Глава 24

НАКРЫВАЮЩИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Локальный гомеоморфизм; проекция; p-листное накрытие; правильная окрестность; принципы поднятия; универсальное накрывающее многообразие; построение математических моделей; многообразия, накрываемые данным многообразием.

Предварительные сведения: гл. 23 и частично гл. 18 и 19.

24.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ

$(2 \to 1)$-отображение ψ группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$, описанное в § 19.7, не просто групповой гомеоморфизм; оно является таким отображением многообразия $SU(2)$ на многообразие $SO(3)$, которое называют накрытием. Это отображение—локальный гомеоморфизм в том смысле, что для любой точки P многообразия $SU(2)$ найдется такая ее окрестность, которая гомеоморфно отображается при помощи ψ в некоторую окрестность образа Q точки P в многообразии $SO(3)$. Более того, для *произвольной* точки Q второго многообразия всегда найдутся две такие точки P первого многообразия, что каждая из них имеет подобную же окрестность. Отображение ψ является *двулистным накрытием* многообразия $SO(3)$ многообразием $SU(2)$.

Отображение ψ: $\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ многообразия $\boldsymbol{M}$ в многообразие $\boldsymbol{N}$ (эти многообразия будут называться далее «верхним» и «нижним» многообразиями соответственно) называется *накрытием* многообразия $\boldsymbol{N}$ многообразием $\boldsymbol{M}$, если оно удовлетворяет двум требованиям, из которых первое утверждает, что накрывается *все* $\boldsymbol{N}$, а второе объясняет, как именно оно накрывается. Эти требования таковы: (а) ψ—отображение *на* $\boldsymbol{N}$, т. е. для любой точки Q нижнего многообразия ($\boldsymbol{N}$) найдется хотя бы одна точка P верхнего многообразия ($\boldsymbol{M}$), такая, что $\psi(P)=Q$; (б) любая точка Q нижнего многообразия содержится в некоторой окрестности $\boldsymbol{V}$, прообраз $\psi^{-1}(\boldsymbol{V})$ которой (т. е. множество всех точек верхнего многообразия, отображаемых в точки $\boldsymbol{V}$) состоит из одной или более непересекающихся окрестностей $\boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{U}_2$, ... или компонент (по одной из каждого «листа» в $\boldsymbol{M}$), каждая из которых гомеоморфна $\boldsymbol{V}$, т. е. для каждого j отображение $P \to \psi(P)$, ограниченное на $\boldsymbol{U}_j$, является взаимно однозначным бинепрерывным отображением $\boldsymbol{U}_j$ на $\boldsymbol{V}$. Окрестность $\boldsymbol{V}$ в нижнем многообразии, обладающая такими свойствами, называется нами *правильной* окрестностью [1]). (Отображение называется *бинепрерывным*, если и оно само, и обратное ему отображение непрерывны.) Если $x^1, \ldots$ $\ldots, x^n$ — координаты P в окрестности U_j в M, а $y^1, \ldots, y^n$ — координаты соответствующей точки $\psi(P)$ в окрестности V в N, то x^i являются непрерывными функциями от y^i (и наоборот) на всех соответствующих окрестностях. Очевидно, что размерности M и N должны совпадать.

Если такое отображение ψ существует, то M называется *накрывающим многообразием* многообразия N, а ψ — *накрытием* многообразия N многообразием M или *проекцией* M на N.

Если многообразия связны, то *кратность* накрытия (т. е. число точек M, отображаемых в одну точку в N) постоянна всюду, потому что это число (положительное целое или $+\infty$), очевидно, постоянно в любой окрестности и, следовательно, постоянно всюду на M и N. Если кратность равна p, то отображение ψ называется p-листным накрытием. Если M и N — многообразия класса C^k, то требуется, чтобы x^i как функции y^i также были бы C^k-гладкими, т. е. чтобы ψ было отображением класса C^k.

Замечание. Следующий одномерный пример показывает, что если просто потребовать, чтобы каждая точка P верхнего многообразия M имела окрестность, отображаемую гомеоморфно на окрестность в нижнем многообразии N, то это не будет эквивалентно указанному в определении требованию. Пусть N — единичная окружность на плоскости, а M — открытый интервал длины более 2π, намотанный на эту окружность. Тогда точки a и b в N, лежащие под концами M (рис. 24.1), не удовлетворяют условиям определения, хотя, поскольку M открыто, каждая *его* точка имеет окрестность, гомеоморфно отображаемую в N.

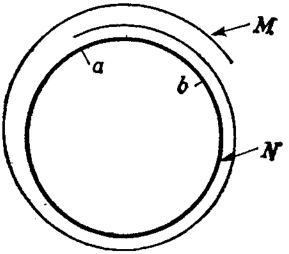

Рис. 24.1.

[1]) Иначе говоря, ψ называется накрытием, если существует покрытие многообразия N набором правильных (относительно ψ) окрестностей (good neighborhoods, по терминологии автора). — *Прим. перев.*

Пусть M — риманова поверхность произвольной алгебраической функции $F(z)$, все точки ветвления которой исключены, N — комплексная плоскость с исключенными соответствующими точками, а ψ — отображение, переводящее любую точку из M в точку N, лежащую непосредственно под ней (т. е. в точку, связанную с тем же значением z); тогда ψ — накрытие N многообразием M. Для произвольной точки $P \in N$ найдется некоторая окрестность V, которая односвязна и не содержит никаких точек ветвления функции $F(z)$. Если построить прямой цилиндр с основанием V, то этот цилиндр пересечет каждый лист римановой поверхности по окрестности U, которая выглядит в точности как V. Следовательно, V — правильная окрестность.

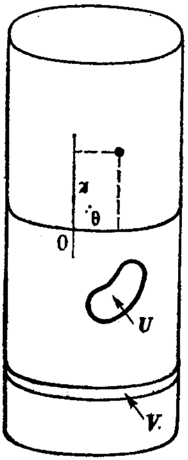

Рис. 24.2.

