L^- и оператора L_3, соответствующая собственному значению $-(\alpha_l^m)^2$ в случае первого оператора и собственному значению $-im$ в случае второго оператора. Следовательно, с учетом (20.9.12) мы имеем

$$\begin{aligned}\nabla^2 r^l Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{r^2}[l(l+1)-(l+m+1)(l-m)-m^2-m]\times \\ \times r^l Y_l^m(\theta, \varphi) = 0.\end{aligned}$$

Общий однородный многочлен $p(x, y, z)$ степени l включает $^1/_2(l+1)(l+2)$ членов вида $x^i y^j z^k$. В самом деле, если $i=0$, то существует $l+1$ возможных значений j, если $i=1$, то существует l возможных значений j, и т. д.; во всех случаях $k=l-i-j$ и поэтому число членов равно $1+2+\ldots+(l+1)={}^1/_2(l+1)(l+2)$. Теперь допустим, что $p(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Так как $\nabla^2 p$ является однородным многочленом степени $l-2$, то для обращения его в нуль нужно наложить $^1/_2(l-1)l$ условий на коэффициенты многочлена p, причем нетрудно видеть, что эти условия независимы. Следовательно, гармонические многочлены степени l образуют пространство

$$(l+1)(l+2)/2-(l-1)\,l/2=2l+1$$

измерений. Это пространство является в точности линейной оболочкой многочленов

$$r^l Y_l^m \quad (m=l,\ l-1,\ \ldots,\ -l),$$

ибо число их равно $2l+1$ и очевидно, что они независимы в силу ортогональности функций Y_l^m. Отсюда следует заключение, *что любой гармонический многочлен можно выразить через функции* $r^l Y_l^m(\theta,\ \varphi)$.

Если $f(\theta,\ \varphi)$—произвольная непрерывная функция на единичной сфере, то, согласно разрешимости задачи Дирихле в теории потенциала, существует функция $\psi(x,\ y,\ z)$, которая удовлетворяет уравнению $\nabla^2\psi=0$ при $x^2+y^2+z^2<1$, является непрерывной при $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ и принимает значения $f(\theta,\ \varphi)$ на сфере $x^2+y^2+z^2=1$. (Фактически ψ выражается через f при помощи интеграла Пуассона.) Функция ψ аналитична в шаре и может быть представлена в виде степенного ряда по x, y, z. Члены этого разложения, соответствующие данной степени l, являются гармоническими многочленами степени l и поэтому могут быть выражены через функции $r^l Y_l^m(\theta,\ \varphi)$; таким образом,

$$\psi(x,\ y,\ z)=\sum_{l=0}^{\infty}\ \sum_{m=-l}^{l} A_l^m r^l Y_l^m(\theta,\ \varphi).$$

Можно показать, что для непрерывной граничной функции f решение задачи Дирихле ψ при $r\to 1$ сходится к f равномерно по углам, т. е. сходится в L^2; отсюда

$$f(\theta,\ \varphi)=\sum_{l}\sum_{m} A_l^m Y_l^m(\theta,\ \varphi) \qquad (20.14.2)$$

в смысле сходимости в среднем. Поскольку непрерывные функции плотны в $L^2(S)$, ясно, что тессеральные гармоники образуют полную ортонормированную систему функций на сфере. Кроме того, ясно, что любое распределение $f(\theta,\ \varphi)$ в $L^2(S)$ можно представить в виде (20.14.2), где коэффициентами ряда являются величины

$$A_l^m=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\overline{Y_l^m(\theta,\ \varphi)}\,f(\theta,\ \varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

а ряд сходится к $f(\theta,\ \varphi)$ в среднем.

Теперь мы можем заполнить тот пробел, который возник при рассмотрении представлений группы $SO(3)$ в § 20.9. Вспомним, что X^∞ определялось как пространство всех функций класса C^∞ на сфере, а X^{2l+1} было подпространством, являющимся линейной оболочкой функций

$$Y_l^m \quad (m=l,\ l-1,\ \ldots,\ -l).$$

Было доказано, что X^{2l+1} инвариантно (т. е. преобразуется само в себя) относительно инфинитезимальных операторов L_1, L_2, L_3 представления ρ, и теперь можно доказать, что X^{2l+1} инвариантно также относительно преобразований $\rho(g)$, $g \in SO(3)$: в самом деле, пусть $\rho(g) Y_l^m$ — функция от θ, φ, полученная путем перенесения значений $Y_l^m(\theta, \varphi)$ при движении по сфере согласно вращению g; следовательно, функция $r^l \rho(g) Y_l^m$ является также однородным гармоническим многочленом степени l по x, y, z и поэтому может быть выражена в виде линейной комбинации многочленов $r^l Y_l^{m'}(\theta, \varphi)$, $m'=l,\ l-1,\ \ldots,\ -l$. Отсюда следует инвариантность подпространства X^{2l+1}.

Полнота системы тессеральных гармоник показывает, что пространство $L^2(S^2)$, где S^2 — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, есть прямая сумма (относительно L^2-нормы) подпространств X^{2l+1} $(l=0, 1, 2, \ldots)$.