Глава 21

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП II. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ДВИЖЕНИЯ. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Унитарное представление; приведение; разложение; прямая сумма; полное приведение; лемма Шура; компактные и некомпактные группы; инвариантное интегрирование; мера Хаара; правая и левая трансляции; инвариантное интегрирование в $SU(2)$; площадь n-мерной сферы; регулярные представления; инвариантное интегрирование в $SO(3)$; теоремы полноты Петера—Вейля и Виленкина; волновые функции симметричного волчка; группы движений; функции Бесселя; рекуррентные соотношения, дифференциальные уравнения и порождающие уравнения; разложение плоской волны; характеры; полнота представлений группы $SO(3)$.

Предварительные сведения: гл. 18—20.

Неприводимые представления группы $SO(2)$, рассмотренные в § 20.5, являются одномерными; неприводимые представления группы $SO(3)$, которые были рассмотрены в § 20.9, многомерны, причем их размерность равна $2l+1$, где $l=0, 1, 2, \ldots$; неприводимые представления группы движений, которые рассмотрены в этой главе, бесконечномерны. Будет показано, что такое различие отражает различные свойства групп.

21.1. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ. УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Первым шагом при классификации представлений является выяснение следующего вопроса: какие два представления можно считать эквивалентными, так чтобы нужно было описывать лишь одно из них? Два представления $\rho(g)$ и $\rho'(g)$ на (конечномерном) пространстве X будут *эквивалентны*, если первое из них может быть преобразовано во второе путем подходящей замены координат в пространстве X, т. е. если существует такая матрица A, что $\rho(g)=A^{-1}\rho'(g)A$ для всех g. В более общей формулировке допустим, что ρ и ρ' — представления на разных пространствах X и X' одинаковой размерности и существует такая матрица A, что соответствие $\mathbf{x}\to\mathbf{x}'=A\mathbf{x}$ есть взаимно однозначное отображение X на X', а $\rho(g)$ и $A^{-1}\rho'(g)A$ — одинаковые матрицы для любого элемента g; тогда ρ и ρ' являются эквивалентными представлениями.

Как было указано в § 20.4, в бесконечномерном случае $\rho(g)$ для каждого g есть ограниченное линейное преобразование в банаховом или гильбертовом пространстве. Допустим, что ρ и ρ' — представления в пространствах X и X' одного и того же типа, скажем, оба этих пространства являются сепарабельными гильбертовыми пространствами; допустим далее, что существует ограниченное линейное преобразование A из X на X' с обратным A^{-1} и что $\rho(g)$ и $A^{-1}\rho'(g)A$ — один и тот же оператор для любого g; тогда ρ и ρ' — эквивалентные представления.

Это отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно, а потому разбивает совокупность всех представлений данной группы на классы эквивалентности. Естественно попытаться выбрать из каждого класса эквивалентности представление с наиболее подходящими свойствами. В большинстве случаев можно выбрать *унитарное* представление, т. е. представление, в котором каждое преобразование $\rho(g)$ есть унитарная матрица или унитарный оператор для всех $g \in G$; благодаря теореме, сформулированной в следующем параграфе, такое представление дает известные преимущества.

Следует заметить, что вопрос об эквивалентности двух представлений ρ и ρ' не сводится лишь к вопросу об изоморфизме двух групп матриц $\{\rho(g)\}$ и $\{\rho'(g)\}$: эти матрицы должны быть одинакового размера в двух представлениях, а представления должны быть связаны так, что $\rho(g) = A^{-1}\rho'(g)A$ для всех g и для некоторой фиксированной матрицы A. Все представления ρ^l $(l = 0, 1, 2, \ldots)$ группы $SO(3)$, найденные нами в § 20.3, неэквивалентны (они имеют различные размерности), но все полученные группы матриц $\{\rho^l(g)\}$ изоморфны при $l \neq 0$: фактически все они изоморфны группе $SO(3)$. Следующий пример показывает, что два представления могут иметь одинаковую размерность, но быть неэквивалентными. Пусть G — группа тора T_2, состоящая из диагональных унитарных матриц размера 2×2, т. е. матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad |\alpha| = 1, \quad |\beta| = 1.$$

Два представления на $\mathbb{C}$, заданные в виде

$$\rho(g)\colon z \longrightarrow \alpha z, \quad \rho'(g)\colon z \longrightarrow \beta z,$$

не являются эквивалентными; никаким преобразованием плоскости z нельзя для всех g перевести $\rho(g)$ в $\rho'(g)$. Для $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\rho(g)$ есть тождественное преобразование, тогда как $\rho'(g)$ не является таковым.

21.2. ПРИВЕДЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Следующий шаг классификации состоит в разложении данного представления на столько неприводимых компонент, на сколько это возможно. Если ρ — представление на конечномерном пространстве X и если подпространство X_1 инвариантно относительно всех $\rho(g)$, т. е. если из того, что $\mathbf{x} \in X_1$, следует, что $\rho(g)\mathbf{x} \in X_1$ для всех g, то представление ρ называется *приводимым*, как и в предыдущей главе (в противном случае ρ называется *неприводимым*). Пусть найдется другое инвариантное подпространство X_2, причем такое, что $X = X_1 \oplus X_2$ (это выражение означает, что X_1 и X_2 не имеют никаких общих векторов, кроме нулевого, и любой $\mathbf{x} \in X$ можно записать в виде $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in X_1$, а $\mathbf{x}_2 \in X_2$). В таком случае представление ρ называется *вполне приводимым* или *разложимым*. Тогда если $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$ является базисом в X, таким, что $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^m$ — базис в X_1, а $\mathbf{e}^{m+1}, \ldots, \mathbf{e}^n$ — базис в X_2, то относительно этого базиса все матрицы $\rho(g)$ имеют вид[1])

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \boxed{m \times m} & (0) \\ (0) & \boxed{\begin{matrix}(n-m)\\ \times \\ (n-m)\end{matrix}} \end{pmatrix}; \qquad (21.2.1)$$

т. е. матричные элементы, которые связывают два данных подпространства, равны нулю. (Если ρ приводимо, но не разложимо, то можно выбрать базис, в котором все матричные элементы равны нулю в левом нижнем прямоугольном блоке, но при этом найдутся отличные от нуля элементы в верхнем правом блоке.) Если для любого g $\rho_1(g)$ и $\rho_2(g)$ соответственно обозначают приведенные выше матрицы размера $m \times m$ и $(n-m) \times (n-m)$, то каждое из отображений $g \to \rho_1(g)$ и $g \to \rho_2(g)$ является представлением группы G, а представление ρ есть их *прямая сумма*; символически это обозначается как $\rho = \rho_1 + \rho_2$.