Заданное многообразие N может иметь много различных накрывающих многообразий M и много различных накрытий заданным M. Если N — единичная окружность $|z| = 1$ на z-плоскости, то N можно накрыть либо вещественной прямой $M = \mathbb{R}$ при помощи отображения $x \longrightarrow z = e^{ix}$ (можно представить себе, что M намотана бесконечное число раз на окружность N), либо окружностью M: $|w| = 1$ на w-плоскости

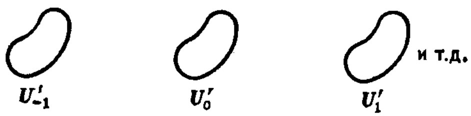

Рис. 24.3.

при помощи любого отображения вида $w \longrightarrow z = w^n$, где n — произвольное целое число, отличное от нуля (можно представить себе, что M растянута и намотана n раз на окружность N).

Рассмотрим отображение ψ плоскости на цилиндр, задаваемое равенствами $z = x$ и $\theta = y$, где x, y — декартовы координаты на плоскости, а z, θ — цилиндрические координаты на цилиндре. Это отображение переводит много точек в одну точку, поскольку все точки (x, y), $(x, y \pm 2\pi)$, $(x, y \pm 4\pi)$ и т. д. отображаются в одну и ту же точку цилиндра. Прообраз окрестности, которая, подобно U на рис. 24.2, не опоясывает цилиндра, состоит из бесконечной последовательности окрестностей U'_j на плоскости, полученных смещением каждой из них по горизонтали на расстояния $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$ и т. д., как на рис. 24.3. Каждая U'_j гомеоморфна U; следовательно, U — правильная окрестность. С другой стороны, окрестность типа V на рис. 24.2, представляющая собой полосу, опоясывающую цилиндр, не может быть правильной, потому что ее прообраз является бесконечной полосой на плоскости, отображаемой при помощи ψ на V не взаимно однозначно.

Упражнение

Рассмотрите различные возможные накрытия тора плоскостью, цилиндром, другим тором.

Если M и N суть C^k-многообразия, то отображение ψ должно быть C^k-гладким, т. е. если ψ отображает P на $Q=\psi(P)$, V — правильная окрестность Q, U — компонента $\psi^{-1}(V)$, содержащая P, $x^1, \ldots, x^n$ — координаты P в U, $y^1, \ldots, y^n$ — координаты Q в V, то x^i являются функциями класса C^k от y^i, и наоборот. (Почти во всех представляющих интерес случаях M и N — аналитические многообразия, и эти функции являются аналитическими.)

Если накрытие ψ оказывается взаимно однозначным соответствием, так что M и N накрывают друг друга, то ψ называется (C^k-) *гомеоморфизмом*, а многообразия называются *гомеоморфными*; топологически они неразличимы. В случае $k=\infty$ гомеоморфизм иногда называют *диффеоморфизмом*.

24.2. ПРИНЦИПЫ ПОДНЯТИЯ

Если накрывающее многообразие M связно, то и N обязательно также связно. Обратное, конечно, неверно, однако здесь будут рассматриваться только связные многообразия. Если M *односвязно* (подобно прямой или плоскости в предыдущих примерах), то, согласно следующей ниже теореме, оно оказывается наибольшим из всех связных многообразий, которые накрывают данное многообразие N. Нам потребуются две леммы.

Лемма 1 (первый принцип поднятия). *Предположим, что многообразие M_1 накрывает многообразие M_0 проекцией ψ. Пусть B_0 — произвольная* отмеченная точка M_0. *Из всех точек $P \in M_1$, таких, что $\psi(P)=B_0$, выберем одну и назовем ее отмеченной точкой B_1 в M_1.* (См. рис. 24.5 в следующем параграфе, где, однако, добавлено третье многообразие в связи с теоремой, которая будет доказана ниже.) *Пусть $\mathscr{C}_0$ — путь в M_0, описываемый непрерывной функцией $P_0(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и начинающийся в отмеченной точке B_0. Тогда имеется только один путь $\mathscr{C}_1$: $P_1(t) \in M_1$, такой, что $P_1(0)=B_1$ и $\psi(P_1(t))=P_0(t)$. Говорят, что путь $\mathscr{C}_0$ поднят в M из M_0.*

Доказательство. В определении накрытия отмечалось, что окрестность $U \subset M_0$ называется *правильной*, если отображение ψ оказывается гомеоморфизмом каждой компоненты $\psi^{-1}(U)$ на U. Для произвольного подынтервала $I \subset [0, 1]$ обозначим через $P_0(I)$ отрезок пути $\mathscr{C}_0$:

$$P_0(I)=\{P_0(t)\colon\ t \in I\}.$$

Разбиение $[0, 1]$ на замкнутые подынтервалы $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{N-1}, 1]$ называется *правильным* разбиением, если каждый отрезок $P_0([t_j, t_{j+1}])$ пути $\mathscr{C}_0$ лежит в какой-то правильной окрестности. Правильное разбиение существует потому, что каждая точка $\mathscr{C}_0$ лежит в некоторой правильной окрестности; следовательно, каждое t из $[0, 1]$ лежит в некотором открытом подынтервале I, таком, что отрезок пути $P_0(I)$ находится в правильной окрестности. Эти открытые интервалы покрывают $[0, 1]$, а по теореме Гейне—Бореля среди них имеется конечное число интервалов, покрывающих $[0, 1]$. Упорядочим их в порядке возрастания t, а затем выберем какое-нибудь t_1 из пе-

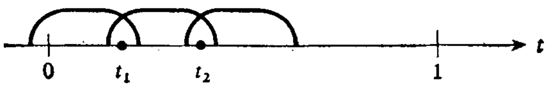

Рис. 24.4.

ресечения первого и второго подынтервалов, t_2 из пересечения второго и третьего подынтервалов и т. д. (см. рис. 24.4). Эти точки и дают правильное разбиение.

