Глава 22

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

Лучевое пространство и лучевые представления в квантовой механике; расширения локальных представлений; эффект двусвязности группы $SO(3)$ и односвязности группы $SU(2)$; двузначные представления; спиноры.

Предварительные сведения: гл. 18—21 и основы квантовой механики.

Цель данной главы — пролить свет на один частный вопрос при использовании теории представлений групп в квантовой механике, а именно на вопрос о появлении двузначных, или спиновых, представлений группы вращений и группы Лоренца.

22.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Мы уже видели, что в классической физике различные системы величин при вращении осей координат преобразуются так, что дают представления группы вращений. (То же самое применимо в классической физике и к другим группам симметрии, таким, как группы движений, группы симметрии кристаллов, группы Лоренца и т. п.)

С другой стороны, в квантовой механике некоторые величины при вращении осей координат преобразуются подобно компонентам спиноров и тем самым дают представления группы $SU(2)$, а не группы вращений $SO(3)$. Это было показано уже Дираком (в несколько иной терминологии) в его статье о релятивистском волновом уравнении (Дирак [1928]), а также подразумевалось в теории Паули об электронном спине, опубликованной годом ранее. В общем случае компоненты спинора при преобразовании группы Лоренца $\mathscr{L}_p$ изменяются таким образом, что дают представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, а не группы $\mathscr{L}_p$. Тогда это казалось несколько неожиданным, хотя Дирак показал, что все наблюдаемые величины преобразуются как скаляры, векторы и тензоры, т. е. согласно представлениям групп $SO(3)$ и $\mathscr{L}_p$. В § 19.7 и 19.8 мы видели, что гомоморфизмы групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ на группы $SO(3)$ и $\mathscr{L}_p$ соответственно являются $(2\to1)$-гомоморфизмами; следовательно, представление первой группы может ставить в соответствие две различные матрицы M и $-M$ каждому элементу g второй группы, т. е. каждому из преобразований пространства-времени. Это соответствие иногда называют *двузначным представлением* второй группы. В настоящей главе рассматривается, как возникают такие представления. Будет показано, что роль групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ заключается в том, чтобы определить так называемые лучевые представления более подходящих с физической точки зрения групп $SO(3)$ и $\mathscr{L}_p$.

Каждому возможному состоянию квантовомеханической системы соответствует не один вектор ψ в гильбертовом пространстве H, а целый луч $\{\alpha\psi\}$, состоящий из всех векторов, скалярно кратных вектору ψ. Если все векторы нормированы ($\|\psi\|=1$, $\|\alpha\psi\|=1$), то α имеет единичный модуль ($|\alpha|=1$), но его аргумент, или фаза ($\arg\alpha$) произволен. Этот произвол, как будет видно, влияет на интерпретацию теории представлений.

22.2. ВРАЩЕНИЯ ОСЕЙ

Можно считать, что состояние некоторой системы в принципе определяется одновременно измеренными значениями $\{a, b, \ldots\}$ полной системы коммутирующих наблюдаемых (самосопряженных операторов) $\{A, B, \ldots\}$. Следовательно, совокупность чисел $\{a, b, \ldots\}$ определяет луч $\{\alpha\psi\}$ в гильбертовом пространстве H. Эти наблюдаемые по существу соответствуют некоторой экспериментальной установке или прибору, которые предназначены для их измерения. Допустим, что вся эта установка переводится в новую ориентацию вращением около некоторой фиксированной точки p, а именно вращением g [элементом группы $SO(3)$]. Это обстоятельство определяет новую систему аналогичных наблюдаемых $\{A', B', \ldots\}$. Теперь данное состояние изучаемой системы соответствует новой совокупности чисел $\{a', b', \ldots\}$, которая порождает новый луч $\{\alpha\psi'\}$ в пространстве H. Иначе говоря, под действием вращения g каждый луч $\{\alpha\psi\}$ отображается в другой луч $\{\alpha\psi'\}$. Эти отображения дают *лучевое представление* группы, которое будет рассмотрено в следующем параграфе.

Предположим, что на каждом луче в H как-то выбран нормированный вектор ψ. Тогда вращение g определяет взаимно однозначное отображение между так выбранными векторами в H. Мы допускаем также как некую аксиому квантовой механики, что эти векторы ψ можно выбрать так, чтобы данное отображение было линейным и, следовательно, могло бы быть определено во всем H благодаря линейности. Поскольку все представляющие векторы ψ были нормированы, данное отображение представляет собой унитарное преобразование U или $U(g)$. Однако это преобразование для данного g не является единственным из-за произвольности фаз представляющих векторов ψ. Эта степень неоднозначности преобразования U описывается следующей леммой, доказательство которой мы оставляем в качестве упражнения.

Лемма. *Пусть U_1 и U_2 — два унитарных преобразования в H, таких, что для любого ψ два преобразованных вектора $U_1\psi$ и $U_2\psi$*

определяют один и тот же луч. Иначе говоря, существует комплекснозначная функция $\beta(\psi)$, *такая, что* $U_1\psi=\beta(\psi)U_2\psi$ *для всех* ψ. *Тогда* $\beta(\psi)=\mathrm{const}=\beta$, *причем* $|\beta|=1$, *т. е.* $U_1=\beta U_2$.

Унитарные преобразования U и βU, где β — константа и $|\beta|=1$, называются *эквивалентными*: $U\cong\beta U$. Мы видели, что каждое вращение g соответствует классу эквивалентности $\{\beta U\colon |\beta|=1\}$ унитарных преобразований, имеющих различные фазы $\arg\beta$.

Предположим теперь, что для каждого элемента g группы $SO(3)$ каким-то образом выбрано единственное унитарное преобразование $U(g)$ из соответствующего класса эквивалентности. Если $\psi'=U(g)\psi$, а $\psi''=U(h)\psi'$, то результирующая матрица преобразования для отображения $\psi\to\psi''$, т. е. $U(h)\,U(g)$, не обязательно равна $U(hg)$, но эквивалентна ($\cong$) этой матрице. Следовательно, для любой пары вращений h, g существует такой фазовый множитель $\gamma(h, g)$, что

$$U(h)\,U(g)=\gamma(h,\ g)\,U(h,\ g), \qquad (22.2.1)$$

где $|\gamma(h, g)|=1$. Позже мы рассмотрим возможности выбора функции $\gamma(h, g)$.