Когда X — бесконечномерное банахово или гильбертово пространство, X_1 рассматривается как замкнутое линейное многообразие в X; при этом нет никакой потери общности, ибо все операторы $\rho(g)$ ограниченны, а потому замыкание инвариантного линейного многообразия инвариантно. И снова, если $X = X_1 \oplus X_2$, а X_1 и X_2 инвариантны относительно всех $\rho(g)$, мы полагаем, что

$$\rho = \rho_1 + \rho_2,$$

где ρ_1 и ρ_2 суть сужения представления ρ на X_1 и X_2 соответственно. (Одно из ρ_1, ρ_2 может быть конечномерным.)

Может оказаться, что X_1 или X_2 в свою очередь содержат инвариантные подпространства, так что ρ_1 и ρ_2 (или оба их) можно снова разложить, и т. д. В таком случае в подходящем базисе в X

---

[1]) Такие матрицы часто называют клеточными.— *Прим. перев.*

матрицы $\rho(g)$ содержат некоторое количество квадратных блоков, симметрично расположенных вдоль главной диагонали, причем все элементы вне этих блоков равны нулю. Каждый квадратный блок дает некоторое представление группы G, а ρ есть прямая сумма этих представлений. Если этот процесс продолжать осуществлять дальше, может оказаться, что все полученные представления, на которые разложено ρ, неприводимы. Тогда говорят, что ρ *полностью приводимо*. В этом случае можно найти структуру всех представлений группы G, определяя все минимальные инвариантные подпространства первоначально достаточно большого пространства X, как это было сделано для групп $SO(2)$ и $SO(3)$ в предыдущей главе.

Теорема. *Любое конечномерное унитарное представление группы G полностью приводимо, т. е. или оно уже неприводимо, или может быть выражено в виде прямой суммы неприводимых представлений.*

Доказательство. Этот результат является следствием того факта, что если ρ унитарно, а X_1 инвариантно, то, как легко видеть, подпространство $X_1^{\perp}$ также инвариантно.

21.3. ЛЕММА ШУРА И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ

Доказательство теоремы, приведенной в этом параграфе, зависит от знаменитой леммы, которую доказал Шур в 1905 г. и которая кажется тривиальной, хотя является весьма глубоким результатом элементарной линейной алгебры.

Лемма (Шур). *Если ρ_1 и ρ_2—неприводимые представления группы G на V^k и V^l соответственно, а A—матрица размера $l\times k$, такая, что*

$$A\rho_1(g)=\rho_2(g)A \quad \text{для всех} \quad g\in G, \tag{21.3.1}$$

то либо $k=l$ и A имеет обратную матрицу A^{-1} (и, значит, ρ_1 и ρ_2 эквивалентны), либо A — нулевая матрица. В первом случае A определяется единственным образом (с точностью до скалярного множителя) из условия (21.3.1).

Доказательство. Пусть S—нуль-пространство матрицы A, состоящее из всех векторов $\mathbf{x}\in V^k$, таких, что $A\mathbf{x}=0$. Пространство S инвариантно относительно всех $\rho_1(g)$, ибо если $A\mathbf{x}=0$, то $A\rho_1(g)\mathbf{x}=0$ согласно (21.3.1). Так как ρ_1 неприводимо, то S либо совпадает со всем V^k, и в этом случае $A=0$, либо S содержит лишь нулевой вектор. В этом последнем случае не существует ненулевого вектора, ортогонального ко всем строкам матрицы A; следовательно, количество строк $l\geqslant k$, а отображение $\mathbf{x}\longrightarrow\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ обратимо, поскольку любая подматрица в A размера $k\times k$ невырожденна и может быть использована для решения уравнения $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ относительно $\mathbf{x}$.

Пусть S'—образ пространства V^k в V^l при отображении $\mathbf{x}\longrightarrow A\mathbf{x}$; тогда подпространство S' является k-мерным и инвариантным относительно всех

$\rho_2(g)$, так как если $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ для некоторого $\mathbf{x}$, то $\rho_2(g)\mathbf{y}=A\mathbf{x}'$ для $\mathbf{x}'=\rho_1(g)\mathbf{x}$. Представление ρ_2 неприводимо; поэтому $S'=V^l$, $k=l$, а A^{-1} — матрица обратного отображения.

Теперь докажем единственность матрицы A. Допустим, что B — другая ненулевая матрица с тем же свойством, а именно $B\rho_1(g)=\rho_2(g)B$ для всех g; тогда нужно доказать, что $A=\text{const}\cdot B$. Ясно, что

$$\rho_2(g)AB^{-1}=AB^{-1}\rho_2(g) \quad \text{для всех } g.$$

Из этого равенства следует, что если $\mathbf{v}$ — собственный вектор матрицы AB^{-1} (любая матрица имеет хотя бы один собственный вектор), то $\rho_2(g)\mathbf{v}$ также является собственным вектором этой матрицы, соответствующим тому же самому собственному значению, скажем λ. Иначе говоря, одномерное собственное подпространство, содержащее $\mathbf{v}$, инвариантно относительно $\rho_2(g)$ для всех g. Поскольку ρ_2 неприводимо, полное собственное подпространство, соответствующее λ, должно совпадать со всем V^k; таким образом, $AB^{-1}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$ для всех $\mathbf{v}$, а, значит, $B^{-1}=\lambda A^{-1}$ или $A=\lambda B$, что и требовалось доказать.

Замечание. В доказательстве нигде не использовался тот факт, что G — группа. Все выводы сохраняются, если $\{\rho_1(g)\}$ и $\{\rho_2(g)\}$ — два любых неприводимых множества квадратных матриц. Множество $\{M_l\}$ матриц размера $k\times k$ является *неприводимым*, если нельзя найти нетривиального собственного подпространства пространства V^k, которое было бы инвариантным относительно всех отображений $\mathbf{x}\longrightarrow M_l\mathbf{x}$.

При доказательстве леммы Шура был установлен следующий результат.

Следствие. *Любая матрица, которая коммутирует со всеми матрицами неприводимого представления (или неприводимого множества матриц), кратна единичной матрице.*

Как дальнейшее следствие леммы имеем следующую теорему.

Теорема. *Любое конечномерное неприводимое представление* ρ *абелевой (коммутативной) группы одномерно.*

Доказательство. Так как каждая матрица $\rho(h)$ коммутирует со всеми $\rho(g)$, то каждая $\rho(h)$ кратна единичной матрице; следовательно, представление ρ приводимо, если оно не одномерно.

Теперь ясно, почему в § 20.5 были обнаружены только одномерные представления группы $SO(2)$.