Обозначим через U_j правильную окрестность, содержащую отрезок пути $P_0([t_j, t_{j+1}])$. Для каждого $j=0, 1, \ldots, N-1$ определим (индуктивно) отрезок $P_1([t_j, t_{j+1}])$ пути $\mathscr{C}_1=\{P_1(t)\colon 0\leqslant t\leqslant 1\}$ в верхнем многообразии M_1. Вначале возьмем V_0—компоненту $\psi^{-1}(U_0)$, содержащую отмеченную точку B_1 из M_1, и определим $P_1([0, t_1])$ как $\hat{\psi}^{-1}(P_0([0, t_1]))$, где $\hat{\psi}$—ограничение ψ на V_0; $\hat{\psi}$ есть гомеоморфизм V_0 на U_0; следовательно, так определенное $P_1([0, t_1])$ представляет собой отрезок пути в M_1.

Теперь предположим, что $P_1([t_j, t_{j+1}])$ уже определено; тогда $P_0(t_{j+1})$ лежит как в U_{j+1}, так и в U_j. В качестве V_{j+1} можно взять ту компоненту $\psi^{-1}(U_{j+1})$, которая содержит концевую точку $P_1(t_{j+1})$ ранее определенного отрезка $\mathscr{C}_1$; тогда отрезок $P_1([t_{j+1}, t_{j+2}])$ определяется как $\hat{\psi}^{-1}(P_0([t_{j+1}, t_{j+2}]))$, где теперь $\hat{\psi}$—ограничение ψ на V_{j+1}. Таким образом и будет построен весь путь $\mathscr{C}_1$ на M_1. Он однозначно определяется кривой $\mathscr{C}_0$ в нижнем многообразии и выбором отмеченной точки B_1 в верхнем многообразии; в частности, он не зависит от выбора правильного разбиения $[0, 1]$, потому что любые два разбиения имеют общее измельчение, а $\mathscr{C}_1$, очевидно, не меняется при измельчении используемого разбиения (т. е. при добавлении дополнительных точек подразбиения $[0, 1]$). Каждый из путей $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}_1$ однозначно определяет другой.

Лемма 2 (второй принцип поднятия). *Если выполнены условия леммы* 1 *и если $P_0(t, s)$—непрерывная функция двух переменных, определенная на квадрате $0\leqslant t, s\leqslant 1$ и отображающая его в M_0, а $P_0(t_0, s_0)$ для некоторых t_0 и s_0 совпадает с отмеченной точкой B_0, то существует единственная непрерывная функция $P_1(t, s)$ в M_1, такая, что* (1) $\psi(P_1(t, s))=P_0(t, s)$ *и* (2) $P_1(t_0, s_0)$ — *отмеченная точка $B_1\in M_1$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Теорема Гейне—Бореля обеспечивает существование конечного набора открытых множеств на (t, s)-плоскости, покрывающих квадрат $0\leqslant t$, $s\leqslant 1$ и определяющих при этом правильные окрестности. Затем эти множества упорядочиваются так, чтобы каждое последующее содержало точки пересечения хотя бы с одним из предыдущих множеств. После этого следуют те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 1.

Следствие [1]**.** *Если два пути $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}_0'$ на нижнем многообразии, идущие из B_0 в некоторую точку A_0, гомотопны, т. е. если один из них может быть непрерывно деформирован в M_0 в другой с сохранением неподвижности концевых точек, то пути, получающиеся при их поднятии в M_1, также имеют общую концевую точку A_1 и гомотопны в M_1.*

Набросок доказательства. Пусть функция $P_0(t, s)$ из леммы 2 такова, что для каждого s из $[0, 1]$ $P_0(t, s)$ описывает путь от B_0 до A_0 при изменении t от 0 до 1, причем для $s=0$ этот путь совпадает с $\mathscr{C}_0$, а для $s=1$ — с $\mathscr{C}_0'$. Из соображений непрерывности, связанных с правильной окрестностью точки A_0, следует показать, что конечная точка поднятого пути $P_1(t, s)$ не может при изменении s перескакивать с одного листа M_1 на другой.

24.3. УНИВЕРСАЛЬНОЕ НАКРЫВАЮЩЕЕ МНОГООБРАЗИЕ

В § 24.5 будет доказано, что для любого многообразия M_0 существует односвязное многообразие, накрывающее его. Это многообразие называют *универсальным накрывающим многообразием* многообразия M_0, поскольку, по доказанной ниже теореме, (1) универсальное накрывающее многообразие заданного M_0 единственно (с точностью до гомеоморфизма) и (2) оно накрывает любое другое многообразие, накрывающее M_0. Доказательство существования откладывается до § 24.5, так как оно несколько труднее для понимания, нежели доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Если M_1 и M_2—связные накрывающие многообразия для M_0 и M_2 односвязно, то M_2 накрывает M_1. Если и M_1 односвязно, то M_1 и M_2 гомеоморфны, т. е. топологически неразличимы.*

Доказательство. Пусть ψ_{10} и ψ_{20}—проекции M_1 и M_2 соответственно на M_0. Построим проекцию ψ_{21} многообразия M_2 на M_1 так, что $\psi_{10}\psi_{21}=\psi_{20}$. Выберем некоторые отмеченные точки B_2, B_1, B_0 в этих многообразиях так, чтобы $\psi_{20}(B_2)=\psi_{10}(B_1)=B_0$ (см. рис. 24.5). Чтобы описать ψ_{21}, нужно для каждой точки $Q_2 \in M_2$ указать точку $\psi_{21}(Q_2)$ в M_1, что будет сделано следующим образом. Пусть $\mathscr{C}_2$—путь $P_2(t)$ в M_2, идущий из B_2 в Q_2 (т. е. $P_2(0)=B_2$, $P_2(1)=Q_2$). Тогда проекцией $\mathscr{C}_2$ на M_0 служит путь $P_0(t)=$ $=\psi_{20}(P_2(t))$ из B_0 в Q_0. (*Замечание.* $\mathscr{C}_0$ может иметь самопересечения, даже если их не имеет $\mathscr{C}_2$. Например, на рис. 24.6 $\mathscr{C}_2$—путь на плоскости, а $\mathscr{C}_0$ получается при наматывании плоскости на цилиндр.) Отображение ψ_{10}^{-1}, вообще говоря, многозначно, но в силу первого принципа поднятия существует единственный путь $\mathscr{C}_1$: $P=P_1(t)$ в M_1, начинающийся в отмеченной точке B_1 и такой, что $\psi_{10}(\mathscr{C}_1)=\mathscr{C}_0$. Теперь утверждается, что конец $Q_1=P_1(1)$ пути $\mathscr{C}_1$ однозначно определяется концом Q_2 пути $\mathscr{C}_2$ на верхнем многообразии M_2. Чтобы доказать это, возьмем какой-нибудь другой путь $\mathscr{C}_2'$ в M_2, идущий из