22.3. ЛУЧЕВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Множество S всех лучей называется *лучевым пространством*. Это не обязательно линейное пространство, потому что если r — луч и c — число, то cr, вообще говоря, не определено, а если r_1 и r_2 — два луча, то может быть не определена сумма r_1+r_2. Если опустить требование нормировки, то каждый луч будет представлять собой одномерное подпространство в $\boldsymbol{H}$. С такой точки зрения единственно разумными определениями будут следующие: считать cr тем же лучом, что и r, даже в случае $c\neq 1$, а r_1+r_2 считать *двумерным* подпространством в $\boldsymbol{H}$ и поэтому уже не элементом множества S. Однако каждый элемент множества S соответствует некоторому состоянию данной физической системы, и это соответствие взаимно однозначно. Наиболее естественно принять, что S — топологическое (фактически метрическое) пространство. Если r_1 и r_2 — два луча, то расстояние между ними можно определить как

$$d(r_1,\ r_2)=\inf\{\|\psi_1-\psi_2\|\colon\ \psi_1\in r_1,\ \psi_2\in r_2,\ \|\psi_1\|=\|\psi_2\|=1\}.$$

Физические свойства двух соответствующих состояний (описываемых при помощи математических ожиданий наблюдаемых) близки, когда расстояние между лучами $d(r_1, r_2)$ мало.

Каждое вращение в пространстве (каждое изменение ориентации установки) индуцирует преобразование в S, как описано выше. Оно не является линейным преобразованием, поскольку S не представляет собой линейное пространство, но оно непрерывно по отношению к метрике в S. Отображение элементов группы $SO(3)$ на соответствующие преобразования в пространстве S есть изоморфизм: оно взаимно однозначно, и произведение двух любых элементов из $SO(3)$ отображается на композицию (произведение) соответствующих преобразований в S и т. д. Каждое такое преобразование в S соответствует классу эквивалентности унитарных преобразований в пространстве $\boldsymbol{H}$. В общем случае гомоморфизм группы G на группу классов эквивалентности унитарных преобразований в векторном пространстве V называется *лучевым представлением* группы G на V. Как и выше, два унитарных преобразования U_1 и U_2 в V являются *эквивалентными*, если $U_1=\beta U_2$, где β — некоторая константа.

С физической точки зрения лучевые представления группы $SO(3)$ на $\boldsymbol{H}$ являются вполне подходящими выражениями сферической симметрии. Но для вычислительных целей хотелось бы описывать преобразования в пространстве S при помощи более осязаемых объектов, подобных матрицам. Следовательно, возникает задача отбора некоторым подходящим образом *одного* унитарного преобразования $U(g)$ из каждого класса эквивалентности.

Если бы фазы преобразований $U(g)$ можно было выбрать так, чтобы множитель $\gamma(h, g)$ в (22.2.1) был равен единице для всех h и g, то отображение $g \to U(g)$ было бы обычным представлением группы $SO(3)$ на $\boldsymbol{H}$. Но, вообще говоря, этого сделать нельзя; сейчас мы выясним, что же *можно* сделать, но прежде всего ограничим задачу конечномерным случаем.

22.4. КОНЕЧНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Предположим, что физическая система обладает сферической симметрией и что существует дискретное энергетическое состояние конечной кратности n с энергией E. В этом случае соответствующее собственное подпространство оператора энергии является инвариантным подпространством $\boldsymbol{H}_E$ пространства $\boldsymbol{H}$. Тогда лучи в $\boldsymbol{H}_E$ преобразуются при вращениях в другие лучи из $\boldsymbol{H}_E$; следовательно, $\boldsymbol{H}_E$ инвариантно относительно каждого из операторов $U(g)$ и сужение оператора $U(g)$ на $\boldsymbol{H}_E$ может быть представлено для каждого g унитарной матрицей размера $n \times n$, которую мы также будем обозначать просто через $U(g)$. Начиная с этого места наше обсуждение будет ограничиваться конечномерным случаем.

22.5. ЛОКАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Теперь примем вполне оправданное с физической точки зрения допущение, состоящее в том, что фазы унитарных преобразований можно выбрать во всяком случае так, что матричные элементы $U_{ij}(g)$ будут непрерывными функциями от g. Далее пусть θ_x,

θ_y, θ_z — внутренние координаты в $SO(3)$, определенные в § 19.6, а $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}_0$ — множества элементов группы, для которых $\|\theta\| < \pi$ и $\|\theta\| < \pi/2$ соответственно. Хотя многообразие группы в целом двусвязно, области $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}_0$ представляют собой односвязные окрестности единичного элемента. Если g и h принадлежат $\mathcal{N}_0$, то gh принадлежит $\mathcal{N}$. Пусть теперь g, h и gh — матрицы вращения; тогда матричные элементы gh являются непрерывными функциями матричных элементов g и h; следовательно, когда g и h непрерывно меняются в $\mathcal{N}_0$, то gh непрерывно меняется в $\mathcal{N}$.

Теперь будет показано, что фазы описанных выше унитарных матриц $U(g)$ можно выбрать в окрестности $\mathcal{N}$ так, что функция $\gamma(g, h)$ в (22.2.1) равна 1 для всех g и h, принадлежащих $\mathcal{N}_0$. Когда это выполнено, отображение $g \to U(g)$ называется *локальным представлением* группы $SO(3)$ (см. гл. 25). Поскольку $U(g)$ непрерывна в $\mathcal{N}$, то в силу односвязности $\mathcal{N}$ многозначная функция $(\det U(g))^{1/n}$ расщепляется на n независимых непрерывных ветвей в $\mathcal{N}$. Очевидно, $U(e)$ кратна единичной матрице I, и можно записать $U(e) = \beta^n I$, где $|\beta| = 1$. Тогда $(\det U(e))^{1/n}$ есть корень n-й степени из единицы, умноженный на β, и функцию $\alpha(g)$ можно определить как ту ветвь $(\det U(g))^{1/n}$, которая равна β для $g = e$. Теперь мы утверждаем, что если в $\mathcal{N}$ определить новые унитарные матрицы $V(g)$ как

$$V(g) = [1/\alpha(g)]\, U(g), \tag{22.5.1}$$

то

$$V(g)\, V(h) = V(gh) \quad \text{для всех } g, h \text{ в } \mathcal{N}_0. \tag{22.5.2}$$

Чтобы это доказать, заметим, что в любом случае

$$V(g)\, V(h) = \delta(g, h)\, V(gh),$$

где $\delta(g, h)$ — непрерывная функция [ср. с (22.2.1)]. Из (22.5.1) видно, что $\det V(g) = 1$ для всех g, откуда $\delta(g, h)^n = 1$, и, значит, $\delta(g, h)$ является корнем n-й степени из единицы для всех g и h; но $\delta(e, e) = 1$, откуда по непрерывности $\delta(g, h) \equiv 1$, что показывает справедливость (22.5.2).

