Глава 23

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ МНОГООБРАЗИЙ

Локально n-мерное пространство; сфера; тор; круг; лист Мёбиуса; бутылка Клейна; отождествление краев; координатные карты; согласованность карт; индуцированная топология; аксиома отделимости Хаусдорфа; многообразие; кривые; функции на многообразии; связность; односвязность; компонента; гомотопные кривые; гомотопические классы кривых; фундаментальная группа; двусвязность группы $SO(3)$; конфигурационное пространство механической системы; декартово произведение многообразий.

Предварительные сведения: гл. 18 и 19.

Теория многообразий лежит в основе теории групп Ли и геометрий Римана и Эйнштейна. В общую теорию относительности понятие многообразия было введено примерно в 1960 г. (в основном Мартином Крускалом), и это позволило по-новому оценить содержание этой теории и прояснить как локальные, так и глобальные топологические свойства пространственно-временных моделей. Статистическая механика имеет дело с потоками на многообразиях. Время от времени возникают другие приложения теории многообразий, что связано с геометрической природой физических задач. Здесь будут рассмотрены только конечномерные многообразия; теорию более общих многообразий см. в книге Ленга [1962].

23.1. ПРИМЕРЫ МНОГООБРАЗИЙ. МЕТОД ОТОЖДЕСТВЛЕНИЯ

Грубо говоря, n-мерное многообразие является пространством, которое локально топологически неотличимо от n-мерного евклидова пространства E^n; иначе говоря, каждая точка многообразия лежит в какой-то области (связном открытом множестве), которая гомеоморфна некоторой области в E^n. Формальное определение будет дано в § 23.4.

Любое евклидово пространство само, очевидно, является многообразием. Простым нетривиальным примером служит двумерная сфера, т. е. множество S^2 точек E^3, для которых $x^2+y^2+z^2=1$ (x, y, z — декартовы координаты точек). Любую достаточно малую область U на S^2 можно взаимно однозначно отобразить на плоскую область при помощи любой из проекций, используемых в картографии. (В стереографической проекции в качестве U берется все S^2, за исключением одной точки.) В силу этого S^2 является двумерным многообразием. Тор (поверхность кольца) — также двумерное многообразие.

Любое открытое подмножество многообразия (например, открытый круг $x^2+y^2<1$ на плоскости) является многообразием. Лист Мёбиуса (без края) — это многообразие. Граничные точки следует отбрасывать, потому что они не лежат на той части поверхности, которая отображается в *открытое* множество плоскости. Шар и заполненный тор (без их поверхностей) — трехмерные многообра-

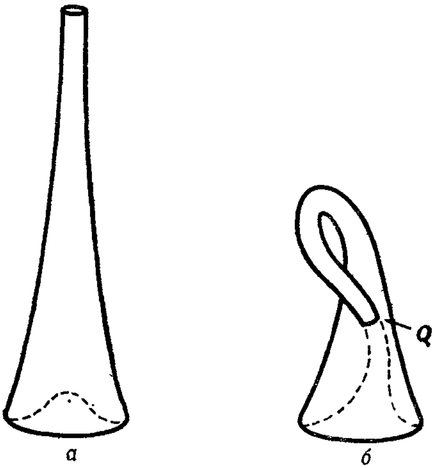

Рис. 23.1. Бутылка Клейна.

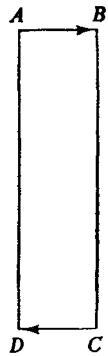

Рис. 23.2.

зия. Многообразия с краем здесь не рассматриваются; о них см. книгу Ленга [1962].

Поверхность, известная под названием *бутылки Клейна*, является двумерным многообразием. Представьте себе поверхность в виде винной бутылки с длинным горлышком и вдавленным донышком, как на рис. 23.1, *а*. Затем представьте, что горлышко бутылки изогнуто вниз так, что оно проходит сквозь стенку бутылки (как в Q на рис. 23.1, *б*), а потом соединяется внутри бутылки с отверстием во вдавленном донышке, образуя тем самым замкнутую одностороннюю поверхность. Эту поверхность нельзя представить вложенной в E^3 без самопересечений (как в Q), но ее можно вложить без самопересечений в E^4. Чтобы убедиться в этом, возьмем поверхность (см. рис. 23.1, *б*), вложенную в E^3; тогда каждая ее точка имеет три координаты x_1, x_2, x_3. Теперь нужно определить для каждой точки четвертую координату x_4 так, чтобы x_4 на поверхности изменялась гладко, а в окрестности Q принимало одно значение (скажем, 0) на стенке бутылки и другое значение (скажем, 1) — на ее горлышке. В этом случае на поверхности уже не найдется двух разных точек с одинаковыми координатами x_1, x_2, x_3, x_4.

Многие двумерные многообразия можно получить при помощи метода отождествления (склеивания) краев. *Лист Мёбиуса* получается из прямоугольника $ABCD$ (рис. 23.2) с помощью склеивания (отождествления) каждой точки стороны AB (выбирая их по порядку от A до B) с соответствующими точками стороны CD так, чтобы A отождествлялась с C, а B — с D. Две отождествленные точки рассматриваются как одна точка многообразия, и все выглядит в точности так, как если бы прямоугольник был узкой полосой бумаги, которая изогнута в виде окружности, а ее края склеены друг с другом, причем перед склеиванием один из концов был повернут на полуоборот.

Если в последнем примере аналогичным образом склеить так же и края AD и CB, то в результате получится бутылка Клейна [1]). (Для этого потребовалось бы растягивать бумагу, не говоря уж о трудностях с самопересечением.)

В § 19.5 были рассмотрены многообразия групп. Многообразие группы $SO(3)$ было представлено в виде определенной трехмерной алгебраической поверхности в девятимерном пространстве. Некоторая окрестность каждой точки этой поверхности гомеоморфна некоторой области E^3, однако в целом поверхность не гомеоморфна никакой области в E^3; в § 23.7 будет показано, что эта поверхность имеет такие свойства связности, какими область в E^3 обладать не может.