[1] Утверждение такого рода носит название «теорема о накрывающей гомотопии» (см., например, Рохлин, Фукс [1977], а также Борисевич и др. [1980]).—*Прим. перев.*

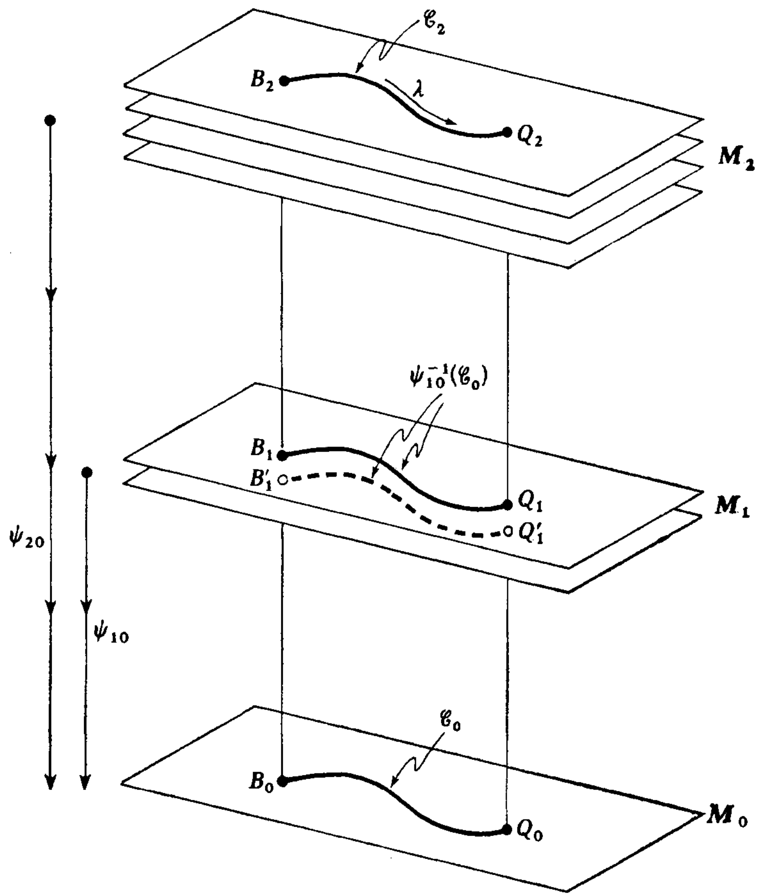

Рис. 24.5. Накрывающие многообразия (см. текст).

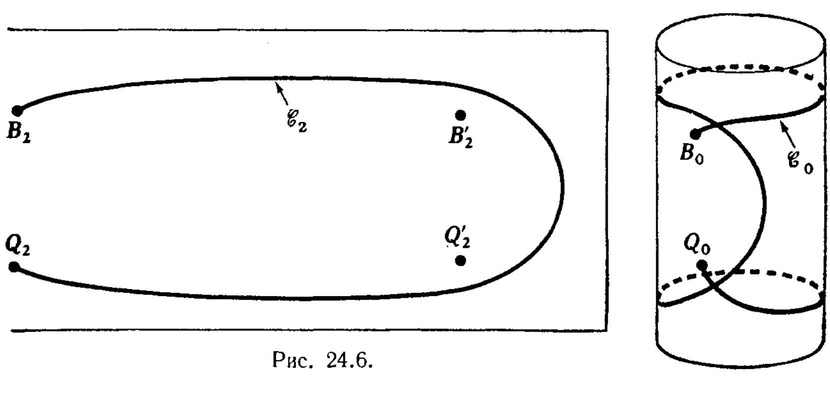

Рис. 24.6.

B_2 в Q_2. Поскольку M_2 односвязно, $\mathscr{C}_2$ и $\mathscr{C}_2'$ гомотопны и могут быть деформированы непрерывно один в другой. Поэтому и их образы $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}_0'$ в M_0 также гомотопны, и, по следствию леммы 2, пути $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_1'$, получающиеся поднятием $\mathscr{C}_0$ и $\mathscr{C}_0'$ в M_1, имеют общий конец Q_1, который и есть по определению $\psi_{21}(Q_2)$. Поскольку точка Q_2 была произвольной, отображение ψ_{21} определено на всем M_2, причем

$$\psi_{10}(\psi_{21}(Q_2)) = \psi_{10}(Q_1) = Q_0 = \psi_{20}(Q_2).$$

Упражнение

Завершите доказательство, показав, что (а) ψ_{21}—отображение *на*; (б) любое $Q_1 \in M_1$ имеет такую окрестность V, что каждая компонента $\psi_{21}^{-1}(V)$ гомеоморфна V при отображении ψ_{21}, и (в) если M_1 также односвязно, то Q_1 однозначно определяет Q_2, так что ψ_{21} взаимно однозначно.

Замечание. Утверждение о гомеоморфности двух многообразий ничего не говорит о том, как они могут выглядеть при вложении их в некоторое евклидово пространство большей размерности. Окружность на плоскости как *одномерное многообразие* гомеоморфна простому узлу в пространстве; простая бумажная петля не гомеоморфна листу Мёбиуса, но гомеоморфна бумажной петле, у которой перед склеиванием концов сделано два полуоборота (т. е. один полный оборот одного конца) или даже любое четное число полуоборотов, тогда как лист Мёбиуса гомеоморфен петле с нечетным числом полуоборотов (одного из склеиваемых концов бумажной полосы). Во всем этом можно убедиться при построении этих многообразий методом склеивания краев, рассмотренным в § 23.1.