22.6. ПРОИСХОЖДЕНИЕ ДВУЗНАЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Остается следующий вопрос: в каком случае локальное представление $g \to V(g)$ может быть расширено до представления всей группы $SO(3)$? Если H — группа матриц, порожденная матрицами $V(g)$, когда $g \in \mathcal{N}$, то отображение $g \to V(g)$ есть локальный гомоморфизм группы $SO(3)$ в группу H. Согласно теореме 3 § 25.13, локальный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли H можно расширить до гомоморфизма всей группы G в H, если G односвязна, но в других случаях такого расширения может не быть. Группа $G = SO(3)$, конечно, не является односвязной; однако из отображения $g \to V(g)$

можно построить тоже локальный гомоморфизм группы $SU(2)$ в H, и уже этот гомоморфизм *может* быть расширен, поскольку $SU(2)$ односвязна.

Обозначим через $u \to g(u)$, где $u \in SU(2)$, а $g(u) \in SO(3)$, гомоморфизм группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$, который был описан в § 19.7. Тогда отображение $u \to W(u) \overset{\text{def}}{=} V(g(u))$ есть локальный гомоморфизм группы $SU(2)$ в группу H, определенный для таких значений u, для которых $g(u) \in \mathcal{N}$. Его расширение [которое также будет обозначаться как $u \to W(u)$] является представлением группы $SU(2)$. Далее $u \to g(u)$ есть $(2 \to 1)$-гомоморфизм; в самом деле, $g(-u) = g(u)$; следовательно, два уравнения $g = g(u)$, $W = W(u)$ дают или (1) представление $g \to W$ группы $SO(3)$ [в этом случае $W(u) = W(-u)$], или (2) соответствие двух унитарных матриц размера $n \times n$, скажем $V_1(g)$ и $V_2(g)$ (причем $V_2(g) = -V_1(g)$), каждой матрице вращения g таким образом, что каждое из четырех произведений

$$V_i(g) V_j(h) \quad (ij = 11,\ 12,\ 21,\ 22)$$

равно $V_1(gh)$ или $V_2(gh)$. Это соответствие называется *двузначным представлением* группы $SO(3)$. Очевидно, каждое представление $SU(2)$ определяет двузначное представление и, значит, лучевое представление группы $SO(3)$.

Резюме. Так как квантовомеханические состояния соответствуют лучам в гильбертовом пространстве, а не векторам, вращению g физической системы соответствует не единственное преобразование векторов данного инвариантного подпространства с матрицей $U = U(g)$, а множество унитарных преобразований $\{\alpha U : \text{все } \alpha \in \mathbb{C}, \text{ такие, что } |\alpha| = 1\}$. Было показано, однако, что эти множества столь взаимосвязаны, что подходящим выбором матриц из них можно получить представление группы $SU(2)$. Это может осуществиться одним из двух путей.

1. Оказывается возможным выбрать одну матрицу $U = U(g)$ из каждого множества так, чтобы дать представление $SO(3)$, а значит, и представление $SU(2)$ при помощи гомоморфизмов

$$\underset{(2\times 2)}{SU(2)} \to \underset{(3\times 3)}{SO(3)} \to \underset{(n\times n)}{\{U(g)\}};$$

2. Оказывается необходимым выбрать две матрицы U и $-U$ из каждого множества и поставить их в соответствие двум элементам u и $-u$ группы $SU(2)$, но лишь одному элементу g группы $SO(3)$ таким образом, что эти матрицы образуют обычное представление группы $SU(2)$ и двузначное, или *спиновое*, представление группы $SO(3)$. В гл. 25 будет показано, что других групп, связанных с $SO(3)$ подобно группе $SU(2)$, не существует; следовательно, не существует многозначных представлений, кроме двузначных.

Аналогично для физической системы, которая инвариантна не только относительно группы вращений $SO(3)$, но также и относительно всей собственной группы Лоренца $\mathscr{L}_p$, преобразование волновых функций, соответствующее данному элементу g группы $\mathscr{L}_p$, не является единственным. В этом случае существует множество преобразований $\{\alpha U: |\alpha|=1\}$, соответствующих каждому g, и эти множества столь взаимосвязаны, что можно выбрать из них преобразования так, чтобы дать представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ [которая связана с $\mathscr{L}_p$ таким же образом, как $SU(2)$ связана с $SO(3)$]; это может быть как представлением самой группы $\mathscr{L}_p$, включающим скаляры, векторы или тензоры общего вида, так и двузначным представлением (спиновым представлением) группы $\mathscr{L}_p$. В теории электрона Дирака законы преобразований четырех компонент волновой функции электрона дают двузначное представление группы $\mathscr{L}_p$ (см. книгу Дирака [1958]).

Легко видеть, что двузначное неприводимое представление невозможно сделать однозначным, выбирая каким-либо способом одну из двух матриц U и $-U$, которые представляют каждый данный элемент g из $SO(3)$ (или $\mathscr{L}_p$); в самом деле, если U_0 — матрица, представляющая вращение на угол π в двузначном неприводимом представлении, то можно показать, что $U_0^2=-I$, но U_0^2 представляет единицу группы $SO(3)$, а потому должна быть равна $+I$ в любом однозначном представлении.