21.4. КОМПАКТНЫЕ И НЕКОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ

В § 19.5 было указано, что матрицы размера $n\times n$ (вообще говоря, комплексные) можно представлять точками в пространстве V, имеющем $2n^2$ (вещественных) измерений, и что множество всех матриц, составляющих любую группу, подобную $GL(n)$, $SL(n)$, $U(n)$, $O(n)$ и т. п., есть алгебраическая поверхность $\mathcal{S}$ в пространстве V. Для упомянутых групп (они являются *непрерывными* группами, или *группами Ли*) $\mathcal{S}$ всегда представляет собой замкнутое точечное множество, но оно может не быть ограниченным. Для $O(n)$, $U(n)$, $SO(n)$, $SU(n)$ поверхность $\mathcal{S}$ ограничена [например, из уравнения (19.5.1) следует, что для группы $O(3)$ ни одна точка на $\mathcal{S}$ не может иметь координату R_{jk}, превышающую по абсолютной величине единицу], тогда как для $GL(n)$, $SL(n)$, M_n и для группы Лоренца $\mathcal{S}$ не является ограниченной (расширяется в V до бесконечности). В первом случае группа называется *компактной* ($\mathcal{S}$ есть компактное множество в V), а во втором — *некомпактной*. Теория компактных групп много проще, чем соответствующая теория некомпактных групп; это обстоятельство демонстрирует интересную взаимосвязь различных областей математики: компактность группового многообразия представляет собой геометрическое свойство, в то время как упомянутые упрощения имеют в основном алгебраический характер.

Следующие теоремы, которые мы приводим без доказательства, показывают, что в случае компактных групп достаточно рассматривать унитарные представления.

Теорема 1. *Пусть ρ — конечномерное представление компактной группы G. Тогда ρ эквивалентно некоторому унитарному представлению; иначе говоря, существует такая фиксированная невырожденная матрица A, что матрица $A\rho(g)A^{-1}$ унитарна для всех элементов g из G.*

Это можно переформулировать следующим образом: если определить в представляющем пространстве X скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)_1$ при помощи равенства $(\xi, \eta)_1 \overset{\text{def}}{=} (A\xi, A\eta)$, где $(\cdot\,,\cdot)$ означает первоначальное скалярное произведение, заданное как $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^*\mathbf{y}$, то

$$(\rho(g)\xi, \rho(g)\eta)_1 = (\xi, \eta)_1 \text{ для всех } g \in G \text{ и всех } \xi, \eta \in X; \quad (21.4.1)$$

иначе говоря, матрицы $\rho(g)$ унитарны относительно нового скалярного произведения.

Справедлива и более общая формулировка:

Теорема 2. *Пусть ρ — представление компактной группы G на гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$, т. е. для любого g $\rho(g)$ — обратимый ограниченный линейный оператор в $\boldsymbol{H}$ и $\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2)$. Тогда в $\boldsymbol{H}$ существует новое скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)_1$, такое, что*

$$(\rho(g)u, \rho(g)v)_1 = (u, v)_1 \text{ для всех } g \in G \text{ и всех } u, v \in \boldsymbol{H}. \quad (21.4.2)$$

Теорема 3. *Все неприводимые унитарные представления компактной группы G конечномерны.*

В противоположность этому группы Лоренца имеют бесконечномерные неприводимые унитарные представления.

21.5. ИНВАРИАНТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ. МЕРА ХААРА

Допустим, что G—компактная группа матриц размера $n\times n$; многообразие $\mathcal{S}$ группы G является компактной (замкнутой ограниченной) поверхностью (размерности $m\leqslant 2n^2$) в пространстве V $2n^2$ (вещественных) измерений (см. § 19.5). Можно доказать, что существует положительная непрерывная функция $w(g)$, определенная на $\mathcal{S}$ (здесь символ g используется как для обозначения элемента группы, так и для обозначения соответствующей точки на $\mathcal{S}$) и обладающая замечательным свойством, а именно если f—любая непрерывная функция на $\mathcal{S}$ и h—любой фиксированный элемент группы, то

$$\int_{\mathcal{S}} f(hg)\, w(g)\, d\mathcal{A}(g) = \int_{\mathcal{S}} f(g)\, w(g)\, d\mathcal{A}(g)$$

для всех $h\in G$ и для всех непрерывных на $\mathcal{S}$ функций f; (21.5.1)

здесь $d\mathcal{A}(g)$ есть m-мерный элемент объема или «элемент площади» на $\mathcal{S}$.

Это остается верным и в том случае, когда G некомпактна, так что поверхность $\mathcal{S}$ расширяется в V до бесконечности, т. е. и тогда существует весовая функция $w(g)$ на $\mathcal{S}$, такая, что справедливо (21.5.1), при условии, разумеется, что для функции f данные интегралы сходятся.

Отображение $g\to hg$ группы G на себя для фиксированного h называется *левой трансляцией* в G. Приведенное выше равенство показывает, что интеграл от непрерывной на $\mathcal{S}$ функции с весовой функцией w инвариантен относительно всех левых трансляций в группе. Интеграл в (21.5.1) называется *левоинвариантным интегралом*. Доказательство существования весовой функции w можно найти в книге Вигнера [1931] в разделе «Интеграл Гурвица»; см. также книгу Нахбина [1965].

Аналогичный инвариантный интеграл существует для правых трансляций. Можно доказать, что, в частности, для компактной группы G приведенный выше интеграл (с *той же самой* весовой функцией w) также инвариантен относительно правых трансляций и относительно инверсий, т. е.

$$\int f(g)\, w(g)\, d\mathcal{A}(g) = \int f(gh)\, w(g)\, d\mathcal{A}(g) = \int f(g^{-1})\, w(g)\, d\mathcal{A}(g). \tag{21.5.2}$$

Доказательство см., например, в книге Вейля [1932, гл. III, § 12].

Упражнения

1. Покажите, что любая матрица g в $SU(2)$ может быть записана в виде

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix},$$

где a и b — комплексные числа, подчиненные единственному условию $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Поэтому если $a = x_1 + ix_2$ и $b = x_3 + ix_4$, то многообразие S группы $SU(2)$ гомеоморфно трехмерной сфере S^3, т. е. единичной сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ в $\mathbb{R}^4$.

2. Покажите, что левая трансляция $g \longrightarrow hg$ в $SU(2)$, где h — фиксированный элемент группы, индуцирует вращение сферы S^3 вокруг ее центра и, следовательно, покажите, что если $d\mathcal{A}(g)$ — элемент трехмерной площади на S^3, то в качестве весовой функции $w(g)$ в (21.5.2) можно взять константу и интеграл $\int f(g)\, d\mathcal{A}(g)$ будет инвариантным относительно левых (также и правых) трансляций в указанной группе.