На основании данной теоремы односвязное накрывающее многообразие называется *универсальным накрывающим многообразием*. В § 24.5 будет показано, что любое многообразие N имеет универсальное накрывающее многообразие. Это обстоятельство играет важную роль в теории групп Ли, а также при космологической интерпретации многообразий Эйнштейна. Поскольку построение универсального накрывающего многообразия представляет некоторую трудность, ниже приводится несколько замечаний о математических построениях вообще.

24.4. ЗАМЕЧАНИЯ О ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Широкое использование построений математиками представляется иногда на первый взгляд неестественным и искусственным. Что касается физиков, для которых вещественное число — это, например, мгновенная координата $x = x(t)$ движущейся точки, то в целом для них кажется неприемлемым рассматривать это число как бесконечный класс эквивалентности последовательностей Коши рациональных чисел (особенно когда напоминается, что каждое рациональное число есть бесконечный класс эквивалентности упорядоченных пар целых чисел и т. д.). Однако после завершения этого построения и выяснения свойств получающейся системы можно полностью забыть детали построения и рассматривать вещественное число как объект, столь же изначальный и неделимый, сколь и точка в евклидовой геометрии. Построение математических моделей начинает сейчас играть заметную роль в квантовой теории и теории относительности, причем в основном по тем же причинам, что и в математике; когда структура определена набором аксиом, остается только доказать их взаимную непротиворечивость, а наилучший способ сделать это — представить модель структуры, основанную на более простых аксиомах, которые уже были приняты ранее.

Одним из наиболее старых примеров такого рода служит отношение математиков к комплексным числам. Некоторым математикам казалось неестественным и опасным утверждение о существовании такого числа i, что $i^2=-1$, и было немало споров относительно возможности существования таких чисел. Этот вопрос был решен (Гауссом в 1831 г. и независимо Гамильтоном в 1837 г.) путем рассмотрения упорядоченных пар (a, b) вещественных чисел со следующими определенными для них арифметическими операциями:

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d),$$
$$(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ bc+ad),$$

вследствие чего система всех упорядоченных пар приобрела в точности те же самые свойства, что и система чисел $a+bi$, если бы число i существовало. Но тогда допускать (или не допускать) существование комплексных чисел — дело вкуса, а писать ли (a, b) или $a+bi$ — это несущественно.

Исследуя релятивистское волновое уравнение для электрона, Дирак столкнулся с необходимостью ввести четыре величины α_1, α_2, α_3, α_4, произведение которых удовлетворяло бы правилу

$$\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j=2\delta_{jk} \quad (j,\ k=1,\ \ldots,\ 4). \qquad (24.4.1)$$

Вместо того чтобы просто постулировать существование этих α_j, а равенство (24.4.1) принять за аксиому, Дирак указал четыре матрицы размера 4×4, произведение которых в точности удовлетворяет (24.4.1) (если правая часть равенства интерпретируется как единичная матрица, умноженная на $2\delta_{jk}$).

Теория алгебр Ли начинается с абстрактных определений и аксиом. После чрезвычайно длительных и сложных рассуждений, содержащих много трудных лемм и теорем, получается классификация так называемых простых комплексных алгебр Ли, по которой такие алгебры сводятся к девяти типам, или классам. После этого возникают два вопроса: (1) В какой мере исходные аксиомы непротиворечивы? (2) Может ли быть так, что последующие работы еще более упростят теорию и исключат некоторые из этих девяти типов? На оба вопроса ответы были получены путем построения математической модели каждой (из этих девяти типов) алгебры без использования каких бы то ни было аксиом (кроме обычных арифметических). Некоторые из этих конструкций довольно сложны и искуственны, однако своему назначению они вполне соответствуют (см. Хаузнер и Шварц [1968]).

Другим примером служит вопрос о возможности существования тех или иных неевклидовых геометрий (основанных на аксиомах, отличающихся от аксиом евклидовой геометрии); эта задача была решена построением моделей без использования каких-либо новых аксиом. В этих моделях были введены определенные объекты, которые довольно произвольно были названы «точками», указано, что означает «расстояние» вдоль кривой между двумя точками, определена «прямая» как кривая минимальной длины между двумя точками и т. д. и, наконец, было доказано, что эти «объекты» удовлетворяют всем аксиомам Евклида, за исключением того, что через точку Q, не лежащую на прямой L, проходят много различных прямых L', L'', ... и т. д., параллельных L (или — для другой модели—таких прямых нет вообще). Таким образом было доказано, что аксиому Евклида о параллельных можно изменять, не порождая этим противоречий [1]) (см. гл. 26—28).

Распределения сами по себе являются конструкциями. Дирак постулировал существование некоего объекта, обозначенного через $\delta(x-x_0)$, который во многих отношениях должен был вести себя как обычная функция и, кроме того, обладать некоторыми особыми свойствами. Функционал $\langle\delta, \varphi\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \varphi(x_0)$, если его интерпретировать должным образом, удовлетворяет всем этим требованиям.

Математическая модель универсального накрывающего многообразия M для данного многообразия N строится в следующем параграфе методом, заимствованным из общей теории относительности (см. замечание в § 23.4). Пространство M не предполагается известным заранее ни как топологическое пространство, ни даже как набор точек. Вместо этого имеется набор карт и указано, как их следует связать друг с другом, чтобы получить M. Согласно теореме Уитни о вложении (которая здесь доказываться не будет), n-мерное многообразие, подобное M (абстрактное или какое-либо другое), гомеоморфно n-мерной поверхности некоторого евклидова пространства E^N более высокой размерности; эта поверхность дает другую математическую модель многообразия M, если первая модель была уже построена.