22.7. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП $SU(2)$ И $SL(2, \mathbb{C})$

Обсуждение носит гипотетический характер до тех пор, пока не показано, что действительно существуют представления группы $SU(2)$, которые дают двузначные представления группы $SO(3)$. Само собой разумеется, что единичное представление $SU(2)$ таково, но существуют и многие другие. Несколько следующих параграфов посвящено неприводимым представлениям группы $SU(2)$. Все они конечномерны в силу компактности $SU(2)$, тогда как группы $SL(2, \mathbb{C})$ и $\mathscr{L}_p$, которые не являются компактными, имеют также и бесконечномерные неприводимые представления, по поводу которых читатель отсылается к книгам Виленкина [1965], Наймарка [1976] и Сугиуры [1975]. Оказывается, что некоторые *конечномерные* представления группы $SL(2, \mathbb{C})$ остаются неприводимыми, когда сужаются до $SU(2)$; они ведут к обычным и спиновым представлениям группы Лоренца и группы вращений.

Элемент группы $SL(2, \mathbb{C})$ есть унимодулярное преобразование пространства $\mathbb{C}^2$ на себя, задаваемое в виде

$$u=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}: \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta x_2\\ \gamma x_1+\delta x_2\end{pmatrix}, \tag{22.7.1}$$

где $\alpha\delta-\gamma\beta=1$. Матрица обратного преобразования имеет вид

$$u^{-1}=\begin{pmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{pmatrix}.$$

Далее, действие группы на $\mathbb{C}^2$ эффективно (любое преобразование $u\neq e$ перемещает хотя бы одну точку в $\mathbb{C}^2$) и транзитивно (для двух заданных произвольных точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ всегда найдется такой элемент u группы, что $\mathbf{y}=u\mathbf{x}$), т. е. $\mathbb{C}^2$ является однородным пространством для $SL(2, \mathbb{C})$. Поэтому допустим, что X^∞ — пространство всех целых аналитических функций $f(x_1, x_2)$ двух комплексных переменных. Тогда, согласно (20.6.1), бесконечномерное представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ получается путем установления соответствия между элементом u и преобразованием $\rho(u)$ в X^∞ при помощи равенства

$$(\rho(u)f)(x_1, x_2)=f(\delta x_1-\beta x_2, \ -\gamma x_1+\alpha x_2). \tag{22.7.2}$$

Рассмотрим теперь некоторые элементы подгруппы $SU(2)$. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — внутренние координаты в $SO(3)$, определенные в § 19.6, $g_{\omega_1, \omega_2, \omega_3}$ — соответствующая матрица вращения [элемент $SO(3)$], а $\pm u_{\omega_1, \omega_2, \omega_3}$ — элементы $SU(2)$, которые отображаются на $g_{\omega_1, \omega_2, \omega_3}$ при помощи гомоморфизма, описанного в § 19.7. В частности, можно принять

$$\begin{aligned}
u_{\omega,0,0}&=\begin{pmatrix}\cos\omega/2 & -i\sin\omega/2\\ -i\sin\omega/2 & \cos\omega/2\end{pmatrix},\\
u_{0,\omega,0}&=\begin{pmatrix}\cos\omega/2 & -\sin\omega/2\\ \sin\omega/2 & \cos\omega/2\end{pmatrix},\\
u_{0,0,\omega}&=\begin{pmatrix}e^{-i\omega/2} & 0\\ 0 & e^{i\omega/2}\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{22.7.3}$$

потому что непосредственные вычисления с использованием формул § 19.7 показывают, что, согласно (19.6.1), соответствующие преобразования от x, y, z к x', y', z' задаются матрицами

$$\begin{aligned}
g_{\omega,0,0}&=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\omega\\ 0 & \omega & 0\end{pmatrix},\\
g_{0,\omega,0}&=\begin{pmatrix}0 & 0 & \omega\\ 0 & 0 & 0\\ -\omega & 0 & 0\end{pmatrix},\\
g_{0,0,\omega}&=\begin{pmatrix}0 & -\omega & 0\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{22.7.4}$$

Инфинитезимальные элементы группы $SU(2)$ получаются следующим образом:

$$T_1=\frac{\partial}{\partial\omega}u_{\omega,0,0}\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix},$$
$$T_2=\frac{\partial}{\partial\omega}u_{0,\omega,0}\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad (22.7.5)$$
$$T_3=\frac{\partial}{\partial\omega}u_{0,0,\omega}\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}.$$

Соответствующие дифференциальные операторы представления ρ суть

$$L_1=\frac{\partial}{\partial\omega}\rho(u_{\omega,0,0})\Big|_{\omega=0}=\frac{i}{2}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$
$$L_2=\frac{\partial}{\partial\omega}\rho(u_{0,\omega,0})\Big|_{\omega=0}=\frac{1}{2}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \qquad (22.7.6)$$
$$L_3=\frac{\partial}{\partial\omega}\rho(u_{0,0,\omega})\Big|_{\omega=0}=\frac{i}{2}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right).$$

Инфинитезимальные элементы и операторы удовлетворяют соотношениям коммутации

$$[T_i, T_j]=T_k,\quad [L_i, L_j]=L_k \quad (i\,j\,k=1\,2\,3,\ 2\,3\,1,\ 3\,1\,2). \qquad (22.7.7)$$

Отметим попутно, что матрицы в (22.7.5) можно рассматривать также как инфинитезимальные элементы бóльшей (охватывающей) группы $SL(2, \mathbb{C})$ по следующей причине: прежде всего, легко проверить, что матрицы (22.7.3) выражаются через матрицы T_i, а именно

$$u_{\omega,0,0}=\exp(\omega T_1),$$
$$u_{0,\omega,0}=\exp(\omega T_2),\quad u_{0,0,\omega}=\exp(\omega T_3).$$

Методы, изложенные в гл. 25 (экспоненциальное отображение), показывают, что в общем случае

$$u_{\omega_1,\omega_2,\omega_3}=\exp(\omega_1 T_1+\omega_2 T_2+\omega_3 T_3). \qquad (22.7.8)$$

Из (22.7.5) видно, что правая часть последнего выражения имеет вид $\exp(iA)$, где A — общая эрмитова матрица размера 2×2 с нулевым следом. Если теперь допустить, что ω_1, ω_2, ω_3 принимают комплексные значения, то правая часть (22.7.8) имеет вид $\exp B$, где B — совершенно общая матрица размера 2×2 с нулевым следом, но тогда $\exp B$ есть общая матрица размера 2×2 с детерминантом, равным 1, т. е. общий элемент группы $SL(2, \mathbb{C})$.