3. Пусть числа a и b из упражнения 1 записаны в виде

$$a = \cos(\beta/2) \exp[i(\alpha+\gamma)/2], \quad b = i \sin(\beta/2) \exp[i(\alpha-\gamma)/2],$$

где

$$0 \leqslant \alpha < 2\pi, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, \quad -2\pi \leqslant \gamma < 2\pi;$$

тогда g записывается как $g(\alpha, \beta, \gamma)$ и переменные α, β, γ называются *углами Эйлера* вращения g. [Благодаря гомоморфизму группы $SU(2)$ на $SO(3)$, установленному в § 19.7, эти углы станут углами Эйлера для вращения $R(g)$ в случае, когда γ ограничен интервалом $0 \leqslant \gamma < 2\pi$; отметим, что замена γ на $\gamma + 2\pi$ приводит к замене g на $-g$, но оставляет неизменным $R(g)$.] Покажите, что если углы Эйлера взять в качестве внутренних координат в группе $SU(2)$, то элемент площади на S^3 имеет вид

$$d\mathcal{A}(g) = {}^1/_8 \sin\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

4. Покажите, что

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = g(\alpha, 0, 0)\, g(0, \beta, 0)\, g(0, 0, \gamma). \tag{21.5.3}$$

5. Обозначив $R(g(\alpha, \beta, \gamma))$ через $R(\alpha, \beta, \gamma)$, покажите, что благодаря гомоморфизму группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$ (§ 19.7) вращение $R(\alpha, 0, 0)$ совпадает с вращением $R(0, 0, \alpha)$ и является вращением на угол α вокруг оси z, тогда как $R(0, \beta, 0)$ является вращением на угол β вокруг оси x. Дайте геометрическую интерпретацию результата упражнения 4 как закона композиции произвольного вращения из последовательных вращений вокруг осей z, x и z соответственно.

6. Выведите формулу для площади A_n n-мерной сферы (единичной сферы в пространстве E^{n+1}) из очевидного равенства

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \right)^{n+1} = \int_0^{\infty} e^{-r^2} A_n r^n\, dr,$$

используя для этого гамма-функцию, и проверьте непосредственно, что формула в упражнении 3 нормирована правильно. На основе $(2 \longrightarrow 1)$-гомоморфизма группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$ установите, что (трехмерная) площадь этой поверхности, которая рассматривается как многообразие группы $SO(3)$ (см. § 19.5), равна π^2. Покажите, что объем n-мерного шара радиуса R есть

$$V_n = [2\pi^{n/2}/(n\Gamma(n/2))]\, R^n.$$

Система тессеральных гармоник $\{Y_l^m\}$ не единственная ортогональная система функций, которая появляется из представлений группы $SO(3)$. Тессеральные гармоники ортогональны на единичной двумерной сфере, которая взята в качестве однородного пространства для представления. Однако, как было указано в

§ 20.8, многообразие группы тоже может служить однородным пространством; в таком случае возникает более широкий класс ортогональных функций, а именно функции от углов Эйлера α, β, γ, которые можно рассматривать как внутренние координаты в $SO(3)$. Приведенная ниже теорема будет иметь дело с такими общими системами функций.

Для дальнейшего нам привычнее будет обозначать выражение $w(g)dA(g)$, которое появляется в левоинвариантном интегрировании по многообразию группы, просто через dg и записать равенство (21.5.1) в виде

$$\int_G f(hg)\,dg = \int_G f(g)\,dg. \tag{21.5.4}$$

Обозначим через $C_0(G)$ пространство непрерывных функций с компактным носителем на многообразии группы, или, как говорят, на группе G (если G сама компактна, то данное пространство включает все непрерывные функции на G). В таком случае $\int_G f(g)\,dg$, $f \in C_0(G)$, является непрерывным линейным функционалом на $C_0(G)$ и является мерой (см. гл. 13). Поэтому иногда говорят о *левоинвариантной мере* на G, или о *мере Хаара*, поскольку она рассматривалась в статье Хаара [1933].

Пусть $L^2(G)$ обозначает гильбертово пространство квадратично интегрируемых распределений, определенных на многообразии группы, со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \int_G \overline{f_1(g)}\, f_2(g)\,dg, \tag{21.5.5}$$

где, как и выше, dg — левоинвариантная мера (G не обязательно компактна). *Левым регулярным представлением* группы G называется соответствие каждому h из G отображения

$$\rho(h)\colon\ f(g) \to f(h^{-1}g) \tag{21.5.6}$$

пространства $L^2(G)$ на себя. (Аналогично правоинвариантный интеграл приводит к *правому регулярному представлению*.) Так как скалярное произведение основывается на левоинвариантном интеграле, видно, что

$$(\rho(h) f_1, \rho(h) f_2) = \int_G \overline{f_1(h^{-1}g)}\, f_2(h^{-1}g)\,dg = \int_G \overline{f_1(g)}\, f_2(g)\,dg =$$
$$= (f_1, f_2) \quad \text{для всех} \quad f_1, f_2 \text{ из } L^2 \text{ и всех } h \in G;$$

иначе говоря, это представление ρ унитарно.

Можно доказать, что в случае компактной группы G все неприводимые представления получаются путем разложения (левого или правого) регулярного представления ρ. Это значит, что если ρ_1— любое неприводимое представление, то существует в $L^2(G)$ такое подпространство X_1, что сужение ρ на X_1 эквивалентно ρ_1.

Часто даже для некомпактной группы G можно найти неприводимые представления, используя операторы, представленные в (21.5.6), на *некотором* пространстве функций, определенных на группе, но при этом для нахождения таких функций может возникнуть необходимость выйти за пределы гильбертова пространства $L^2(G)$. Мы не будем рассматривать этот общий случай, а лишь приведем один пример: в § 21.10 функции, которые появятся в связи с неприводимыми представлениями некомпактной группы M_2 движений в плоскости, не являются квадратично интегрируемыми на G.

Вычислим теперь весовую функцию $w(g)$. Допустим, что $\theta_1, \ldots, \theta_n$— внутренние координаты на многообразии группы G, и мы хотим найти весовую функцию $w(\theta)$, такую, что $w(\theta)d\theta_1 \ldots d\theta_n$ является элементом инвариантной меры dg.