Многообразие группы $SO(3)$ можно рассматривать также и как результат трехмерной операции склеивания, использованной выше для получения листа Мёбиуса. Если θ_x, θ_y, θ_z — внутренние координаты, введенные в § 19.6, то каждая точка шара $\|\boldsymbol{\theta}\| \leqslant \pi$ представляет единственный элемент группы $SO(3)$, и обратно, за исключением того, что любые диаметрально противоположные точки на поверхности, $\boldsymbol{\theta}$ и $-\boldsymbol{\theta}$, $\|\boldsymbol{\theta}\| = \pi$, представляют один и тот же элемент группы $SO(3)$ и поэтому должны отождествляться. Это отождествление нельзя осуществить (по аналогии с листом Мёбиуса) путем деформации сферы в трех-

[1]) Точнее говоря, дело обстоит так. Склеивание сторон прямоугольника дает следующие простейшие многообразия: если склеить только вертикально (или только горизонтально) противоположные точки, то получится цилиндр; если склеить диаметрально противоположные (относительно центра прямоугольника) точки двух сторон, то получится лист Мёбиуса; если склеить диаметрально противоположные точки сторон AB и CD и горизонтально противоположные точки AD и BC, то получится бутылка Клейна; если склеить диаметрально противоположные точки всех сторон, то получится проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$; если склеить вертикально противоположные и горизонтально противоположные точки, то получится тор, и, наконец, если склеить вертикальные и горизонтально противоположные точки все вместе в одну точку, то получится сфера S^2. — *Прим. перев.*

мерном пространстве и склеивания поверхностей, однако это склеивание можно очевидным образом выполнить при помощи подходящей деформации сферы в девятимерном пространстве.

Согласно упражнению 1 из § 20.6, многообразие группы $SU(2)$ можно реализовать в виде трехмерной сферы, т. е. единичной сферы в E^4. Это многообразие односвязно, однако также не гомеоморфно никакой области в E^3.

23.2. КООРДИНАТНЫЕ СИСТЕМЫ ИЛИ КАРТЫ. СОГЛАСОВАННОСТЬ. ГЛАДКОСТЬ

Пусть M_0—некоторое пространство, т. е. множество объектов, называемых точками. (M_0 может быть группой или еще чем-либо подобным, однако пока не предполагается, что оно обладает какой-либо топологической структурой; см. замечание в § 23.4.) Введение n-мерной координатной карты в M_0 означает присвоение каждой точке P определенного подмножества U многообразия M_0 n вещественных координат $\{x^1, \ldots, x^n\} = \mathrm{x}$ таким образом, что соответствие $P \longrightarrow \mathrm{x}$ является взаимно однозначным отображением φ множества U на связное открытое подмножество N координатного пространства $\mathbb{R}^n$; в этом случае пишут $\mathrm{x} = \varphi(P)$, а тройку (U, φ, N) называют *координатной картой* на M_0. Такое обозначение карты удобно, хотя и избыточно, поскольку U и φ определяют N (см. замечание в § 23.4). Вектор $\mathrm{x} = \varphi(P)$ иногда называют *координатой* точки P.

Если, например, θ и φ—сферические координаты на сфере ($\theta = x^1$, $\varphi = x^2$), то указанное отображение переводит определенные точки сферы в точки открытого прямоугольника ($0 < \theta < \pi$, $-\pi < \varphi < \pi$) на (θ, φ)-плоскости $\mathbb{R}^2$. Чтобы сделать это отображение взаимно однозначным, нужно отбросить северный и южный полюсы ($\theta = 0$ и $\theta = \pi$ соответственно), а также международную линию смены дат $\varphi = \pm\pi$. Чтобы описать всю сферу, можно было бы использовать метод склеивания, т. е. расширить это отображение на границу прямоугольника, а затем принять соглашение о том, что все точки $\theta = 0$, $-\pi < \varphi < \pi$ склеиваются в одну точку (северный полюс), все точки $\theta = \pi$, $-\pi < \varphi < \pi$ тоже склеиваются в одну точку (южный полюс) и для каждого θ из интервала (θ, π) точки с координатами $\varphi = +\pi$ и $\varphi = -\pi$ означают одну и ту же точку. Однако, для того чтобы иметь возможность учесть требования гладкости и гарантировать, что поверхность, полученная после склеивания, действительно похожа на сферу, а не на какие-нибудь чепчик или пилотку, необходим другой подход.

Если $\{U_1, \varphi_1, N_1\}$ и $\{U_2, \varphi, N_2\}$—две перекрывающиеся карты на M_0, то они устанавливают некоторую связь между двумя множествами координат точек P из пересечения $U_1 \cap U_2$ и эта связь является взаимно однозначной, поскольку каждое отображение $P \longrightarrow \varphi_1(P)$ и $P \longrightarrow \varphi_2(P)$ является взаимно однозначным. Если мы положим $\mathbf{x} = \varphi_1(P)$ и $\mathbf{y} = \varphi_2(P)$, то получающаяся связь между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и ее обращение определяют функции (*функции перехода*), которые мы будем обозначать следующим образом:

$$x^i = \hat{x}^i(y^1, \ \ldots, \ y^n), \quad i = 1, \ \ldots, \ n, \tag{23.2.1}$$

$$y^i = \hat{y}^i(x^1, \ \ldots, \ x^n), \quad i = 1, \ \ldots, \ n. \tag{23.2.2}$$

Предполагается, что эти функции непрерывны и определенное число раз дифференцируемы; если $U_1 \cap U_2$ не пусто, то предполагается, что преобразования (23.2.1) и (23.2.2) заданы на *открытой* области в $\mathbb{R}^n$. Точнее, две карты называются *C^k-согласованными*, если

1) множества $\{\mathbf{x} = \varphi_1(P) \colon P \in U_1 \cap U_2\}$ и $\{\mathbf{y} = \varphi_2(P) \colon P \in U_1 \cap U_2\}$ являются открытыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$;

2) функции (23.2.1) и (23.2.2) принадлежат классу C^k.

Если $U_1 \cap U_2$ пусто, карты автоматически согласованы.

Замечание. Из пункта 2 определения следует, что если одно из множеств, указанных в пункте 1, открыто в $\mathbb{R}^n$, то и другое также оказывается открытым.

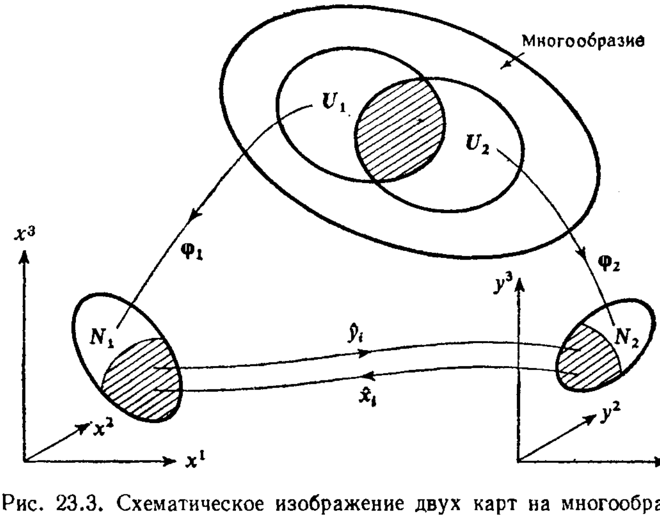

Рис. 23.3. Схематическое изображение двух карт на многообразии.