22.8. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SU(2)$

Для каждого значения 0, $^1/_2$, 1, $^3/_2$, 2, ... индекса l подпространство X^{2l+1} пространства X^∞ определяется как пространство всех однородных многочленов степени $2l$ от x_1 и x_2. Из (22.7.2) следует, что каждый оператор $\rho(u)$ преобразует любой однородный многочлен в другой однородный многочлен той же степени; следовательно, каждое подпространство X^{2l+1} инвариантно относительно $\rho(u)$ не только для всех u из $SU(2)$, но и для всех u из $SL(2, \mathbb{C})$.

Далее будет показано, что представление группы $SU(2)$, заданное в (22.7.2), неприводимо на каждом подпространстве X^{2l+1} (такое представление обозначим через D^l); следовательно, представление группы $SL(2, \mathbb{C})$ на X^{2l+1} тем более неприводимо. Будет показано, что любое подпространство в X^{2l+1} (отличное от подпространства, состоящего лишь из одного нулевого вектора), которое инвариантно относительно $SU(2)$, совпадает *со всем* пространством X^{2l+1}. Это делается при помощи уже знакомого нам метода, использующего операторы поднятия и опускания: любое такое подпространство инвариантно относительно операторов L_1, L_2, L_3 из (22.7.6); а значит, и относительно операторов $L_1 \pm iL_2$.

Одночлены

$$f_m(x_1, x_2) = x_1^{l-m} x_2^{l+m} \quad (m = -l, -l+1, \ldots, l) \qquad (22.8.1)$$

образуют базис в X^{2l+1}; f_m есть собственная функция оператора L_3, соответствующая собственному значению im. Заметим, что в качестве значений m допускаются целые числа и половины нечетных целых чисел в зависимости от того, является l целым или полуцелым. Любая функция g из X^{2l+1} может быть выражена в виде $\sum\limits_m c_m f_m$. С помощью рассуждений, подобных проведенным в § 20.5, устанавливается, что если инвариантное подпространство в X^{2l+1} содержит такую функцию g, то оно содержит в отдельности и все одночлены f_m, при которых $c_m \neq 0$. В самом деле, если данное подпространство включает функцию g, то оно включает и функцию $L_3 g$ (потому что это подпространство инвариантно относительно L_3), а также функцию $P(L_3) g$, где P—любой многочлен, но P можно выбрать так, чтобы исключить из суммы $\sum\limits_m c_m f_m$ все члены, кроме одного (в качестве P можно взять интерполяционный многочлен Лагранжа, который обращается в нуль для всех собственных значений im оператора L_3, кроме одного). Таким образом, инвариантное подпространство содержит хотя бы одну из функций f_m. Но $L_1 + iL_2$ есть оператор опускания, т. е. он преобразует f_m в функцию, кратную f_{m-1}, за исключением f_{-l}, которая преобразуется в нуль; оператор $L_1 - iL_2$ есть оператор поднятия, т. е. он преобразует f_m в функцию, кратную f_{m+1}, за исключением f_l, которая преобразуется в нуль. Следовательно, инвариантное подпространство совпадает со всем X^{2l+1}, что и требовалось доказать

В следующем параграфе будет показано, что D^l ($l=0$, $^1/_2$, 1, $^3/_2$, ...) являются единственными неприводимыми представлениями группы $SU(2)$.

Двузначные представления группы $SO(3)$ возникают следующим образом. Если $u \in SU(2)$, то посредством гомоморфизма $SU(2)$ на $SO(3)$ (см. § 19.7) оба элемента u и $-u$ отображаются на элемент g группы $SO(3)$. Если D^l — одно из найденных выше представлений группы $SU(2)$, то отображение $g \to D^l(\pm u)$ есть однозначное представление $SO(3)$ на X^{2l+1} в случае, когда $D^l(-u) = D^l(u)$, и является двузначным представлением, когда $D^l(-u) \neq D^l(u)$. Необходимо лишь исследовать случай, когда $u = I_2$; тогда $D^l(u) = I_{2l+1}$. (Здесь под I_k понимается единичная матрица размера $k \times k$.) При отображении, определяемом матрицей $-I_2$, координаты x_1 и x_2 переходят в $-x_1$ и $-x_2$; если $2l$ четно, одночлен f_m переходит сам в себя; отсюда $D^l(-I_2) = I_{2l+1}$ и отображение $g \to D^l(\pm u)$ является обычным представлением нечетной размерности $2l+1$, которое описано в § 20.9. Если же $2l$ нечетно, то f_m переходит в $-f_m$; отсюда $D^l(-I_2) = -I_{2l+1}$ и отображение $g \to D^l(\pm u) = \pm D^l(u)$ становится двузначным, или спиновым, представлением четной размерности.

Аналогичным образом указанные выше неприводимые представления группы $SL(2, \mathbb{C})$ [из которых путем сужения получаются неприводимые представления $SU(2)$] приводят к конечномерным обычным и спиновым представлениям группы Лоренца $\mathcal{L}_p$. Однако в этом случае имеются еще и другие неприводимые конечномерные представления группы $SL(2, \mathbb{C})$, которые будут описаны в § 22.11; они также определяют обычные и спиновые представления группы $\mathcal{L}_p$, причем ни одно из них не является унитарным.

22.9. ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ $SU(2)$

Классы сопряженности группы $SU(2)$ легко определить. Прежде всего, матрицы u_1 и u_2 в $SU(2)$ имеют одинаковые собственные значения тогда и только тогда, когда существует такая унитарная матрица u [элемент $SU(2)$], что $u^* u_1 u = u_2$. Поскольку u можно умножить на любое комплексное число с модулем, равным 1, то мы можем без потери общности считать, что $\det u = 1$, и, значит, u принадлежит $SU(2)$. Отсюда следует, что u_1 и u_2 входят в один класс сопряженности группы $SU(2)$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые собственные значения. Поэтому каждый класс сопряженности можно представить матрицей вида

$$u = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix}$$

для некоторого $\alpha \in [0, 2\pi]$. Для такого u оператор $D^l(u)$ просто умножает базисный вектор (22.8.1) на $e^{im\alpha}$; следовательно, $D^l(u)$ — диагональная матрица, следом которой является

$$\chi^l(\alpha) = \sin[(l+1/2)\alpha]/\sin(\alpha/2), \tag{22.9.1}$$

точно так же, как и в случае целого l, согласно упражнению 3 в конце § 21.13. В том параграфе было показано, что функции (22.9.1) при $l=0, {}^1/_2, 1, {}^3/_2, \ldots$ образуют полную систему для разложения функций, зависящих только от классов сопряженности, на многообразии группы $SU(2)$; следовательно, представления D^l исчерпывают неприводимые представления группы $SU(2)$.