---

[1]) Иначе говоря, аксиома о параллельных является независимой.—*Прим. перев.*

24.5. ПОСТРОЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО НАКРЫТИЯ

Пусть задано связное многообразие $\boldsymbol{N}$ класса C^k, и мы хотим построить односвязное многообразие $\boldsymbol{M}$, накрывающее $\boldsymbol{N}$. Предположим, что карты K, L, ... на $\boldsymbol{N}$ односвязны [1]). Выберем в $\boldsymbol{N}$ отмеченную точку B_0 и для любой карты K обозначим через α, β, ... гомотопические классы путей из B_0 в K (концом этих путей может быть любая точка из K, поскольку K односвязна). Далее мы берем дубликаты карты K, обозначаемые через K_α, K_β, ..., по одному для каждого гомотопического класса (см. рис. 24.7), а затем для получения многообразия $\boldsymbol{M}$ соединим все

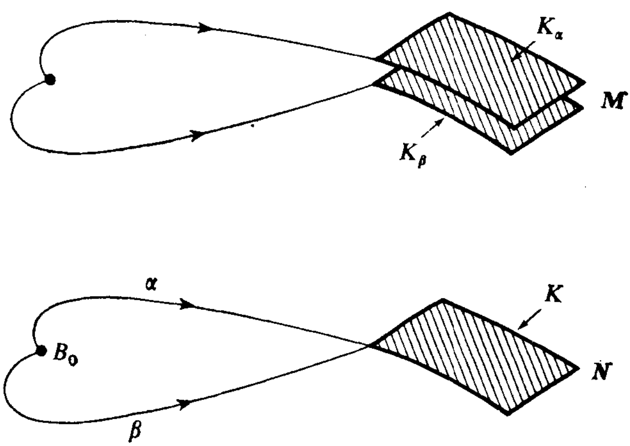

Рис. 24.7. Построение универсального накрывающего многообразия.

карты K_α, K_β, ..., L_ζ, L_η, ..., ..., уточнив, как они должны перекрываться. Если заданы любые две из них, скажем K_α и L_η, то положим, что они не перекрываются, если не перекрываются в $\boldsymbol{N}$ карты K и L. Если K и L перекрываются, то можно предполагать, что пути из α и η имеют общий конец на перекрытии K и L. Тогда мы будем считать, что K_α и L_η не перекрываются, если пути из α не гомотопны путям из η; в случае же гомотопии указанных путей (в этом случае мы будем писать $\alpha \sim \eta$) мы полагаем, что K_α и L_η имеют то же самое перекрытие, что и K и L. Точнее, пусть

$$K = \{\boldsymbol{U}, \varphi, N\}, \quad L = \{\boldsymbol{U}', \varphi', N'\}. \tag{24.5.1}$$

Тогда для каждого α карта K_α представляет собой копию K, отличающуюся от K и от других копий только указанием раз-

[1]) Точнее, односвязны множества $\boldsymbol{U}$, на которых определены координатные функции φ (см. § 23.1).—*Прим. перев.*

личающего индекса α. Пусть

$$K_\alpha = \{U_\alpha,\ \varphi,\ N\},\quad L_\eta = \{U'_\eta,\ \varphi',\ N'\}, \tag{24.5.2}$$

где U_α и U'_η—области многообразия M, которые определяются следующим образом: каждая точка x области N координатного пространства $\mathbb{R}^n$ определяет точку $p \in U_\alpha$ с координатами $\varphi^j(p) \overset{\text{def}}{=} x^j$, где x^j—координаты x. Многообразие M состоит из всех таких точек, определенных для всех карт K_α, K_β, ..., L_ζ, L_η, ..., ... Эти точки M различны с точностью до отождествления точек, которое необходимо делать, когда определяется перекрытие карт.

Перекрытие карт K и L в N описывается, согласно (24.5.1), функциями

$$x'^j = x'^j(x^1,\ \ldots,\ x^n), \tag{24.5.3}$$

которые определяют взаимно однозначное отображение области N на область N' и поэтому задают две координатные системы на области $U \cap U'$ из N. Если $\alpha \sim \eta$, то мы полагаем по определению, что перекрытие K_α и K_η задается теми же самыми равенствами (24.5.3), а точку из U_α, имеющую данные координаты $x^1, \ldots, x^n$, отождествляем с точкой из U''_η с соответствующими координатами $x'^1, \ldots, x'^n$, определяемыми этими равенствами.

Ясно, что эта процедура порождает некоторое многообразие M того же самого класса гладкости C^k, что и N. Проекция ψ M на N легко определяется проектированием каждой K_α на соответствующую карту K: каждая точка из $U_\alpha \subset M$ проектируется в точку из $U \subset N$, имеющую те же самые координаты $x^1, \ldots, x^n$. Эта проекция ψ принадлежит классу C^k, потому что в этих координатах она совпадает с тождественным отображением.

Наконец, для доказательства односвязности M возьмем в качестве отмеченной точки $A_0 \in M$ одну из точек, лежащих над отмеченной точкой $B_0 \in N$. Точнее, пусть B_0 лежит в некоторой карте L на N. Рассмотрим гомотопические классы ζ, η, ... замкнутых путей, начинающихся и заканчивающихся в B_0. Среди них есть класс нуль-гомотопных путей (скажем, η), т. е. путей, стягиваемых в N непрерывно в точку B_0. Тогда A_0—это точка из L_η, лежащая над B_0, т. е. имеющая те же самые координаты $x^1, \ldots, x^n$ в L_η, что и B_0 в L.

Для произвольной карты K_α на M возьмем один из путей класса α в N и поднимем его в M согласно первому принципу поднятия из § 24.2 и тем самым однозначно определим путь (обозначим его через α'), идущий из новой отмеченной точки A_0 в какую-то точку в K_α. Тогда в случае перекрытия карт K_α и L_ζ получаем, что $\alpha \sim \zeta$; следовательно, по второму принципу поднятия пути α' и ζ' гомотопны в M или, точнее, становятся гомотопными, если их выбрать так, чтобы они имели общий конец на перекрытии K_α и L_ζ.

Пусть теперь $\mathscr{C}$: $P(\lambda)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,— произвольный путь в M; покажем, что он гомотопен любому другому пути, идущему из $P(0)$ в $P(1)$, т. е. что M—односвязное многообразие. Каждая точка $P(a)$ на $\mathscr{C}$ относится к некоторой карте, а значит, и $P(\lambda)$

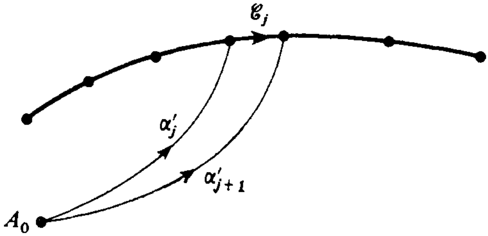

Рис. 24.8.