Интуитивно ясно, что любые две разумно выбранные карты любого разумно выбранного пространства всегда будут согласованными. Связи между ними показаны на рис. 23.3. Отображения, указанные на этом рисунке, означают следующее:

$$\varphi_1\colon\ P \longrightarrow \varphi_1(P), \quad \varphi_2\colon\ P \longrightarrow \varphi_2(P),$$
$$\hat{x}^i\colon\ y^i \longrightarrow \hat{x}^i(y^1, \ldots, y^n), \quad \hat{y}^i\colon\ x^i \longrightarrow \hat{y}^i(x^1, \ldots, x^n).$$

Если углы θ, φ на сфере есть координаты первой системы, то вторую систему координат можно выбрать так, чтобы координаты θ' и φ' являлись углами относительно других осей. Например, северный полюс N' в новой системе $(\theta'=0)$ можно взять

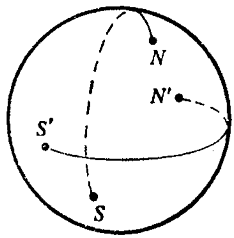

Рис. 23.4.

в точке $(\theta=\pi/2,\ \varphi=\pi/2)$ старой системы, а угол φ', отсчитываемый вокруг нового северного полюса, выбрать так, чтобы новая линия смены дат оказалась частью старого экватора ($\theta=\pi/2$, $-\pi/2<\varphi<\pi/2$; см. рис. 23.4). Ясно, что эти две системы в совокупности полностью покрывают сферу.

Упражнения

1. Найдите для этого примера преобразования (23.2.1) и (23.2.2), т. е. связь между θ, φ и θ', φ'.

2. Опишите системы координат на поверхности тора. Покажите, что тор может быть покрыт двумя картами, однако если требуются односвязные карты, то для покрытия тора необходимы три карты.

23.3. ИНДУЦИРОВАННАЯ ТОПОЛОГИЯ

Если $\{U, \varphi, N\}$ — координатная карта в пространстве M_0, а U_0 — любое подмножество U, образ которого

$$\varphi(U_0)=\{\mathrm{x}=\varphi(P)\colon\ P\in U_0\}$$

является открытым множеством в координатном пространстве $\mathbb{R}^n$, то U_0 называется *открытым* множеством в M_0. В частности, само множество U является открытым. В $\mathbb{R}^n$ пересечение конечного числа открытых множеств открыто, равно как и объединение произвольного набора открытых множеств. Поэтому открытые множества в M_0, определенные какой-либо картой, обладают теми же свойствами.

Условия 1 и 2 согласованности двух карт гарантируют, что эти карты определяют одну и ту же топологию в области их перекрытия. В частности, условие 1 обеспечивает открытость пересечения открытых множеств U_1 и U_2. Приведем пример двух перекрывающихся карт, очевидно удовлетворяющих условию 2, но не согласованных из-за нарушения условия 1, а именно будем считать, что M_0 состоит из точек (x, y) в $\mathbb{R}^2$, лежащих на осях x и y, и определим две одномерные карты в M_0, по одной на каждой оси, следующим образом:

$$U_1 = \{(x, y)\colon x = 0\}, \quad \varphi_1((x, y)) = y, \quad N_1 = \mathbb{R},$$
$$U_2 = \{(x, y)\colon y = 0\}, \quad \varphi_2((x, y)) = x, \quad N_2 = \mathbb{R}.$$

В этом случае $U_1 \cap U_2$ состоит из единственной точки ($x = 0$, $y = 0$), которая не является открытым множеством ни в одной из карт. В общем случае две n-мерные карты могут пересекаться по поверхности меньшей размерности чем n, причем даже так, что условие 2 удовлетворяется, однако в этом случае их пересечение не будет открытым в $\mathbb{R}^n$ множеством. Условие 1 исключает подобные ситуации, требуя, чтобы пересечение было n-мерным.

Когда пространство M_0 покрыто набором согласованных карт, его топология полностью определяется тем, что открытые множества должны быть открытыми множествами, порождаемыми отдельными картами (как указано выше), либо произвольными объединениями таких множеств. Тогда, в частности, все пространство M_0 является открытым множеством.

23.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ. АКСИОМА ОТДЕЛИМОСТИ ХАУСДОРФА

Замечание. Данное изложение теории многообразий отличается от обычного только в одном отношении. Обычно исходят из пространства, которое уже было наделено некоторой топологической структурой, причем фактически предполагается, что оно должно быть хаусдорфовым пространством (см., однако, книгу Ленга [1962]). Затем требуют, чтобы системы координат были непрерывными относительно этой топологии. С другой стороны, существование систем координат значительно ограничивает топологию, причем так, что пространство оказывается локально евклидовым (топологически; метрических свойств мы не касаемся). Для наших целей кажется более приемлемым полностью определять топологические свойства системами координат. Тогда оказываются необходимыми только хорошо известные топологические свойства евклидовых пространств за одним исключением: когда многообразие строится путем сборки отдельных кусков двух или нескольких карт, нужно позаботиться о том, чтобы выполнялась аксиома отделимости Хаусдорфа,— об этом мы еще будем говорить ниже.

Замечание. Исходным моментом изложения является пространство M_0, которое является просто набором (несчетным) никак не определенных элементов, называемых *точками*. В некоторых приложениях пространство M_0 задано заранее, например, оно может быть группой. С другой стороны, в геометрии Римана или в общей теории относительности исходным материалом служит множество функций $g_{\mu\nu}(x^1, \ldots, x^n)$, определенных на координатах $x^1, \ldots, x^n$, лежащих в некоторой области N координатного пространства $\mathbb{R}^n$; тогда предполагается, что каждая точка в N определяет точку P многообразия Римана или описываемого физического пространства. Затем эта область многообразия (или физического пространства) может расширяться при помощи преобразования координат, подобных (23.2.1), (23.2.2), до тех пор, пока на основании какого-либо критерия мы не убедимся в том, что получилось полное многообразие (см., например, критерий Крускала геодезической полноты, описанный в гл. 28). В этом методе построения многообразий заранее ничего не говорится об абстрактном пространстве M_0 или о его подмножествах U, U' и т. д., пока описание не стало полным. Каждая карта определяется описанием N, и явно ничего не говорится об U и φ, поэтому мы предпочитаем сохранять N в обозначении $\{U, \varphi, N\}$ карты.

Многообразие должно удовлетворять следующей аксиоме, которая выражает очевидное свойство евклидовых пространств.