22.10. ФУНКЦИИ ОТ z И $\bar{z}$

Введенные в этом параграфе обозначения удобны при рассмотрении представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ и используются во многих разделах математики. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — две вещественные функции класса C^∞ от двух вещественных переменных x и y. Мы запишем $z=x+iy$, $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, так что $f(z)$ есть комплекснозначная функция комплексной переменной z, вообще говоря неаналитическая. В случае когда $f(z)$ — аналитическая функция, ее производная может быть записана в различных видах при использовании уравнений Коши — Римана, а именно

$$f'(z) = \partial(u+iv)/\partial x = -i\partial(u+iv)/\partial y = \partial_z(u+iv),$$

где оператор ∂_z определяется следующим образом:

$$\partial_z = {}^1/_2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y). \tag{22.10.1}$$

Оператор $\partial_{\bar{z}}$ определяется аналогично:

$$\partial_{\bar{z}} = {}^1/_2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y); \tag{22.10.2}$$

следует отметить, что $\partial_{\bar{z}} f(z) \equiv 0$ для аналитической функции $f(z)$ в силу уравнений Коши—Римана. С другой стороны, если $f(z)$ — многочлен (или сходящийся степенной ряд) от $\bar{z}$, то $\partial_z f(z)=0$. Кроме того, операторы (22.10.1) и (22.10.2) являются линейными дифференциальными операторами; следовательно, справедливо обычное правило дифференцирования произведения. Поэтому если f—многочлен (или сходящийся степенной ряд) как от z, так и от $\bar{z}$ [в этом случае обычно пишут $f(z, \bar{z})$, чтобы указать, что эта функция может быть неаналитичной либо по z, либо по $\bar{z}$], то $\bar{z}$ можно полагать постоянной при вычислении ∂_z и z полагать постоянной при вычислении $\partial_{\bar{z}}$. Иначе говоря, z и $\bar{z}$ при дифференцировании можно рассматривать как независимые переменные.

22.11. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $SL(2, \mathbb{C})$

Метод однородных многочленов, использованный в § 22.8 для группы $SU(2)$, можно применить и к группе $SL(2, \mathbb{C})$, но в таком случае возникает новый аспект. При заданном представлении ρ группы G имеется много способов, при помощи которых можно получить другие представления ρ'. Например,

$$\rho'(u) = \overline{\rho(u)} \quad \forall u \in G \tag{22.11.1}$$

[это означает, что каждый матричный элемент $\rho_{mn}(u)$ заменяется комплексно сопряженным], ибо тогда $\rho'(u_1 u_2) = \rho'(u_1)\rho'(u_2)$ и т. д. Другим возможным представлением является

$$\rho'(u) = (\rho(u)^T)^{-1}; \tag{22.11.2}$$

в случае унитарности представления ρ (22.11.2) совпадает с (22.11.1). Если G представляет собой группу матриц, то появляются две новые возможности:

$$\rho'(u) = \rho(\bar{u}), \tag{22.11.3}$$

$$\rho'(u) = \rho((u^T)^{-1}). \tag{22.11.4}$$

Если G — унитарная группа, например $U(n)$ или $SU(n)$, то (22.11.3) и (22.11.4) совпадают, в противном случае эти два представления, вообще говоря, различны.

Сейчас мы покажем, что если G есть $SU(2)$, то представление ρ', заданное в (22.11.3), эквивалентно ρ; следовательно, в этом случае приведенные способы не дают новых представлений; именно поэтому эти способы не использовались в § 22.8. В самом деле, пусть

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

так что для общей матрицы размера 2×2

$$\gamma^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\gamma = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}. \tag{22.11.5}$$

В частности, для любого элемента u из $SU(2)$ $\bar{u} = \gamma^{-1} u \gamma$, что можно установить, записывая u в виде $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$. Тогда, поскольку γ также принадлежит $SU(2)$,

$$\rho'(u) = \rho(\gamma^{-1} u \gamma) = \rho(\gamma)^{-1}\rho(u)\rho(\gamma)$$

для всех u; отсюда вытекает, что ρ и ρ' — эквивалентные представления.

Когда же представления (22.11.3) и (22.11.4) расширяются от $SU(2)$ до $SU(2, \mathbb{C})$ при помощи определений

$$\rho'(m) = \rho(\overline{m}) \tag{22.11.6}$$

и

$$\rho'(m) = \rho((m^T)^{-1}) \tag{22.11.7}$$

для m из $SU(2, \mathbb{C})$, то они перестают быть не только идентичными, но даже эквивалентными. Второе из представлений ρ' эквивалентно ρ, потому что $(m^T)^{-1} = \gamma^{-1} m \gamma$ в силу (22.11.5) с учетом того, что $\det m = 1$. В то же время представление ρ', заданное в (22.11.6), *не является* эквивалентным ρ, так как если бы равенства

$$\rho(\overline{m}) = V^{-1}\rho(m)V \tag{22.11.8}$$

имели место для всех m, то в случае $m \in SU(2)$ для этого матрица V должна была бы совпадать с $\rho(\gamma)$, но тогда (22.11.8) теряло бы смысл для $m \notin SU(2)$, поскольку, вообще говоря, для такого m $\gamma^{-1} m \gamma$ не равно $\overline{m}$.