относится к той же карте для λ из некоторого интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. По теореме Гейне—Бореля можно выбрать конечное подразбиение $[0, 1]$ вида

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_k = 1,$$

такое, что $P(\lambda)$ лежит в некоторой карте, скажем L_{α_j}, для всех $j = 0, 1, \ldots, k-1$, и это верно для любого $\lambda \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}]$. Обозначим через $\mathscr{C}_j$ часть $\mathscr{C}$ для $\lambda_j \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{j+1}$; эта часть лежит в L_{α_j}. Пусть для каждого j α'_j—путь в M (такой же, как и в пре-

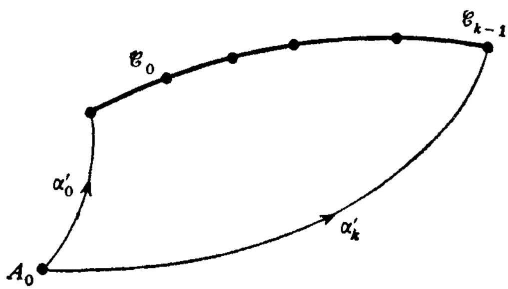

Рис. 24.9.

дыдущем абзаце), идущий из отмеченной точки A_0 в $P(\lambda_j)$. Так как обе точки $P(\lambda_j)$ и $P(\lambda_{j+1})$ лежат в L_{α_j}, путь $\alpha'_j \circ \mathscr{C}_j$ гомотопен α'_{j+1} (см. рис. 24.8). Поэтому

$$\alpha'_0 \circ \mathscr{C}_0 \circ \mathscr{C}_1 \circ \ldots \circ \mathscr{C}_{k-1} \sim \alpha'_k,$$

а поскольку $\mathscr{C}=\mathscr{C}_0\circ\mathscr{C}_1\circ\ldots\circ\mathscr{C}_{k-1}$, то

$$\mathscr{C}\sim(\alpha_0')^{-1}\circ\alpha_k$$

(см. рис. 24.9). Правая часть здесь зависит только от начальной и конечной точек $P(0)$ и $P(1)$ пути $\mathscr{C}$; следовательно, любой путь из $P(0)$ в $P(1)$ гомотопен $\mathscr{C}$, что и требовалось доказать.

Резюме (основная теорема). *Любое (связное) n-мерное многообразие N имеет универсальное накрывающее многообразие M (также n-мерное), т. е. имеет односвязное накрывающее многообразие. M накрывает любое многообразие, накрывающее N, и все односвязные многообразия, накрывающие N, гомеоморфны M. Модель M строится при помощи описанной выше процедуры.*

24.6. МНОГООБРАЗИЯ, НАКРЫВАЕМЫЕ ЗАДАННЫМ МНОГООБРАЗИЕМ

Рассмотрим теперь задачу, обратную нахождению универсального накрывающего многообразия M для заданного многообразия N: пусть задано M, и нужно построить многообразие N, которое может быть накрыто многообразием M. Процедура построения использует склеивание (отождествление) множеств точек в M. Приведем сначала несколько примеров.

Пусть M представляет собой (x, y)-плоскость, плотно намотанную на единичный цилиндр Z, ось которого лежит в направлении оси y. Мы знаем, конечно, что тогда плоскость накрывает цилиндр, однако мы сейчас покажем, как установить этот факт априори. Мы знаем, что для заданной точки (x, y) все точки $(x+2\pi l, y)$, $l=0, \pm1, \pm2, \ldots$, плоскости совпадают с одной точкой цилиндра. Поэтому многообразие N, гомеоморфное цилиндру Z, можно построить так: определим «точки» многообразия N как множества

$$\{(x+2\pi l, y)\colon l=0, \pm1, \ldots\}\overset{\text{def}}{=}\psi((x, y)),$$

и соответственно этому определим и карты в N. Тогда отображение $(x, y)\to\psi((x, y))$ есть проекция M на N. Говорят, что все точки $(x+2\pi l, y)$ каждого множества *отождествлены* (т. е. сделаны идентичными). Отметим, что множитель 2π несуществен, потому что здесь играют роль только топологические свойства N. Отождествление (склеивание) точек $(x+n, y)$ или вообще точек $(x+an, y)$ для любого ненулевого вещественного числа a приводило бы к тому же самому результату.

Аналогично, если для каждой точки $(x, y)\in M$ отождествляются все точки вида $(x+l, y+m)$, где l и m независимо пробегают значения $0, \pm1, \pm2, \ldots$, то получающееся многообразие N оказывается тором (точнее, гомеоморфно тору).

Пусть M—бесконечная полоса $-1<x<1$, $-\infty<y<\infty$. Пусть для данной точки $(x, y)\in M$ отождествляются точки вида

$((-1)^l x,\ y+l)$, $l=0, \pm 1, \ldots$; получающееся после этого многообразие N оказывается листом Мёбиуса.

Обобщая эти примеры, возьмем произвольное (связное) многообразие M. Предположим, что σ — гомеоморфизм (класса C^k, если M является C^k-многообразием) M на себя. Обозначим через σ^l l-ю суперпозицию σ, т. е.

$$\sigma^l(P) = \underbrace{\sigma(\sigma(\ldots\sigma}_{l \text{ раз}}(P)\ldots)),$$

а через σ^{-l} — l-ю суперпозицию обратного отображения σ^{-1}. Для любой точки $P \in M$ рассмотрим множество точек

$$\psi(P) \overset{\text{def}}{=} \{\sigma^l(P)\colon\ l=0, \pm 1, \ldots\}. \tag{24.6.1}$$

[В первом примере σ — сдвиг $(x, y) \to (x+2\pi, y)$ в плоскости.] Далее предположим, что σ таково, что множество точек $\psi(P)$ в M дискретно для каждого P, т. е. предположим, что найдется такая окрестность точки P, которая не содержит других точек $\sigma^l(P)$ с $l \neq 0$. Тогда, поскольку σ является гомеоморфизмом, каждая точка $\sigma^k(P)$ имеет окрестность, не содержащую точек $\sigma^l(P)$ с $l \neq k$.