Аксиома отделимости Хаусдорфа. *Если P и Q — любые различные точки, то существуют такие окрестности U и V точек P и Q соответственно, что $U \cap V = \varnothing$.*

Когда две системы координат при построении многообразия составляются вместе, возможно нарушение этой аксиомы, что и подтверждает следующий одномерный пример. Пространство M_0 состоит из трех экземпляров прямой $\mathbb{R}$, его точки обозначаются как $\{x, \alpha\}$, где x — вещественное число, а α — одна из букв a, b или c. На M_0 определяются следующие две карты:

$$U_1 = \{\{x, a\}\colon x \geqslant 0\} \cup \{\{x, b\}\colon x < 0\},$$
$$\varphi_1 = (\{x, \alpha\}) = x, \quad N_1 = \mathbb{R};$$
$$U_2 = \{\{x, c\}\colon x \geqslant 0\} \cup \{\{x, b\}\colon x < 0\},$$
$$\varphi_2(\{x, \alpha\}) = x, \quad N_2 = \mathbb{R}.$$

Каждая карта сама по себе порождает гомеоморфизм $\mathbb{R}$, однако точки $P = \{0, a\}$ и $Q = \{0, c\}$ не отделены, потому что любые два открытых интервала, содержащие P и Q соответственно, включают общие точки вида $\{x, b\}$, $x < 0$. Ясно, что такое явление можно легко исключить при практическом построении многообразий.

Определение. *n-мерное многообразие* M есть пространство M_0 вместе с (конечным или счетным) множеством согласованных n-мерных карт, которые вместе покрывают все M_0 так, что получающаяся топология удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа. Ясно, что согласованные системы координат могут быть добавлены или отброшены, когда это желательно, если только покрытие всего M_0 сохраняется. *Внутренние свойства* M — это те свойства, которые не изменяются от таких добавлений и исключений.

Многообразие M называется *C^k-многообразием*, если преобразования (23.2.1), (23.2.2) любых двух систем координат принадлежат классу C^k, т. е. если функции $\hat{x}^i(\ldots)$ и $\hat{y}^i(\ldots)$ имеют непрерывные частные производные (чистые и смешанные) всех порядков вплоть до порядка k. В таком случае добавление новых систем координат ограничивается этим же требованием. Аналогично M называется *C^∞-многообразием*, если эти преобразования принадлежат классу C^∞, или *вещественным аналитическим многообразием*, если они задаются аналитическими функциями. Многообразия непрерывных групп (групп Ли) — вещественные аналитические многообразия. С другой стороны, в общей теории относительности целесообразно допускать C^k-многообразия с конечным k, потому что полевые уравнения Эйнштейна являются гиперболическими и, в принципе, гравитационные волны могут переносить разрывы различных производных компонент $g_{\mu\nu}$ метрического тензора.

Упражнение

В § 19.6 были определены внутренние координаты θ_x, θ_y, θ_z в группе вращений $SO(3)$. Для того чтобы они удовлетворяли данному выше определению, их нужно ограничить *открытым* шаром $\theta_x^2+\theta_y^2+\theta_z^2 < \pi$. Введите дополнительные системы координат так, чтобы все вместе они покрывали многообразие $SO(3)$. (Общий метод построения таких систем для групп описан в гл. 27.)

23.5. КРИВЫЕ И ФУНКЦИИ НА МНОГООБРАЗИИ

Предположим, что $f(P)$ — вещественно- или комплекснозначная функция, определенная на всех точках P многообразия M. Для любой карты $\{U, \varphi, N\}$ можно определить функцию $\hat{f}(\mathrm{x}) = \hat{f}(x^1, \ldots, x^n)$ путем задания равенств $\hat{f}(\mathrm{x}) = f(P)$, $\mathrm{x} = \varphi(P)$ для всех точек x открытого множества N, в которое отображением $P \to \mathrm{x} = \varphi(P)$ переводится U; поскольку эти соотношения взаимно однозначны, $\hat{f}(\ldots)$ определена корректно. Если получающаяся так функция $\hat{f}(\ldots)$ непрерывна при любом выборе карты $\{U, \varphi, N\}$ на M, то $f(P)$ называется *непрерывной функцией* на M; если M есть C^k-многообразие, а $\hat{f}$ — функции класса C^r $(r \leqslant k)$, то $f(P)$ называется *функцией класса* C^r на M. Ясно, что на M не может быть функций класса C^r с $r > k$ (кроме константы), потому что допустимые преобразования координат могут исключить существование производных порядка $r > k$. Непрерывность, или C^r-гладкость, функций может быть определена так же и на части M.

Если $P(t)$, где t — вещественная переменная, — однопараметрическое множество точек на M и если для любой карты $\{U, \varphi, N\}$ функции $\hat{x}^i(t)$, определенные равенством

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \varphi(P(t)),$$

оказываются непрерывными для всех t, на которых они определены, то $P(t)$ называется *кривой* или *путем* на M. Если функции $\hat{x}^i(t)$ принадлежат классу C^r, то и про кривую $P(t)$ говорят, что она C^r-гладкая. Если t изменяется на интервале $[t_1, t_2]$, то функция $P(t)$ описывает путь $\mathscr{C}$, идущий из *начальной точки* $P(t_1)$ до *конечной точки* $P(t_2)$. Предполагается, что все кривые либо кусочно дифференцируемы, либо имеют не более чем изломы (т. е. так выглядят их образы в любой карте), если особо не указано нечто иное. Для обеспечения этого предполагается также, что все рассматриваемые многообразия являются хотя бы C^1-гладкими.

Непрерывность и C^r-дифференцируемость функций двух или более переменных $P(t, s, \ldots)$ определяется аналогично.

23.6. СВЯЗНОСТЬ. КОМПОНЕНТЫ МНОГООБРАЗИЯ

Многообразие M называется *линейно связным*, если для любых двух точек P_1 и P_2 из M найдется путь, соединяющий P_1 и P_2.

Если M не только линейно связно, но и, кроме того, любую из двух произвольных кривых $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$, соединяющих любые две точки P_1 и P_2, можно непрерывно деформировать на M в другую (т. е. если найдется такая непрерывная функция $P(t, s)$, что для каждого s, скажем из интервала $[0, 1]$, $P(t, s)$ описывает при изменении t путь из P_1 в P_2 и этот путь совпадает при $s=0$ с $\mathscr{C}_1$, а при $s=1$ с $\mathscr{C}_2$), то M называется *односвязным*

Точка P многообразия M называется *предельной точкой* множества $S \subset M$, если любая ее сколь угодно малая окрестность (открытое множество, содержащее P) включает точки из множества S. Если S содержит все свои предельные точки, то оно называется *замкнутым*. Дополнение замкнутого множества является, очевидно, открытым, и обратно.