Таким образом, ясно, что группа $SL(2, \mathbb{C})$ имеет в некотором смысле больше представлений, чем группа $SU(2)$. Для того чтобы их найти, допустим, что X^∞ — множество всех комплексно-значных функций двух комплексных переменных x_1 и x_2, причем эти функции принадлежат классу C^∞ в вещественном смысле, но не являются целыми аналитическими в отличие от рассматривавшихся в § 22.10; мы обозначим эти функции подобно тому, как это делалось в § 22.10, через $f(x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2)$. Вместо (22.7.2) мы имеем

$$\begin{aligned}(\rho(u) f)(x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2) &= \\ = f(\delta x_1 - \beta x_2, \ -\gamma x_1 + \alpha x_2, \ &\overline{\delta}\overline{x}_1 - \overline{\beta}\overline{x}_2, \ -\overline{\gamma}\overline{x}_1 + \overline{\alpha}\overline{x}_2),\end{aligned} \tag{22.11.9}$$

где u есть матрица

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \tag{22.11.10}$$

т. е. произвольная матрица из $SL(2, \mathbb{C})$. Теперь дополнительно к трем матрицам (22.7.3), принадлежащим $SU(2)$, соответствующим вращениям в пространстве и определяющим инфинитезимальные операторы L_1, L_2, L_3 посредством (22.7.6), мы имеем три новые матрицы

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega/2 & \operatorname{sh}\omega/2 \\ \operatorname{sh}\omega/2 & \operatorname{ch}\omega/2 \end{pmatrix} \quad (\omega = \varphi_x), \\ \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\omega/2 & -i\operatorname{sh}\omega/2 \\ i\operatorname{sh}\omega/2 & \operatorname{ch}\omega/2 \end{pmatrix} \quad (\omega = \varphi_y), \\ \begin{pmatrix} e^{\omega/2} & 0 \\ 0 & e^{-\omega/2} \end{pmatrix} \quad (\omega = \varphi_z), \end{gathered} \tag{22.11.11}$$

соответствующие преобразованиям Лоренца и определяющие новые инфинитезимальные операторы K_1, K_2, K_3. Следовательно, инфинитезимальные операторы группы $SL(2, \mathbb{C})$ получаются следующим образом: матрицы (22.7.3) и (22.11.11) подставляются в (22.11.3), каждый оператор $\rho(\overline{u})$ дифференцируется по ω и, наконец, ω полагается равным нулю. Если вспомнить, что при дифференцировании x_1, x_2, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ рассматриваются как независимые переменные (см. следующий параграф), то мы найдем, что

$$\begin{aligned}
L_1 &= -(i/2)(x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}) + (i/2)(\overline{x}_2\partial_{\overline{x}_1} + \overline{x}_1\partial_{\overline{x}_2}),\\
L_2 &= (1/2)(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}) + (1/2)(\overline{x}_2\partial_{\overline{x}_1} - \overline{x}_1\partial_{\overline{x}_2}),\\
L_3 &= -(i/2)(x_1\partial_{x_1} - x_2\partial_{x_2}) + (i/2)(\overline{x}_1\partial_{\overline{x}_1} - \overline{x}_2\partial_{\overline{x}_2}),\\
K_1 &= -(1/2)(x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}) - (1/2)(\overline{x}_2\partial_{\overline{x}_1} + \overline{x}_1\partial_{\overline{x}_2}),\\
K_2 &= (i/2)(x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}) - (i/2)(\overline{x}_2\partial_{\overline{x}_1} - \overline{x}_1\partial_{\overline{x}_2}),\\
K_3 &= -(1/2)(x_1\partial_{x_1} - x_2\partial_{x_2}) - (1/2)(\overline{x}_1\partial_{\overline{x}_1} - \overline{x}_2\partial_{\overline{x}_2}).
\end{aligned} \tag{22.11.12}$$

Полная система соотношений коммутации имеет вид

$$[L_i, L_j] = L_k, \quad [K_i, K_j] = L_k, \quad [K_i, L_j] = -K_k, \quad [K_i, L_i] = 0 \tag{22.11.13}$$
$$(i\,j\,k = 1\,2\,3, \quad 2\,3\,1, \quad 3\,1\,2).$$

Введем, кроме того, операторы

$$L^{\pm} = L_1 \pm iL_2, \quad K^{\pm} = K_1 \pm iK_2. \tag{22.11.14}$$

22.12. НЕПРИВОДИМЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА ПРОСТРАНСТВА X^∞ ДЛЯ ГРУППЫ $SL(2, \mathbb{C})$

В качестве базисных векторов для пространства X^∞ или по крайней мере для множества всех многочленов в X^∞ введем одночлены

$$\psi = \psi_{lml'm'} = (1/C)\, x_1^{l-m} x_2^{l+m} \overline{x}_1^{l'-m'} \overline{x}_2^{l'+m'}, \tag{22.12.1}$$

где

$$C^2 = (l-m)!(l+m)!(l'-m')!(l'+m')!,$$

l и l' — любые два числа из 0, $^1/_2$, 1, $^3/_2$, ..., а

$$m = l,\ l-1,\ \ldots,\ -l, \quad m' = l',\ l'-1,\ \ldots,\ -l'.$$

Для данных l и l' пространство $X(l, l')$, представляющее собой линейную оболочку векторов $\psi_{lml'm'}$, является пространством всех однородных многочленов степени $2l$ от переменных x_1 и x_2 и степени $2l'$ от переменных $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$. Это пространство имеет (комплексную) размерность $(2l+1)(2l'+1)$. Из (22.11.9) ясно, что каждое подпространство $X(l, l')$ отображается само на себя при любом $\rho(u)$ и, значит, является инвариантным подпространством. Из (22.11.12) мы видим, что

$$L_3\psi = i(m - m')\psi, \quad K_3\psi = (m + m')\psi;$$

иначе говоря, m — собственное значение оператора $-{}^1/_2 iL_3 + {}^1/_2 K_3$, а m' — собственное значение оператора ${}^1/_2 iL_3 + {}^1/_2 K_3$. Отсюда при помощи соображений, использовавшихся во всех предыдущих случаях, следует, что если некоторое инвариантное подпространство в подпространстве $X(l, l')$ содержит какую-либо функцию (многочлен), то оно содержит и любой одночлен $\psi_{lml'm'}$, входящий в этот многочлен с ненулевым коэффициентом. Далее мы находим, что

$$L^+ + iK^- = -2ix_1\partial_{x_2}, \quad L^- + iK^+ = -2ix_2\partial_{x_1},$$
$$L^- - iK^+ = 2i\bar{x}_1\partial_{\bar{x}_2}, \quad L^+ - iK^- = 2i\bar{x}_2\partial_{\bar{x}_1}.$$

Следовательно,

$$L^+ + iK^- \text{ опускает } m, \quad L^- + iK^+ \text{ поднимает } m,$$
$$L^- - iK^+ \text{ опускает } m', \quad L^+ - iK^- \text{ поднимает } m'$$

в том смысле, что функция $(L^+ + iK^-)\psi_{lml'm'}$ пропорциональна функции $\psi_{l\,m-1\,l'm'}$ и т. д. Это значит, что для данных l и l' все $\psi_{lml'm'}$ сцеплены при помощи инфинитезимальных операторов. Таким образом, мы заключаем, что если некоторое инвариантное подпространство содержит любую функцию (многочлен) в $X(l, l')$, то оно содержит и все подпространство $X(l, l')$. Иначе говоря, представление ρ, суженное до $X(l, l')$, неприводимо; такие представления обозначаются через $\rho^{(l, l')}$ и являются единственно возможными *конечномерными* неприводимыми представлениями группы $SL(2, \mathbb{C})$.