В рамках этих предположений получается многообразие N, «точки» которого суть множества $\psi(P)$:

$$N = \{\psi(P)\colon\ P \in M\}.$$

Чтобы определить карты на N, возьмем карту $\{U, \varphi, N\}$ на M. Предположим, что U настолько мала, что в U не найдется такой точки P, чтобы и $\sigma(P)$ лежало в U. (В противном случае заменим эту карту на какую-нибудь подходящую подкарту.) Карта $\{\tilde{U}, \tilde{\varphi}, \tilde{N}\}$ многообразия N определяется тогда следующим образом:

$$\tilde{U} = \{\psi(P)\colon\ P \in U\}, \quad \tilde{\varphi}(\psi(P)) \overset{\text{def}}{=} \varphi(P),\ P \in U, \quad \tilde{N} = N.$$

В качестве совершенно очевидного упражнения оставляется доказательство того, что (а) $\tilde{\varphi}$ взаимно однозначно, (б) определенные так карты попарно согласованы и покрывают все N, (в) отображение $P \to \psi(P)$ является отображением *на* N, (г) любая окрестность $\tilde{U}$ указанного выше вида является правильной окрестностью каждой своей точки, потому что компоненты $\psi^{-1}(\tilde{U})$ суть множества $\sigma^l(U)$, $l=0, \pm 1, \ldots$. Следовательно, ψ есть накрытие N многообразием M.

Покажем теперь, что каждое накрытие многообразия N многообразием M связано с группой гомеоморфизмов M описанного выше типа.

Пусть M и N — связные n-мерные многообразия, причем M накрывает N посредством проекции ψ (предполагается, что она не взаимно однозначна, так что накрытие не тривиально). Пусть B_1 и B_0—отмеченные точки в M и N, причем B_1 лежит над B_0 (т. е. $\psi(B_1)=B_0$). Покажем, что для любой другой точки $B_1' \in M$, лежащей над B_0, существует гомеоморфизм σ многообразия M на себя, который переводит B_1 в B_1'.

Доказательство этого оказывается довольно простым, если M односвязно, и мы рассмотрим сначала этот случай. Если $\mathscr{C}_1$ — путь в M из B_1 в B_1', а $\mathscr{C}_0$—его образ в N, то $\mathscr{C}_0$—замкнутый путь, начинающийся и кончающийся в B_0; далее мы фиксируем $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_0$ и с их помощью построим гомеоморфизм σ M на себя, при котором B_1 переходит в B_1'. Пусть

$$P_1\colon\ P_1(t)\quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \qquad P_1(0)=B_1$$

—путь в M из B_1 в произвольную точку $P_1(1)=A_1$. Построим образ A_1 при отображении σ. Пусть P_0—образ пути P_1 в N с конечной точкой $A_0=\psi(A_1)$, а P_1'—результат поднятия пути $\mathscr{C}_0 \circ P_0$ в M. Тогда $P_1'(1)$—точка, лежащая, как и A_1, над A_0. Отображение σ: $M \to M$ определяется соответствием

$$\sigma\colon\ A_1 \to A_1 = P_1'(1).$$

Это определение корректно, потому что при таком же построении с любым другим путем Q_1 в M из B_1 в A_1 оказывается, что Q_1 гомотопен P_1 (так как M односвязно); следовательно, путь $\mathscr{C}_0 \circ Q_0$ гомотопен $\mathscr{C}_0 \circ P_0$, а значит, по следствию второго принципа поднятия, P_1' гомотопен Q_1', и в результате получается та же самая точка A_1' как образ A_1 при отображении σ. Более того, σ взаимно однозначно, потому что $\mathscr{C}_0^{-1}$ существует. Ясно, что σ непрерывно, поскольку малое смещение точки A_1 можно получить при помощи малого изменения пути P_1 и, значит, малого изменения пути P_1', что дает малое смещение точки A_1'. Таким образом, σ—гомеоморфизм M на себя.

Если M не односвязно, то уже нельзя утверждать, что пути P_1 и Q_1 в M из B_1 в A_1 гомотопны. Пусть A_1''—конечная точка $Q_1'(1)$ пути Q_1'; покажем, что $A_1''=A_1'$, т. е. что отображение σ определено все-таки корректно. Пути $P_1^{-1} \circ P_1'$ и $Q_1^{-1} \circ Q_1'$ в M, идущие из A_1 в A_1' и из A_1 в A_1'' соответственно, отображаются при помощи ψ на пути

$$P_0^{-1} \circ \mathscr{C}_0 \circ P_0 \quad \text{и} \quad Q_0^{-1} \circ \mathscr{C}_0 \circ Q_0.$$

Однако в N это замкнутые пути, начинающиеся и кончающиеся в A_0, и оба они гомотопны $\mathscr{C}_0$; из следствия второго принципа поднятия вытекает, что $P_1^{-1} \circ P_1'$ и $Q_1^{-1} \circ Q_1'$ гомотопны, и, следовательно, σ определено корректно. Остальные рассуждения оказываются теми же самыми, что и в случае односвязности M.

Если точки B_1' берутся в порядке расположения точек M, лежащих над B_0 (включая и саму точку B_1), то получается группа гомеоморфизмов многообразия M. Действие этой группы на M таково, что для любой точки A_1 множество образов $\{\sigma(A_1)\colon$ все $\sigma\}$ дискретно. Чтобы убедиться в этом, возьмем правильную окрестность U точки $A_0 = \psi(A_1)$. Все точки $\sigma(A_1)$ лежат над A_0, однако, поскольку ψ взаимно однозначно на каждой компоненте U' прообраза $\psi^{-1}(U)$, в каждой такой компоненте может быть не более одной точки, лежащей над A_0.

Задача нахождения всех многообразий, накрываемых заданным многообразием, тем самым сводится к задаче нахождения всех гомеоморфизмов σ описанного выше вида. Эта идея используется в общей теории относительности (см. гл. 28).