Топологи обычно дают другое определение связности, а именно говорят, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя представить в виде $S_1 \cup S_2$, где S_1 и S_2—непустые непересекающиеся ($S_1 \cap S_2 = \varnothing$) открытые множества (или, что эквивалентно, непустые непересекающиеся замкнутые множества). Любое линейно связное пространство связно (докажите это). Для многообразий верно и обратное, так что для них эти два понятия совпадают.

Компонентой многообразия M называют максимальное связное подмножество M, т. е. для данной точки P_0 из M множество

$$S = \{P\colon\ P \text{ можно соединить с } P_0 \text{ некоторым путем}\}$$

является компонентой M. В § 19.5 было показано, что многообразие группы $O(3)$ имеет две компоненты.

Как подмножество M компонента S является одновременно и открытым, и замкнутым множеством. С одной стороны, S открыто, потому что (1) любая точка P из S есть внутренняя точка M (все точки M внутренние) и (2) окрестность P, являющаяся образом некоторого шара в $\mathbb{R}^n$ (в некоторой карте, содержащей P), состоит, очевидно, из тех точек M, которые можно соединить с P, поэтому вся эта окрестность содержится в S. С другой стороны, S замкнуто, потому что если P — предельная точка последовательности точек из S, то P можно соединить (путем) с любой точкой, лежащей в аналогичной окрестности P, и поэтому ее можно соединить с точками последовательности. Обратно, если множество S связно и одновременно и открыто, и замкнуто, то оно является максимальным связным множеством, т. е. компонентой M; этот факт будет использован в теории групп Ли.

Предостережение. Понятие открытого в M множества не имеет никакого отношения к возможному вложению M в пространство большей размерности. Например, если единичная сфера $x^2+y^2+z^2=1$ рассматривается как двумерное многообразие M, то полярная шапка, т. е. множество точек, находящихся севернее заданной параллели, является открытым множеством в M, но не является таковым в $\mathbb{R}^3$.

Замечание. Любая компонента M, очевидно, сама является многообразием.

23.7. ГЛОБАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ. ГОМОТОПНЫЕ ПУТИ. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

В оставшейся части этой главы рассматриваются только связные многообразия. Два пути $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}_1$ на многообразии M, имеющие одну и ту же начальную P_0 и одну и ту же конечную P_1 точки, называются *гомотопными*, если один из них можно непрерывно деформировать в другой (оставаясь в M), т. е. если найдется такая непрерывная функция $P(t, s)$ $(0 \leqslant t,s \leqslant 1)$, что для каждого фиксированного $s \in [0, 1]$ $P(t, s)$ проходит некоторый путь от P_0 до P_1, когда t пробегает все значения от 0 до 1, причем этот путь при $s=0$ совпадает с $\mathscr{C}_0$, а при $s=1$ с $\mathscr{C}_1$. Как уже говорилось в § 19.5, многообразие *односвязно*, если любые пути на нем, имеющие одни и те же начальные и конечные точки, гомотопны.

Ясно, что гомотопия является отношением эквивалентности (она рефлексивна, симметрична и транзитивна), поэтому для заданных начальной и конечной точек P_0 и P_1 множество всех

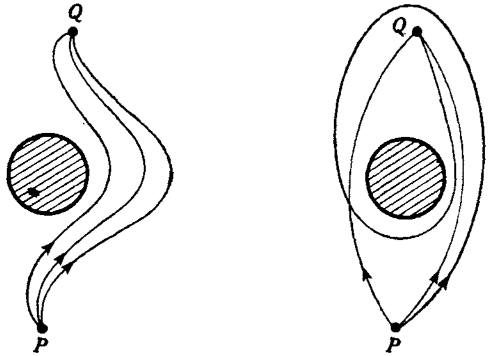

Рис. 23.5. Гомотопные и негомотопные пути.

путей, гомотопных заданной кривой, соединяющей P_0 и P_1, образует *класс эквивалентности*, или *гомотопический класс*, в $\boldsymbol{M}$. На многообразии

$$\{(x,\ y):\ x^2+y^2>1\},$$

образованном областью $(x,\ y)$-плоскости, внешней к единичному кругу, три пути из P в Q, изображенные на рис. 23.5 слева, принадлежат одному гомотопическому классу, тогда как на том же рисунке справа указаны такие три пути, что никакие два из них не гомотопны. Вообще, если $\mathscr{C}$ обозначает некоторый путь в $\boldsymbol{M}$, то $[\mathscr{C}]$ обозначает класс эквивалентности всех путей, гомотопных $\mathscr{C}$.

Определим теперь закон композиции гомотопических классов путей. Пусть $\mathscr{C}_1$ — путь от P до Q, а $\mathscr{C}_2$ — путь от Q до R. Через $\mathscr{C}_1 \circ \mathscr{C}_2$ обозначим путь, проходящий от P до R через точку Q и идущий от P к Q по пути $\mathscr{C}_1$, а от Q до R — по пути $\mathscr{C}_2$. Аналитически это можно представить так. Если функции $P_1(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ и $P_2(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ описывают кривые $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ соответственно, то функция

$$P_3(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} P_1(2t), & 0\leqslant t\leqslant 1/2 \\ P_2(2t-1), & 1/2\leqslant t\leqslant 1 \end{cases} \qquad (23.7.1)$$

описывает путь $\mathscr{C}_1 \circ \mathscr{C}_2$. Закон композиции гомотопических классов определяется теперь формулой

$$[\mathscr{C}_1]\circ[\mathscr{C}_2]=[\mathscr{C}_1\circ\mathscr{C}_2].$$

Эта формула применима тогда, когда конечная точка путей первого класса совпадает с начальной точкой путей второго класса; в противном случае выражение $[\mathscr{C}_1]\circ[\mathscr{C}_2]$ не определено. Легко

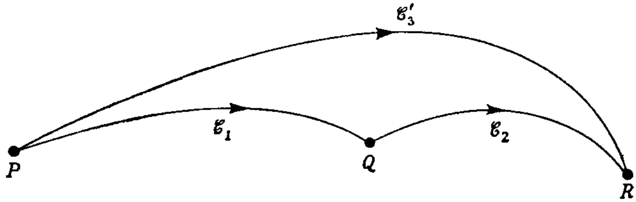

Рис. 23.6.

дать строгое доказательство того, что результат композиции не зависит от выбора путей $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ из соответствующих классов. «Произведение» $[\mathscr{C}_1]\circ[\mathscr{C}_2]$ содержит все пути, гомотопные пути $\mathscr{C}_1\circ\mathscr{C}_2$, такие, как кривая $\mathscr{C}_3'$ на рис. 23.6.

Данный закон композиции ассоциативен, однако он не превращает множество всех гомотопических классов в группу, потому что эта композиция не определена для любых пар классов

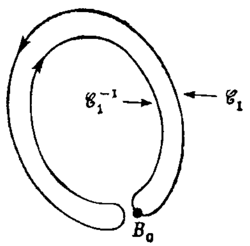

Рис. 23.7.