Перепишем равенство (21.5.4) как

$$\mathcal{I} = \int_G f(hg')\,dg' = \int_G f(g)\,dg.$$

Мы рассмотрим случай, когда функция $f(g)$ равна нулю всюду, кроме элементов g, находящихся в малой окрестности $\mathcal{N}$ единичного элемента группы, причем $f(g) = 1$ для этих элементов. Соответствующие им точки заполняют малый объем V в координатном пространстве вблизи $\theta = 0$; поэтому в правой части вышеприведенного равенства мы получим $\mathcal{I} \approx Vw(0)$. Отличные от нуля значения в левой части обязаны своим появлением элементам группы hg' из окрестности $\mathcal{N}$ единицы и, значит, элементам g' из окрестности элемента h^{-1}, имеющей объем V', так что $\mathcal{I} \approx V'w(h^{-1})$; следовательно, чтобы определить $w(h^{-1})$, нам нужно знать V'. Пусть $g' = h^{-1}k$, где k меняется в $\mathcal{N}$. Обозначим через $\hat\theta(g)$ координаты любого элемента группы g. Таким образом, обозначив через θ и θ' координаты k и $g' = h^{-1}k$, имеем

$$\theta = \hat\theta(k), \quad \theta' = \hat\theta(h^{-1}k) = \theta'(\theta).$$

Когда θ изменяется в объеме V, θ' пробегает объем V'; поэтому, используя якобиан, V' можно выразить так:

$$V' \approx \partial(\theta_1', \ldots, \theta_n')/\partial(\theta_1, \ldots, \theta_n)\,|_0\, V,$$

где индекс 0 указывает на то, что якобиан берется при $\theta = 0$. Итак, мы заключаем, что

$$w(\hat\theta(h^{-1})) = C\left[\partial(\theta_1', \ldots, \theta_n')/\partial(\theta_1, \ldots, \theta_n)\,|_0\right]^{-1}, \qquad (21.5.7)$$

причем $C = w(0)$. В силу произвольности h также произволен и h^{-1}; следовательно, данное выражение определяет $w(\theta)$ для всех θ.

В случае компактной группы G константу C можно выбрать так, чтобы $\int\limits_G dg = 1$.

Упражнение

7. Пусть G — группа вращений $SO(3)$, θ_x, θ_y, θ_z — внутренние координаты, введенные в § 19.6, а θ — вектор с компонентами θ_x, θ_y, θ_z. Пусть, в частности, θ представляет элемент группы k в вышеприведенном рассмотрении, причем $\|\theta\| \ll 1$, а θ' представляет $h^{-1}k$. С точностью до величин первого порядка малости [см. (19.6.1)]

$$k = \begin{pmatrix} 1 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 1 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $w(h^{-1})$ не зависит от направления оси вращения, в качестве h^{-1} можно взять вращение на угол α вокруг оси x, т. е. можно положить

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Покажите, что координаты θ'_x, θ'_y, θ'_z элемента $h^{-1}k$ с точностью до первого порядка малости имеют вид

$$\theta'_x = \alpha + \theta_x, \quad \theta'_y = \alpha\left[\theta_y \frac{1+\cos\alpha}{2\sin\alpha} - \frac{\theta_z}{2}\right], \quad \theta'_z = \alpha\left[\theta_z \frac{1+\cos\alpha}{2\sin\alpha} + \frac{\theta_y}{2}\right],$$

откуда якобиан равен

$$\partial(\theta'_x, \theta'_y, \theta'_z)/\partial(\theta_x, \theta_y, \theta_z)\big|_{\theta=0} = \alpha^2/[2(1-\cos\alpha)], \tag{21.5.8}$$

и, следовательно, нормированная весовая функция задается как

$$w(\theta') = (1-\cos\alpha)/(4\pi^2\alpha^2), \quad \alpha = \|\theta'\|. \tag{21.5.9}$$

Указание. Для заданной матрицы вращения угол вращения и направление оси даются формулами (19.2.7) и (19.2.8).

21.6. ПОЛНАЯ СИСТЕМА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ

Мы пришли к одной из важнейших теорем о компактных группах.

Теорема. *Пусть ρ^k $(k = 1, 2, \ldots)$ — полный набор неэквивалентных неприводимых унитарных представлений компактной группы G; пусть d_k — размерность ρ^k, а $\rho^k_{mn}(g)$ — матричные элементы преобразования $\rho^k(g)$. Тогда функции*

$$\sqrt{d_k}\,\rho^k_{mn}(g), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 1 \leqslant m, n \leqslant d_k,$$

образуют полную ортонормированную систему на G относительно скалярного произведения, основанного на инвариантном интегрировании по G.

Замечания. (1) Напомним, что на компактных группах лево- и правоинвариантное интегрирования совпадают. (2) Предполагается, что $\int_G dg = 1$. (3) Предполагается, что матричные элементы относятся к ортонормированной системе векторов, так что матрицы $(\rho^k_{mn}(g))$ унитарных преобразований $\rho^k(g)$ унитарны.

Доказательство теоремы см. в книге Виленкина [1965]. С ортонормированностью этих функций дело обстоит просто, а вот их полнота представляет собой более глубокий факт, который был доказан Петером и Вейлем [1927].

Для $G=SO(3)$ теорема гласит, что функции

$$\sqrt{2l+1}\, e^{im'\alpha} P^l_{m'm}(\cos\beta)\, e^{-im\gamma}, \quad l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad -l \leqslant m', m \leqslant l,$$

образуют полную ортонормированную систему на многообразии группы $SO(3)$ относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f_1(\alpha, \beta, \gamma)}\, f_2(\alpha, \beta, \gamma) \sin\beta \, d\alpha\, d\beta\, d\gamma;$$

см. (20.12.2) и упражнение 3 в предыдущем параграфе.

Разложение функций из $L^2(G)$ в (обобщенный) ряд Фурье по функциям, описанным в приведенной теореме, называется гармоническим анализом на группе. Гармонический анализ на некомпактных группах включает обобщенные интегралы Фурье; см., например, книгу Гельфанда, Граева и Виленкина [1962] по поводу гармонического анализа на $SL(2, \mathbb{C})$ и книгу Уорнера [1972] по поводу гармонического анализа на полупростых группах Ли.

Аналогичная теорема справедлива при некоторых условиях для функций, полученных на других однородных пространствах с надлежащим образом выбранным скалярным произведением; см. книгу Виленкина [1965, разд. 4.5 гл. 1]. Примером служит факт, уже установленный нами и состоящий в том, что функции $Y_l^m(\theta, \varphi)$ образуют полную ортонормированную систему на единичной двумерной сфере.

21.7. ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА КАК КОНФИГУРАЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА В ФИЗИКЕ

Физические соображения часто указывают на то, какой выбор однородного пространства следует сделать, чтобы получить функции для заданной группы симметрии, представляющие интерес для рассматриваемой задачи. Для квантовомеханического движения в центральном силовом поле координатами являются r, θ, φ; поскольку имеются лишь две угловые переменные, то подходящим однородным пространством будет двумерная сфера. Этот выбор приводит к функциям $Y_l^m(\theta, \varphi)$, которые, таким образом, можно взять для представления угловой зависимости волновой функции. С другой стороны, для описания движения твердого тела около его центра масс существуют три угловые переменные, а именно углы Эйлера α, β, γ, и в качестве конфигурационного пространства можно рассматривать многообразие группы $SO(3)$. Зоммерфельд [1929] показал, что квантовомеханическая задача о движении симметричного волчка (твердого тела с двумя равными моментами инерции), которая представляет интерес для теории молекулярных спектров, может быть решена путем использования многочленов Якоби. Конечно, в качестве волновых функций симметричного волчка можно взять и функции (20.12.2).