22.13. СПИНОРЫ

Спиноры представляют собой совокупности величин, которые связаны с группами $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ подобно тому, как тензоры (включая векторы и скаляры) доквантовой физики связаны с физическими группами $SO(3)$ и $\mathscr{L}_p$. Законы преобразований спиноров дают некоторые (вообще говоря, приводимые) представления групп $SU(2)$ и $SL(2, \mathbb{C})$ и, следовательно, некоторые однозначные или двузначные представления указанных физических групп. Те из спиноров, законы преобразований которых дают обычные или однозначные представления физических групп, являются на самом деле тензорами в несколько измененном виде (см. ниже упражнение 1); в этом смысле тензоры являются частным случаем спиноров.

Для того чтобы описать некий тензор, совокупность величин (скажем, $T_{11}, T_{12}, \ldots, T_{44}$) связывают с каждой системой координат, и тогда соотношения между этими совокупностями для различных систем координат образуют законы преобразований. Коль скоро первоначальная система координат задана, это эквивалентно соответствию такой совокупности величин каждому элементу группы вращений или группы Лоренца; тогда совокупности, соответствующие другим системам координат, определяются законами преобразований. В случае спиноров совокупность величин для первоначальной системы координат сопоставляется с каждым элементом группы $SU(2)$ или $SL(2, \mathbb{C})$, и это приводит к соответствию каждой физической системе координат двух совокупностей, отличающихся, однако, лишь фазой (фактически только знаком). Но, поскольку фазы (в частности, знаки) несущественны с физической точки зрения, мы свободно можем говорить о соответствии совокупности (системы) величин каждой системе координат.

В таком случае *спинор ранга* 1 есть соответствие каждой системе координат пары чисел ξ_1 и ξ_2, причем такое, что при преобразовании Лоренца, которое определяется элементом группы $SL(2, \mathbb{C})$

$$m=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

числа ξ_1 и ξ_2 преобразуются согласно закону

$$\begin{aligned} \xi_1 &\to \xi_1' = m_{11}\xi_1 + m_{12}\xi_2, \\ \xi_2 &\to \xi_2' = m_{21}\xi_1 + m_{22}\xi_2. \end{aligned} \tag{22.13.1}$$

Спиноры более высокого ранга определяются совершенно аналогично тензорам: *спинор ранга r* есть такое соответствие каждой системе координат системы 2^r комплексных чисел $\xi_{\alpha_1 \ldots \alpha_r}$ (каждый индекс принимает значения 1 и 2), при котором эти числа преобразуются согласно закону

$$\xi'_{\alpha_1 \ldots \alpha_r} = \sum_{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r = 1}^{2} m_{\alpha_1\beta_1} \ldots m_{\alpha_r \beta_r} \xi_{\beta_1 \ldots \beta_r}. \tag{22.13.2}$$

Пока мы ограничиваемся лишь вращениями осей x, y, z, а не преобразованиями Лоренца, т. е. лишь группой $SU(2)$, это все, что можно сказать. Однако из предыдущих параграфов ясно, что при рассмотрении представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ матрица $\overline{m}$ играет самостоятельную роль по сравнению с матрицей m. *Пунктирный спинор ранга* 1 есть соответствие каждой системе координат пары комплексных чисел $\xi_{\dot{1}}$, $\xi_{\dot{2}}$, при котором эти числа преобразуются согласно закону

$$\begin{aligned} \xi_{\dot{1}}' &= \overline{m_{11}}\xi_{\dot{1}} + \overline{m_{12}}\xi_{\dot{2}}, \\ \xi_{\dot{2}}' &= \overline{m_{21}}\xi_{\dot{1}} + \overline{m_{22}}\xi_{\dot{2}}. \end{aligned} \tag{22.13.3}$$

Наконец, смешанный спинор, имеющий r индексов без точек и s индексов с точками, есть соответствие каждой системе координат совокупности 2^{r+s} комплексных чисел, при котором эти числа преобразуются согласно закону

$$\xi'_{\alpha_1 \dots \alpha_r \dot{\beta}_1 \dots \dot{\beta}_s} = \\ = \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_r, \delta_1, \dots, \delta_s = 1}^{2} m_{\alpha_1\gamma_1} \dots m_{\alpha_r\gamma_r} \overline{m_{\beta_1\delta_1}} \dots \overline{m_{\beta_s\delta_s}} \xi_{\gamma_1 \dots \gamma_r \dot{\delta}_1 \dots \dot{\delta}_s}. \tag{22.13.4}$$

Упражнения

1. Пусть $\xi_{\alpha\dot{\beta}}$ —смешанный спинор ранга 2 и величины v_j ($j=1, \dots, 4$) определены как

$$v_1 = \xi_{1\dot{1}} + \xi_{2\dot{2}}, \quad v_2 = \xi_{1\dot{1}} - \xi_{2\dot{2}},$$
$$v_3 = \xi_{1\dot{2}} + \xi_{2\dot{1}}, \quad v_4 = i(\xi_{1\dot{2}} - \xi_{2\dot{1}}).$$

Покажите, что при вращениях и преобразованиях Лоренца величины $v_1, \dots$ $\dots, v_4$ преобразуются подобно компонентам вектора. Аналогично покажите, что смешанный спинор ранга $2r$, имеющий r индексов с точками и r индексов без точек, определяет тензор ранга r.

2. Спинор называется *симметричным*, если он симметричен по индексам с точками (т. е. не меняется при любой перестановке таких индексов), а также симметричен по индексам без точек. Покажите, что закон преобразования такого спинора дает представление группы $SL(2, \mathbb{C})$, которое эквивалентно представлению $\rho^{(l, l')}$, определенному в предыдущем параграфе, причем $2l$ и $2l'$ являются числом индексов с точками и числом индексов без точек соответственно.