и ничего нельзя сказать об обратных элементах. Можно, однако, получить группу следующим образом. Пусть выбрана некоторая фиксированная основная точка (*отмеченная точка*) B_0; ограничимся рассмотрением только тех путей, которые начинаются и кончаются в B_0. (В определении гомотопии не исключался случай совпадения начальной и конечной точек.) Множество гомотопических классов таких путей образует группу, называемую *фундаментальной группой* многообразия и обозначаемую $\pi_1(M)$. Если $\mathscr{C}_0$— путь, который может быть стянут в отмеченную точку B_0 при помощи непрерывной деформации в M (такой путь называется *нуль-гомотопным*), то $\mathscr{C}_0\circ\mathscr{C}_1$ можно деформировать в $\mathscr{C}_1$, т. е.

$[\mathscr{C}_0]\circ[\mathscr{C}_1]=[\mathscr{C}_1]$; значит, $[\mathscr{C}_0]$ — единица группы. Для любого пути $\mathscr{C}_1$ обозначим через $\mathscr{C}_1^{-1}$ тот же самый путь, но проходимый в обратном направлении, т. е. если функция $P(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ описывает $\mathscr{C}_1$, то функция $P(1-t)$ описывает $\mathscr{C}_1^{-1}$. Ясно, что путь $\mathscr{C}_1\circ\mathscr{C}_1^{-1}$ стягивается в отмеченную точку B_0, т. е. он нуль-гомотопен (см. рис. 23.7); поэтому

$$[\mathscr{C}_1]\circ[\mathscr{C}_1^{-1}]=[\mathscr{C}_0]\quad\text{(единица)},\tag{23.7.2}$$

т. е.

$$[\mathscr{C}_1]^{-1}=[\mathscr{C}_1^{-1}].\tag{23.7.3}$$

Для связного многообразия M фундаментальная группа $\pi_1(M)$ не зависит от выбора отмеченной точки. Пусть B_1 — любая дру-

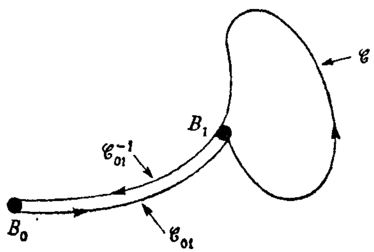

Рис. 23.8.

гая точка M, а $\mathscr{C}_{01}$ — любой фиксированный путь от B_0 до B_1. Если $\mathscr{C}$ — произвольный путь, начинающийся и кончающийся в B_1, то

$$\mathscr{C}_{01}\circ\mathscr{C}\circ\mathscr{C}_{01}^{-1}$$

— кривая, начинающаяся и кончающаяся в B_0 (см. рис. 23.8). Отображение

$$[\mathscr{C}]\to[\mathscr{C}_{01}\circ\mathscr{C}\circ\mathscr{C}_{01}^{-1}]\tag{23.7.4}$$

является изоморфизмом фундаментальной группы с B_1 в качестве отмеченной точки на фундаментальную группу с отмеченной точкой B_0, так как это отображение, очевидно, является взаимно однозначным и на всю группу, а произведение $[\mathscr{C}]\circ[\mathscr{C}']=[\mathscr{C}\circ\mathscr{C}']$ при (23.7.4) переходит на

$$\begin{aligned}[\mathscr{C}_{01}\circ\mathscr{C}\circ\mathscr{C}'\circ\mathscr{C}_{01}^{-1}]&=[\mathscr{C}_{01}\circ\mathscr{C}]\circ[\mathscr{C}'\circ\mathscr{C}_{01}^{-1}]=\\&=[\mathscr{C}_{01}\circ\mathscr{C}]\circ([\mathscr{C}_{01}]^{-1}\circ[\mathscr{C}_{01}])\circ[\mathscr{C}'\circ\mathscr{C}_{01}^{-1}]=\\&=[\mathscr{C}_{01}\circ\mathscr{C}\circ\mathscr{C}_{01}^{-1}]\circ[\mathscr{C}_{01}\circ\mathscr{C}'\circ\mathscr{C}_{01}^{-1}].\end{aligned}$$

Примеры

1. Если M — односвязное многообразие, то его фундаментальная группа $\pi_1(M)$ — тривиальная группа, состоящая только из одного единичного элемента,

2. Пусть M — поверхность цилиндра (конечного или бесконечного, хотя и изображенного конечным на рис. 23.9). Пусть θ, z — цилиндрические координаты, и пусть их значения представляют точки полосы на плоскости, как это показано на рис. 23.9. Каждая точка из M многократно повторяется на полосе; в частности, отмеченной точке B_0 на M соответствуют точки B_0', $B_{\pm 1}'$, $B_{\pm 2}'$ и т. д. Кривая на полосе, такая, как $\mathscr{C}$, проходящая от B_0' до любого другого образа B_0, скажем до B_k', есть образ замкнутой кривой на M и обратно, любая замкнутая кривая, начинающаяся и кончающаяся в B_0 на M, имеет именно такой образ; более того, $\mathscr{C}$ может быть непрерывно деформи-

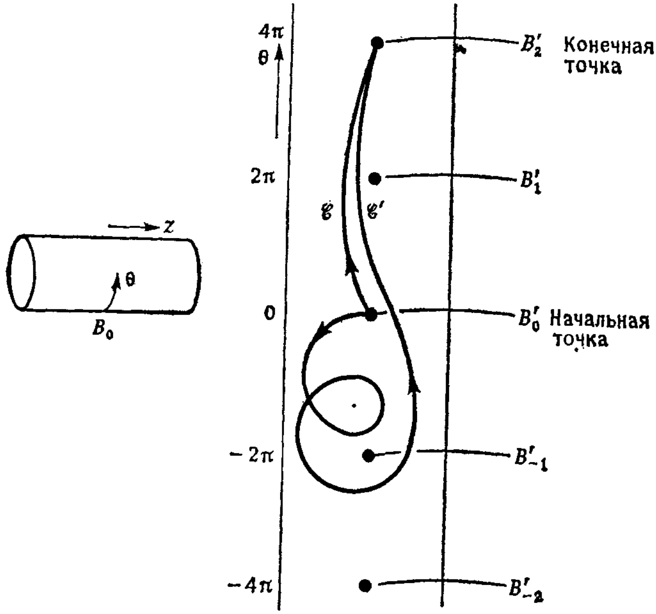

Рис. 23.9.