21.8. ГРУППА M_2 И РОДСТВЕННЫЕ ГРУППЫ

Движение в вещественном n-мерном пространстве V^n состоит из вращения $\mathbf{x} \to R\mathbf{x}$ $[R \in SO(n)]$, за которым следует трансляция[1]) $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}$, где $\boldsymbol{\xi}$ — постоянный вектор. (Можно получить тот же результат и в том случае, когда данное вращение *следует за* трансляцией $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}_1$, взяв $\boldsymbol{\xi}_1 = R^{-1}\boldsymbol{\xi}$.) *Замечание.* Слова «вращение» и «движение» могут ввести в заблуждение, поскольку здесь ничто не зависит от времени t. Вращение является просто фиксированным изменением ориентации, а трансляция является лишь фиксированным смещением.

Связи между некоторыми группами, представляющими интерес для физики, выглядят так:

$$\begin{tikzcd} SO(2) \arrow[r] \arrow[dr] & SO(3) \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{L}_p \arrow[dr] & \\ & M_2 \arrow[r] & M_3 \arrow[r] & \mathscr{P}_p, \end{tikzcd}$$

где стрелка ведет от подгруппы к включающей ее группе, $\mathscr{P}_p$ обозначает собственную группу Пуанкаре (состоящую из комбинаций собственных преобразований Лоренца со смещениями в пространстве и времени). Группы, включающие пространственную инверсию и обращение времени, также представляют интерес, но они сильно усложнили бы приведенную диаграмму. Группу M_2 мы подробнее рассмотрим далее в данной главе.

Элемент группы M_2 есть отображение $g = g_{\xi, \eta, \theta}$ плоскости x, y на себя, задаваемое следующим образом:

$$g\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta + \xi \\ x\sin\theta + y\cos\theta + \eta \end{pmatrix}. \qquad (21.8.1)$$

Замечание. В теории групп вообще и в частности при определении «представления» под «линейным преобразованием» понимают

[1]) Часто говорят: параллельный перенос или сдвиг на вектор $\boldsymbol{\xi}$. — *Прим. перев.*

однородное преобразование; поэтому (21.8.1) будем называть просто «отображением». Нетрудно проверить, что трехмерное точное представление группы M_2 задается соответствием

$$g \leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \xi \\ \sin\theta & \cos\theta & \eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21.8.2}$$

Упражнение

Проверьте, что в этом случае композиции g_2g_1 двух отображений вида (21.8.1) ставится в соответствие произведение соответствующих матриц вида (21.8.2).

21.9. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ M_2

Чтобы найти другие представления, допустим, что X^∞ обозначает пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $f(x, y)$, определенных для всех x и y. Очевидно, плоскость является однородным пространством для M_2. Представление группы M_2 на X^∞ получается путем преобразования каждой функции $f(x, y)$ в функцию

$$\begin{aligned}(\rho(g)f)(x, y) = f([x-\xi]\cos\theta + [y-\eta]\sin\theta, \\ -[x-\xi]\sin\theta + [y-\eta]\cos\theta)\end{aligned} \tag{21.9.1}$$

согласно правилу (20.6.1). Три оператора L_1, L_2, L_3 («инфинитезимальные операторы») определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}(L_1f)(x, y) &= \partial(\rho(g)f)(x, y)/\partial\xi\,|_{\xi=\eta=\theta=0}, \\ (L_2f)(x, y) &= \partial(\rho(g)f)(x, y)/\partial\eta\,|_{\xi=\eta=\theta=0}, \\ (L_3f)(x, y) &= \partial(\rho(g)f)(x, y)/\partial\theta\,|_{\xi=\eta=\theta=0}.\end{aligned} \tag{21.9.2}$$

Из (21.9.1) следует, что

$$L_1 = -\partial/\partial x, \quad L_2 = -\partial/\partial y, \quad L_3 = y\partial/\partial x - x\partial/\partial y. \tag{21.9.3}$$

Если r и φ — полярные координаты в плоскости x, y, а L^+ и L^- определяются соответственно как L_1+iL_2 и L_1-iL_2, то мы обнаруживаем, что

$$\begin{aligned}L_3 = -\partial/\partial\varphi, \quad L^\pm = e^{\pm i\varphi}(\partial/\partial r \pm (i/r)\,\partial/\partial\varphi), \\ L^+L^- = L^-L^+ = \nabla^2.\end{aligned} \tag{21.9.4}$$

21.10. НЕКОТОРЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Представление (21.9.1) в высокой степени приводимо, и мы постараемся найти инвариантное подпространство X_1 пространства X^∞, которое было бы столь мало в некотором смысле, сколь это возможно. Подпространство X_1 должно преобразовываться само в себя при действии каждого из операторов L_1, L_2, L_3. При помощи ряда

Фурье относительно φ любую функцию $f \in X^\infty$ можно разложить по функциям

$$\psi_m(x, y) = i^{-m} e^{im\varphi} g_m(r), \tag{21.10.1}$$

где g_m — некоторая функция на $(0, \infty)$ из класса C^∞. Причина, по которой взят множитель i^{-m}, скоро будет ясна. При действии оператора L_3 любая функция ψ_m преобразуется в кратную самой себе функцию; мы хотим начать с одной из таких функций ψ_m и выяснить, какой же наименьший набор дополнительных функций следует взять для получения инвариантного подпространства.

Из (21.9.4) видно, что $L^+\psi_m$ имеет вид $e^{i(m+1)\varphi} h(r)$; следовательно, $L^-L^+\psi_m$ имеет вид $e^{im\varphi}\tilde{g}(r)$. Для получения наименьшего возможного инвариантного подпространства X_1 теперь *допускается*, что $\tilde{g}(r)$ равна $g_m(r)$, умноженной на постоянную, скажем на $-\alpha_m^2$, и мы исследуем, может ли в действительности g_m быть выбрана так, что это допущение будет справедливым. Итак, мы хотим выбрать $g_m(r)$ так, чтобы

$$L^+\psi_m = i\alpha_m\psi_{m+1}, \quad L^-\psi_{m+1} = i\alpha_m\psi_m. \tag{21.10.2}$$

Таким образом порождается последовательность функций $\{\psi_m\}_{-\infty}^{\infty}$ в предположении, что ни одна из постоянных α_m не обращается в нуль; но ни одна из них и не может обратиться в нуль (разве только все вместе), поскольку L^+ и L^- коммутируют, из чего следует, что $\alpha_m^2 = \alpha_{m-1}^2$; поэтому все эти постоянные можно взять равными. Тогда из (21.9.4) видно, что

$$\nabla^2\psi_m = -\alpha^2\psi_m \tag{21.10.3}$$

для всех m. Отсюда вытекает, что $g_m(r)$ будет пропорциональна функции Бесселя $J_m(\alpha r)$; функции Бесселя будут рассмотрены в следующем параграфе.