рована внутри полосы с сохранением начала и конца в любую другую кривую, идущую от B_0' до B_k', например в $\mathscr{C}'$. Следовательно, для каждой из возможных конечных точек B_k' имеется в точности один гомотопический класс путей, начинающихся и заканчивающихся в B_0 на M. Число k — это «чистое» число оборотов пути из данного класса вокруг цилиндра. Композиция двух таких путей, скажем с конечными точками B_k' и B_l', есть кривая с конечной точкой B_{k+l}'; следовательно, $\pi_1(M)$ изоморфна аддитивной группе целых чисел, т. е. бесконечной циклической группе C_∞. Кольцо $a < x^2+y^2 < b$, плоскость с выколотой точкой $x^2+y^2 > 0$ и лист Мёбиуса имеют фундаментальную группу, также изоморфную C_∞.

3. Пусть M — поверхность тора, которая задана уравнениями

$$z = a\sin\alpha, \quad x = (A + a\cos\alpha)\cos\beta, \quad y = (A + a\cos\alpha)\sin\beta,$$

где x, y, z — декартовы координаты, a и A — константы ($A > a > 0$), а α и β — два угла, являющиеся внутренними координатами на M (см. рис. 23.10).

Если координатам α и β разрешено изменяться неограниченно, то пары чисел (α, β) и $(\alpha+2\pi k, \beta+2\pi l)$ представляют одну и ту же точку на M. Пусть отмеченная точка B_0 задается равенствами $x=A+a$, $y=z=0$; она представляется любой точкой $(\alpha, \beta)=(2\pi k, 2\pi l)$ решетки на (α, β)-плоскости. Любой путь от $(0, 0)$ до $(2\pi k, 2\pi l)$ на этой плоскости представляет собой замкнутую кривую на M, начинающуюся и кончающуюся в B_0; он может быть непрерывно деформирован в любой другой путь, идущий от $(0, 0)$ до $(2\pi k, 2\pi l)$. В силу этого каждая пара целых чисел (k, l) определяет элемент фундаментальной группы $\pi_1(M)$. Ясно, что композицией элементов, определенных парами (k, l) и (k', l'), является элемент, определенный парой $(k+k', l+l')$, т. е. фундаментальная группа тора изоморфна прямому произведению $C_\infty \times C_\infty$, которое является свободной абелевой группой с двумя образующими.

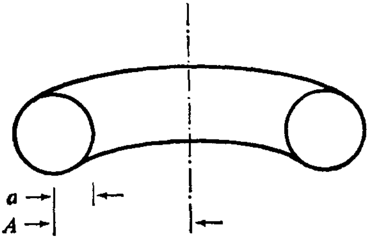

Рис. 23.10. Двумерный тор.

4. Рассмотрим многообразие M, состоящее из плоскости с двумя выколотыми точками a и b. В теории функций комплексной переменной контур интегрирования определяется записью равенства типа

$$J = \int^{(a+,\, a+,\, b-)} f(z)\, dz.$$

Здесь выражение $(a+, a+, b-)$ указывает на то, что контур начинается в некоторой отмеченной точке B (не совпадающей с a или b), делает два оборота вокруг точки a в положительном направлении (против часовой стрелки),

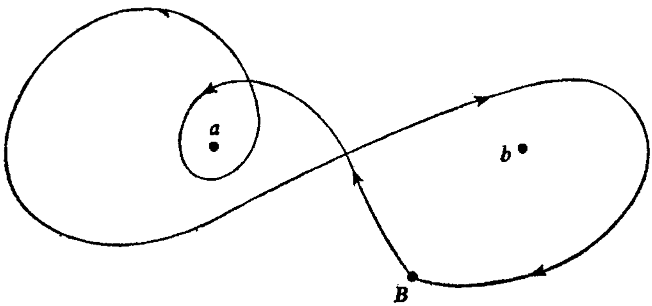

Рис. 23.11. Контур на комплексной плоскости.

делает один оборот вокруг точки b в отрицательном направлении и возвращается в B, как показано на рис. 23.11. В теории функций принимается как геометрически очевидное, что такая процедура адекватно определяет контур, если $f(z)$ аналитична всюду, кроме точек ветвления a и b, т. е. любые два контура, которые удовлетворяют данному выше описанию, можно непрерывно деформировать один в другой без прохождения через ту или иную точку ветвления. Иначе говоря, выражение $(a+, a+, b-)$ определяет гомотопический класс кривых в M, т. е. элемент $\pi_1(M)$. Мы примем именно эту точку зрения. Простейшие нетривиальные элементы группы $\pi_1(M)$ суть $(a+)$, $(b+)$ и их обратные $(a-)$ и $(b-)$; будем обозначать их α, β, α^{-1} и β^{-1}. В общем случае элемент группы выглядит так:

$$\gamma_1^{\varepsilon_1}\gamma_2^{\varepsilon_2}\cdots\gamma_k^{\varepsilon_k},$$

где каждое γ_i—либо α, либо β, а каждый показатель ε_i—либо $+1$, либо -1. Таким образом, $\pi_1(M)$ изоморфна свободной группе с двумя образующими. В отличие от групп из первых трех примеров эта группа некоммутативна.

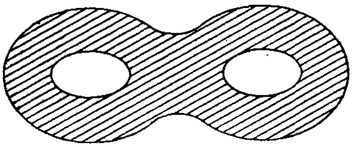

Рис. 23.12.

Та же фундаментальная группа получается для области типа восьмерки, заштрихованной на рис. 23.12. Если из плоскости удаляется n различных точек, то получается фундаментальная группа, изоморфная свободной группе с n образующими.

5. Пусть M—многообразие группы вращений $SO(3)$. В § 19.6 в M были введены внутренние координаты как три компоненты вектора θ, который лежит в шаре $K=\{\theta: \|\theta\|\leqslant\pi\}$ координатного пространства. Если отождествить противоположные концы каждого диаметра K (т. е. рассматривать их как одну и ту же точку), то устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками M и точками K. Чтобы получить нетривиальный элемент группы $\pi_1(M)$, нужно взять в качестве отмеченной точки B центр шара K, а затем рассмотреть путь $\mathscr{C}$, который проходит от B вдоль радиуса к точке A на поверхности K, «перескакивает» в диаметрально противоположную точку A', а затем возвращается вдоль радиуса в B, как показано на рис. 23.13.

Этот путь $\mathscr{C}$ нельзя стянуть в B при помощи непрерывной деформации, потому что а) любой путь, начинающийся и кончающийся в B и совершающий такого рода скачки, имеет общую длину (в K) не меньше 2π; б) из соображений непрерывности интуитивно ясно, что непрерывная деформация не может уничтожать эти скачки. (Точнее это будет обосновано в следующей главе.)

Рассмотрим теперь путь $\mathscr{C}$, который начинается в B и возвращается в B после конечного числа таких скачков, скажем из A_1 в A_1', из A_2 в A_2' и т. д., где в каждом случае штрих обозначает диаметрально противоположную точку. Посредством непрерывной деформации последовательные скачки могут быть уничтожены по два за раз. Рассмотрим некоторый участок $\mathscr{C}$, содержащий два последовательных скачка (см. рис. 23.14, где этот участок состоит из частей PA_1, $A_1'A_2$ и $A_2'Q$). Сдвигая путь $A_1'A_2$ к поверхности K и одновременно рисуя точки A_2 и A_1' (а также A_1 и A_2') как одну, участок $A_1'A_2$ пути можно уничтожить, а остаток будет похож на штриховую кривую, проходящую из P в Q без скачка.

Продолжая эту процедуру, путь $\mathscr{C}$ можно либо стянуть в отмеченную точку B, если первоначально было четное число скачков, либо свести к пути с единственным скачком, если первоначально было нечетное число скачков. Следовательно, группа $\pi_1(SO(3))$ изоморфна циклической группе порядка 2, состоящей только из двух элементов. Если первоначально путь $\mathscr{C}$ содержал бесконечное число скачков, то многие из этих скачков были бы очень близки друг к другу, так что между ними значение $\|\theta\|$ оставалось бы близким к π, а непрерывная деформация приводила бы к пути с конечным числом скачков. Эти результаты проще и строже будут получены в следующей главе посредством накрытия $SO(3)$ многообразием $SU(2)$.

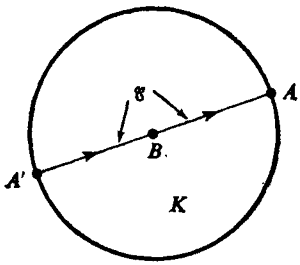

Рис. 23.13. Не нуль-гомотопный путь на многообразии группы $SO(3)$.

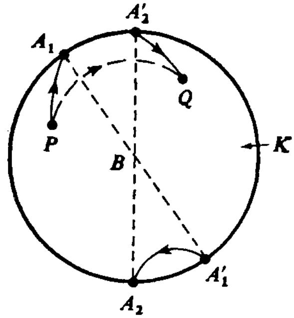

Рис. 23.14. Гомотопные пути из P в Q на многообразии группы $SO(3)$.

Следует отметить, что знание фундаментальной группы еще не позволяет полностью определить глобальную топологию многообразия. Например, сфера $x^2+y^2+z^2=1$ и круг $x^2+y^2<1$ являются односвязными двумерными многообразиями, но топологически они различны: если удалить одну точку, то сфера останется односвязным многообразием (в отличие от круга). По этой причине может возникнуть искушение ввести также высшие гомотопические группы (см. Хокинг и Янг [1961, гл. 4]) или другие топологические характеристики. Однако оказывается, что первая гомотопическая группа, т. е. фундаментальная группа,— это именно то, что нужно для многих целей, скажем в теории накрытия одного многообразия другим, которая является предметом следующей главы.

В гл. 27 будет показано, что фундаментальная группа многообразия группы Ли всегда абелева (коммутативна).

23.8. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВЯЗИ. ДЕКАРТОВЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Любую конфигурацию двойного маятника, схема которого приведена на рис. 23.15, можно определить значениями двух углов α и β. Для любых целых чисел k и l пара чисел $(\alpha+2\pi k, \beta+2\pi l)$ представляет ту же конфигурацию, что и (α, β). Поэтому, согласно примеру 3 из предыдущего параграфа, между конфигурациями маятника и точками тора существует такое взаимно однозначное соответствие, что при колебании маятника соответствующая точка движется по тору непрерывно.

Если вторая ось вращения перпендикулярна основной оси вращения, как на рис. 23.16, то конец второго маятника движется по обычному тору в пространстве.

В любом случае каждая точка маятника движется по окружности вокруг соответствующей оси вращения, а в общем движении объединяются оба этих круговых движения. В соответствии с этим тор рассматривается как декартово произведение двух окружностей. В общем случае, когда M и M' — любые два мно-

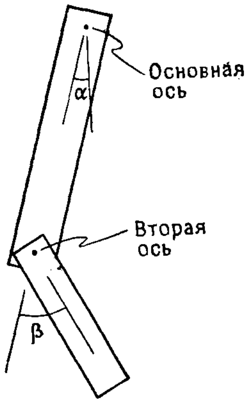

Рис. 23.15. Двойной маятник с параллельными осями.

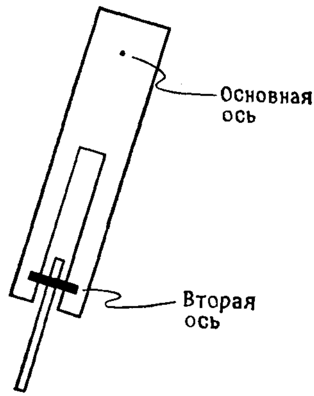

Рис. 23.16. Двойной маятник с перпендикулярными осями.

гообразия размерностей n и n', их *декартово произведение* $M \times M'$ есть $(n+n')$-мерное многообразие, определенное следующим образом. (1) Каждая точка $M \times M'$ — упорядоченная пара (P, P'), где P и P' — произвольные точки M и M' соответственно. Иначе говоря, $M \times M'$ как множество является декартовым произведением M и M' в смысле теории множеств. (2) Если $\{U, \varphi, N\}$ и $\{U', \varphi', N'\}$ — произвольные карты на M и M' соответственно, то карта $\{U'', \varphi'', N''\}$ на $M \times M'$ определяется так: U'' — множество всех точек (P, P'), где $P \in U$, $P' \in U'$, а $\varphi''((P, P'))$ есть $(n+n')$-мерный вектор, компонентами которого являются компоненты векторов $\varphi(P)$ и $\varphi'(P')$, т. е.

$$\varphi''_i((P, P')) = \begin{cases} \varphi_i(P), & i = 1, \ldots, n, \\ \varphi'_{i-n}(P'), & i = n+1, \ldots, n+n'. \end{cases}$$

Очевидно, что такое определение превращает $M \times M'$ в многообразие.

Если оси вращения двойного маятника заменить идеализированными шаровыми шарнирами, то пространство конфигураций оказывается декартовым произведением двух двумерных сфер и поэтому четырехмерным многообразием. (Мы пренебрегаем вращением звеньев вокруг собственных продольных осей.)

Наконец, если маленький шарик катается внутри полой сферы, не выходя из постоянного контакта с ней, то в качестве пространства конфигураций получается декартово произведение сферы и многообразия $SO(3)$, т. е. пятимерное многообразие.

Ясно, что такого рода примеров можно построить сколько угодно.