Заключение. X_1 является подпространством пространства X^∞, состоящим из решений уравнения $\nabla^2\psi + \alpha^2\psi = 0$ (которые не имеют особенностей); обозначим такое подпространство через X_α. Таким образом любое отличное от нуля значение α приводит к неприводимому представлению группы M_2. При преобразовании $\mathbf{x} \to \mu\mathbf{x}$ для вещественного μ ∇^2 переходит в $\mu^{-2}\nabla^2$; поэтому без ограничения общности мы можем допустить, что $|\alpha| = 1$. Более того, α и $-\alpha$ определяют одно и то же подпространство; следовательно, в качестве значений α разумно взять $e^{i\beta}$, где $0 \leqslant \beta < \pi$. Для каждого такого α представление группы M_2 на X_α задается преобразованиями (21.9.1).

21.11. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Нормируем систему функций $\{\psi_m\}_{-\infty}^{\infty}$, положив $\psi_0(0, 0)=1$. Тогда для каждого m *функция Бесселя порядка* m может быть определена как $J_m(z)=g_m(z/\alpha)$, так что (21.10.1) принимает вид

$$\psi_m(x, y)=i^{-m}e^{im\varphi}J_m(\alpha r).$$

Тогда (21.10.2) переходят в уравнения

$$\begin{aligned}(d/dz-m/z)\,J_m(z)&=-J_{m+1}(z),\\ (d/dz+(m+1)/z)\,J_{m+1}(z)&=J_m(z),\end{aligned} \tag{21.11.1}$$

которые являются рекуррентными соотношениями для функций Бесселя. Исключение $J_{m+1}(z)$ дает

$$(d^2/dz^2+(1/z)\,d/dz+1-m^2/z^2)\,J_m(z)=0, \tag{21.11.2}$$

а это есть дифференциальное уравнение Бесселя.

Функции Бесселя $J_m(z)$ полностью определяются этим уравнением и начальными условиями $J_0(0)=1$ и $J_m(0)=0$ для $m\neq 0$. Для дальнейшего предполагается знакомство с этими функциями и, в частности, с их интегральным представлением

$$J_m(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\sin t+imt}\,dt. \tag{21.11.3}$$

21.12. МАТРИЦЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Для некоторых целей бывает предпочтительней иметь преобразования, представленные (бесконечными) матрицами; матричные элементы можно получить следующим образом. Пусть α—вектор, компонентами (вообще говоря, комплексными) которого являются $\alpha\cos\chi$ и $\alpha\sin\chi$, где параметр α такой же, как в § 21.10, а χ—вещественный угол. Тогда приведенное волновое уравнение $\nabla^2 u+\alpha^2 u=0$ имеет решение

$$e^{i\alpha r\cos(\varphi-\chi)} \tag{21.12.1}$$

(как и прежде, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$), а общее решение есть

$$f(r, \varphi)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\alpha r\cos(\varphi-\chi)}\hat f(\chi)\,d\chi, \tag{21.12.2}$$

где $\hat f$—произвольная функция из некоторого класса допустимых функций, точные свойства которых здесь неважны. [Если α вещественно и если $f(r, \varphi)$ интерпретировать как волновую функцию, то $\alpha\cos\chi$ и $\alpha\sin\chi$ суть импульсные переменные, а $\hat f(\chi)$ тесно связана с импульсным представлением функции $f(r, \varphi)$.] Если плоскую волну $\exp\{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x}\}$ подвергнуть преобразованию (21.9.1), то она переходит в $\exp\{i\alpha\cdot(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})_\theta\}$, где индекс θ указывает на то, что векторы $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\xi}$ повернуты (против часовой стрелки) на угол θ. Если компоненты смещения записать в виде $\xi=\zeta\cos\omega$, $\eta=\zeta\sin\omega$, то из (21.9.1) будет следовать, что

$$(\rho(g)f)(r,\ \varphi)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\alpha r\cos(\varphi-\chi)}\hat{f}'(\chi)\,d\chi,$$

где

$$\hat{f}'(\chi)=e^{-i\alpha\zeta\cos(\omega-\chi)}\hat{f}(\chi+\theta) \qquad (21.12.3)$$

(штрих не связан с дифференцированием); в интеграле проведена замена переменной $\chi-\theta\to\chi$ без изменения пределов, поскольку подынтегральная функция имеет период 2π. Следовательно, элемент g группы M_2, состоящий из вращения на θ по часовой стрелке, за которым следует трансляция на вектор $\boldsymbol{\xi}$, индуцирует преобразование (21.12.3) в пространстве функций $\hat{f}$, имеющих период 2π. Теперь, разлагая $\hat{f}(\chi)$ и $\hat{f}'(\chi)$ в ряды Фурье $\sum\limits_m c_m e^{im\chi}$ и $\sum\limits_m c'_m e^{im\chi}$ соответственно, мы найдем, что

$$c'_m=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\rho}_{mn}c_n,$$

где

$$\hat{\rho}_{mn}=\hat{\rho}^{\alpha}_{mn}(g)=e^{im\theta}e^{i(m-n)(\omega-\pi/2)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\alpha\zeta\sin t+i(m-n)t}\,dt=$$

$$=e^{im\theta}e^{i(m-n)(\omega-\pi/2)}J_{m-n}(\alpha\zeta) \qquad (21.12.4)$$

и где было использовано (21.11.3). Видно, что функции Бесселя появляются не только при определении инвариантных подпространств пространства X^∞, но и в зависимости матричных элементов $\hat{\rho}_{mn}$ от параметров ξ, η, θ или ζ, ω, θ, характеризующих элементы группы M_2.

Аналогичным образом можно получить неприводимые представления группы M_3 движений в евклидовом пространстве E^3, принимая E^3 в качестве однородного пространства. Обозначим через X_α пространство всех функций $u(x,\ y,\ z)$, которые удовлетворяют трехмерному приведенному волновому уравнению $\nabla^2u+\alpha^2u=0$ с фиксированной постоянной α во всем пространстве E^3. Тогда представление группы M_3 на X_α, задаваемое при помощи соответствия каждому g из M_3 преобразования

$$\rho(g)\colon\ u(\mathbf{x})\to u(g^{-1}\mathbf{x}) \qquad (21.12.5)$$

пространства X_α на себя, является неприводимым. Рассматривая инфинитезимальные операторы этого представления, можно найти в X_α базис, состоящий из функций

$$Y_l^m(\theta, \varphi)\, r^{-1/2} J_{l+1/2}(\alpha r), \quad l=0, 1, 2, \ldots, \quad m=-l, -l+1, \ldots, l. \tag{21.12.6}$$

Поэтому происхождение так называемых сферических функций Бесселя

$$j_l(z) = \sqrt{\pi/(2z)}\, J_{l+1/2}(z) \tag{21.12.7}$$

связано с неприводимыми представлениями группы M_3.

Представления группы M_n рассматриваются в книге Виленкина [1965].

В противоположность неприводимым представлениям компактных групп, которые являются конечномерными и зависят от дискретного параметра [например, $l=0, 1, 2, \ldots$ для $SO(3)$], неприводимые представления групп движений бесконечномерны и зависят от непрерывного параметра α.

Неприводимые представления групп Лоренца бывают двух видов: конечномерные, которые зависят от дискретного параметра, и бесконечномерные, которые зависят от непрерывного параметра. Первые получаются из конечномерных представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ (см. следующую главу) и появляются в релятивистской квантовой механике многих частиц. И те и другие представления нужны для полной совокупности неприводимых представлений; поэтому следует ожидать, что бесконечномерные представления могут также играть определенную роль в физике.

21.13. ХАРАКТЕРЫ

Понятие *характера* $\chi(g)$ представления играет в теории представлений чрезвычайно важную роль. Для компактных групп это ключ к установлению полноты системы неприводимых представлений, а значит, к решению вопроса о том, все ли представления найдены. Если ρ — представление на конечномерном пространстве X^n, так что $\rho(g)$ являются матрицами с элементами $\rho_{jk}(g)$, то $\chi(g) = \operatorname{tr} \rho(g) = \sum_{j=1}^{n} \rho_{jj}(g)$. Следовательно, χ есть скалярнозначная функция на группе G. В случае компактной группы G характеры χ^1 и χ^2 двух неэквивалентных неприводимых представлений ортогональны относительно скалярного произведения (21.5.5):

$$\int_G \overline{\chi^1(g)}\, \chi^2(g)\, dg = 0, \tag{21.13.1}$$

а для эквивалентных представлений $\chi^1(g) \equiv \chi^2(g)$. Кроме того,

$$\int_G |\chi(g)|^2\, dg = 1 \tag{21.13.2}$$

для любого неприводимого представления в том случае, когда мера Хаара нормирована так, что мера (объем) всей группы равна 1.

Характер $\chi(g)$ зависит только от класса сопряженности группового элемента g, т. е. $\chi(g)=\chi(hgh^{-1})$ для всех g и всех h. Совокупность всех характеров χ^i неприводимых представлений компактной группы образует полную систему функций для разложения функций $f(g)$, зависящих только от класса сопряженности элементов g.

В группе вращений $SO(3)$ все вращения на заданный угол ω независимо от направления оси вращения принадлежат одному и тому же классу сопряженных элементов; отсюда следует, что характеры являются функциями лишь угла ω. Классическое доказательство полноты системы неприводимых представлений $\rho^l(l=0, 1, 2, \ldots)$, о которой говорилось в конце § 20.9, состоит в демонстрации того, что соответствующие характеры $\chi^l(g)$ образуют полную систему функций для разложения функций угла ω (см. книгу Вигнера [1931]). Тогда, поскольку не существует ненулевой функции от ω, которая была бы ортогональна всем $\chi^l(g)$, не существует и неприводимого представления, неэквивалентного всем ρ^l.

Упражнения

1. Покажите, что если конечномерные представления ρ^1 и ρ^2 эквивалентны [т. е. если они одинаковой размерности и существует такая матрица $A \neq 0$, что $A\rho^1(g)=\rho^2(g)A$ для всех g], то $\chi^1(g)\equiv\chi^2(g)$.

2. Покажите, что два вращения g_1 и g_2 на заданный угол ω, но вокруг различных осей являются сопряженными, т. е. что существует такое вращение h, что $g_1=hg_2h^{-1}$.

3. Покажите, что характеры неприводимых представлений ρ^l группы $SO(3)$ имеют вид $\chi^l=\sin(l+1/2)\alpha/\sin(\alpha/2)$ $(l=0, 1, \ldots)$ и что они удовлетворяют соотношению ортогональности (21.13.1), где $dg=[(1-\cos\alpha)/(4\pi^2\alpha^2)]\,d^3\theta$ в соответствии с упражнением 7 из § 21.5. *Указание*. Достаточно рассмотреть вращение вокруг оси z, для которого матрицы $\rho^l(g)$ диагональны; см. (20.12.2) и предшествующее равенство.

Для того чтобы доказать полноту системы характеров χ^l для $SO(3)$, нам нужно показать, что если $\psi(\alpha)$—любая непрерывная функция, причем $(\chi^l, \psi)=0$ для всех l, то $\psi(\alpha)\equiv 0$. Так как $1-\cos\alpha=2(\sin(\alpha/2))^2$ и $d^3\theta=4\pi\alpha^2\,d\alpha$, то равносильно показать, что если

$$2\int_0^{\pi}\sin(l+1/2)\alpha\sin(\alpha/2)\,\psi(\alpha)\,d\alpha=0$$

для всех l, то $\psi(\alpha)\equiv 0$. Введя обозначения $\alpha/2=t$ и $\sin(\alpha/2)\psi(\alpha)=\chi(t)$, получим эквивалентное утверждение, которое нужно доказать: если

$$\int_0^{\pi/2}\chi(t)\sin(2l+1)\,t\,dt=0$$

для всех l, то $\chi(t) \equiv 0$. Но это и в самом деле так, ибо если $\chi(t)$ распространить на интервал $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$, потребовав, чтобы она была нечетной функцией относительно $t=0$ и четной относительно $t = \pm\pi/2$, то функции $\sin(2l+1)\,t$ представляют систему функций, достаточную для построения ряда Фурье функции $\chi(t)$. Поскольку характеры χ^l образуют полную систему функций, представления ρ^l $(l=0, 1, 2, \ldots)$ исчерпывают *все* неприводимые представления группы $SO(3)$.

Таким образом, получен ответ на вопрос, который возник в § 20.2, о вращениях декартовых осей координат в трехмерном пространстве: все возможные нерелятивистские законы преобразования физических величин обеспечиваются представлениями ρ^l группы $SO(3)$.